Métodos de Cálculo das Rêdes Hidráulicas (*)

Eng. **TUFI MAMED ASSY**

Professor Catedrático da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo — Consultor Técnico da COMASP

Demonstra-se que as rêdes malhadas são regidas por sistemas de equações lineares em que as incógnitas são acréscimos de vazões ou de cargas piezométricas. Propõe-se um método numérico de resolução. Quando a ordem do sistema de equações é elevada, e não dispondo de computadores digitais de grande porte, sua resolução pode ser feita por meio de um analisador elétrico composto de resistências ohmicas.

1. EQUAÇÕES BÁSICAS

O escoamento de um líquido em uma rêde complexa (rêdes malhadas) compreendendo um certo número de condutos de características dadas (comprimento, diâmetro e rugosidade) é regido pelas seguintes condições:

Lei das Malhas: A soma algébrica das perdas de carga ao longo de um circuito (malha) deve ser nula. Designando por h_f a perda de carga em cada trêcho da malha, convencionada positiva no sentido da marcha dos ponteiros do relógio, a lei se exprime por:

$$\Sigma h_f = 0 \tag{1}$$

Lei dos Nós: Em cada nó da rêde a soma algébrica das vazões é nula. Designando por Q a vazão que se estabelece nas seções de um trêcho, convencionada positiva se concorre para o nó, a lei se exprime por:

$$\Sigma Q = 0 \tag{2}$$

Lei de Resistência: Em cada trêcho da rêde, a expressão que relaciona a perda de carga à vazão através dos elementos característicos do conduto e do fluído deve ser satisfeita. Esta expressão, para cada trêcho do circuito, pode ser escrita sob a forma:

$$h_f = K\ Q^n \tag{3}$$

em que K é um número que caracteriza o fluído e o conduto. As perdas de carga singulares são ou desprezíveis ou podem ser introduzidas nos comprimentos dos condutos ampliados pela adição dos comprimentos equivalentes.

Teòricamente, é sempre possível exprimir analìticamente as condições mencionadas acima por um sistema de equações cuja solução daria o resultado procurado. Entretanto, o caráter não linear das perdas de carga torna a solução extremamente laboriosa e complicada. O método que se propõe remove esta dificuldade linearizando o sistema de equações a uma forma tal que possibilita o emprêgo de um processo de cálculo analógico análogo ao que já existe permitindo a integração de equações diferenciais de derivadas do tipo elítico. Comparando com métodos conhecidos (ref. 2) a convergência pareceu-nos extremamente rápida.

(*) O presente trabalho é reprodução parcial de um trabalho do Autor apresentado em concurso de Livre-Docência na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: RÊDES DE DISTRIBUIÇÃO DE AGUA. CALCULO NUMÉRICO E ANALÓGICO. EPUSP. 1959.

2. FÓRMULAS LINEARES DE RESISTÊNCIA

Consideremos dois nós da rêde (1 e 2) comunicados entre si por um conduto de características (comprimento, diâmetro e rugosidade) dadas.

A perda de carga para uma vazão Q_o é $h_f = h_1 - h_2$ onde h_1 e h_2 são respectivamente as cargas piezométricas em 1 e 2. Para uma vazão Q da vizinhança de Q_o a nova perda de carga h_f será aproximadamente (*):

$$h_f \cong h_{fo} + \left(\frac{\partial h_f}{\partial Q}\right)_o \Delta Q.$$

Em virtude de (3):

$$\left(\frac{\partial h_f}{\partial Q}\right)_o = n \frac{h_{fo}}{Q_o}$$

donde

$$h_f = h_{fo} + n \frac{h_{fo}}{Q_o} \Delta Q \tag{4}$$

Esta fórmula substitui a (3) quando se quer calcular a perda de carga h_f a partir de um incremento ΔQ suficientemente pequeno da vazão Q_o.

A expressão simples também aproximada para o cálculo da vazão Q a partir de Q_o correspondente a um incremento Δh_f tem a fórma:

$$Q = Q_o + \left(\frac{\partial Q}{\partial h_f}\right) \Delta h_f$$

donde ,em virtude de (3):

$$Q = Q_o + \frac{1}{n} \frac{Q_o}{h_{fo}} \Delta h_f$$

ou

$$Q = Q_o + \frac{1}{n} \frac{Q_o}{h_{fo}} (\Delta h_1 - \Delta h_2) \tag{5}$$

se o escoamento é de 1 para 2.

3. BALANCEAMENTO DAS CARGAS PIEZOMÉTRICAS

Concebido o traçado da rêde em forma de malhas, o processo de balanceamento das cargas piezométricas consiste na obtenção da distribuição definitiva das cargas piezométricas nos diversos nós da rêde a partir de uma distribuição estabelecida inicialmente nesses nós de uma maneira mais ou menos arbitrária, orientando-se pelas cargas eventualmente conhecidas e pelas circunstâncias especiais de funcionamento provável da rêde. O estabelecimento de uma distribuição inicial das cargas piezométricas determina o sentido de escoamento em cada trêcho e os coeficientes de resistência. A lei das malhas fica naturalmente satisfeita. Para fazer intervir as demais leis teremos, atendendo à fig. 1:

$$- Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q_4 + Q_o = \Delta q_o \neq 0 \tag{6}$$

(*) Admitindo que o coeficiente de resistência K permanece sensívelmente invariável no intervalo $(Q_o, Q_o + \Delta Q)$.

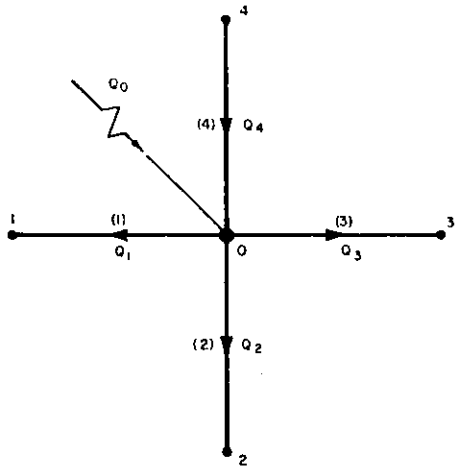


Fig. 1 — Esquema de um nó da rêde hidráulica

onde Q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) é a distribuição de vazões correspondente à distribuição adotada das cargas piezométricas, Q_o uma retirada (< 0) ou entrada (> 0) de vazão externa à rêde e Δq_o é o excesso (em geral diferente de zero, positivo ou negativo) de vazão no nó 0.

É preciso, agora, criar variações de cargas piezométricas nos nós da rêde de maneira que para a nova distribuição das cargas piezométricas se tenha

$$- Q'_1 - Q'_2 - Q'_3 + Q'_4 + Q_o = \Delta q'_o = 0 \tag{7}$$

À vista da eq. (5) vem:

$$- Q'_1 = - Q_1 - \frac{1}{n} \left| \frac{Q_1}{h_1 - h_o} \right| \left(\Delta h_o - \Delta h_1 \right)$$

$$- Q'_2 = - Q_2 - \frac{1}{n} \left| \frac{Q_2}{h_2 - h_o} \right| \left(\Delta h_o - \Delta h_2 \right)$$

$$- Q'_3 = - Q_3 - \frac{1}{n} \left| \frac{Q_3}{h_3 - h_o} \right| \left(\Delta h_o - \Delta h_3 \right)$$

$$+ Q'_4 = + Q_4 + \frac{1}{n} \left| \frac{Q_4}{h_4 - h_o} \right| \left(\Delta h_4 - \Delta h_o \right)$$

Levando estas expressões na eq. (7) e tendo em vista (6) vem:

$$\left| \frac{Q_1}{h_1 - h_o} \right| \Delta h_1 + \left| \frac{Q_2}{h_2 - h_o} \right| \Delta h_2 + \left| \frac{Q_3}{h_3 - h_o} \right| \Delta h_3 + \left| \frac{Q_4}{h_4 - h_o} \right| \Delta h_4 -$$

$$- \left[\left| \frac{Q_1}{h_1 - h_o} \right| + \left| \frac{Q_2}{h_2 - h_o} \right| + \left| \frac{Q_3}{h_3 - h_o} \right| + \left| \frac{Q_4}{h_4 - h_o} \right| \right] \Delta h_o + n . \Delta q_o = 0$$

ou de maneira geral

$$\Sigma \left| \frac{Q_{ik}}{hf_{ik}} \right| \Delta h_i - \Sigma \left| \frac{Q_{ik}}{hf_{ik}} \right| \Delta h_k + n \Delta q_k = 0 \tag{8}$$

onde **k** é o índice que designa o nó para o qual se escreveu a equação, **i** é o índice que designa todos os nós que possuem um trêcho comum com o nó **k** e o par

de índices **ik** designa êsse trêcho. Como fàcilmente se observa, para uma rêde malhada de nós, é possível escrever um sistema de **m** equações do tipo (8) a **m** incógnitas Δh. A solução dêsse sistema pode ser obtida por via numérica (Método da relaxação) ou analógica (método elétrico), como veremos. A solução por qualquer um dêsses processos fornece a nova distribuição das cargas piezométricas ($h'_k = h_k + \Delta h_k$) e portanto a das vazões com a qual (7) será satisfeita em todos os nós. Se em um ou mais nós houver excessos de vazão Δq_k julgados não desprezíveis, torna-se necessário refazer os cálculos com a nova distribuição h'_k em busca de uma outra distribuição de cargas piezométricas e vazões até se verificar convenientemente satisfeita a lei dos nós (eq. 2).

4. BALANCEAMENTO DAS VAZÕES

Êste processo consiste na obtenção da distribuição definitiva das vazões correspondentes aos diversos trechos da rêde a partir de uma distribuição estabelecida inicialmente nêsses nós de uma maneira mais ou menos arbitrária, porém satisfazendo a lei dos nós. O estabelecimento dessa distribuição inicial de vazões permite calcular em cada trecho da rêde a perda de carga e fazer intervir a lei das malhas. Atendendo à fig. (2), teremos:

$$- hf_1 - hf_2 + hf_3 + hf_4 = \Delta H_{fo} \neq 0 \qquad (9)$$

onde hf_i ($i = 1, 2, 3, 4$) é a distribuição das perdas de carga oriunda da adoção da distribuição das vazões e ΔH_{fo} é o excesso ou êrro de fechamento (nulo, positivo ou negativo) de perda ocorrida na malha de número zero.

Modifiquemos, agora, as vazões em cada trecho de um valor conveniente ΔQ de maneira que para a nova distribuição das perdas de carga, se tenha em cada malha da rêde:

$$- h'_{f1} - h'_{f2} + h'_{f3} + h'_{f4} = \Delta H'_{fo} = 0 \qquad (10)$$

Mas, em virtude de (4):

$$- h'_{f1} = - h_{f1} - \frac{nh_{f1}}{Q_1} \Delta Q_1$$

$$- h'_{f2} = - h_{f2} - \frac{nh_{f2}}{Q_2} \Delta Q_2$$

$$+ h'_{f3} = h_{f3} + \frac{nh_{f3}}{Q_3} \Delta Q_3$$

$$+ h'_{f4} = h_{f4} + \frac{nh_{f4}}{Q_4} \Delta Q_4$$

resulta de acôrdo com (9) e (10):

$$- \frac{h_{f1}}{Q_1} \Delta Q_1 - \frac{h_{f2}}{Q_2} \Delta Q_2 + \frac{h_{f3}}{Q_3} \Delta Q_3 + \frac{h_{f4}}{Q_4} \Delta Q_4 + \frac{\Delta H_{fo}}{n} = 0 \qquad (11)$$

A cada malha da rêde se fêz corresponder assim uma equação linear do tipo (11) em que as incógnitas são ΔQ_i. Serão tantas as equações quantas forem as malhas da rêde. Naturalmente, não coincide o número de incógnitas ΔQ_i com êsse número de equações. Para contornar esta dificuldade, pensou-se em associar a cada malha um resíduo de vazão Δq, dito positivo no sentido horário (fig. 2), tal que:

$$\Delta Q_1 = + \Delta q_1 - \Delta q_0$$

$$\Delta Q_2 = + \Delta q_2 - \Delta q_0$$

$$\Delta Q_3 = - \Delta q_3 + \Delta q_0$$

$$\Delta Q_4 = - \Delta q_4 + \Delta q_0$$

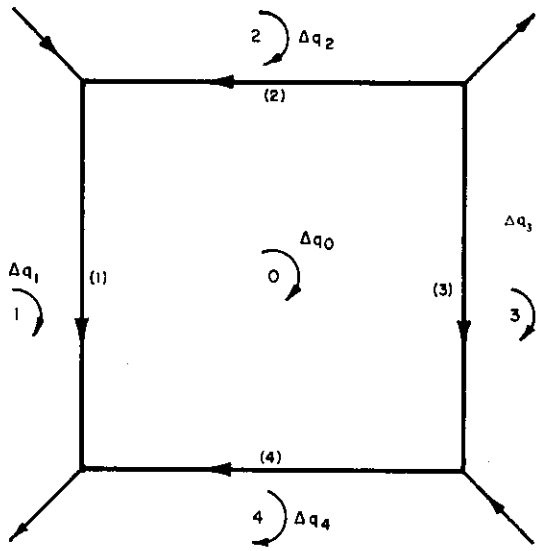


Fig. 2 — Esquema de uma malha da rêde hidráulica

$$\left| \frac{h_{f1}}{Q_1} \right| \Delta q_1 + \left| \frac{h_{f2}}{Q_2} \right| \Delta q_2 + \left| \frac{h_{f3}}{Q_3} \right| \Delta q_3 + \left| \frac{h_{f4}}{Q_4} \right| \Delta q_4 -$$

$$- \left[\left| \frac{h_{f1}}{Q_1} \right| + \left| \frac{h_{f2}}{Q_2} \right| + \left| \frac{h_{f3}}{Q_3} \right| + \left| \frac{h_{f4}}{Q_4} \right| \right] \Delta q_0 \; |$$

$$- \frac{\Delta H_{fo}}{n} = 0$$

ou de uma maneira geral

$$\Sigma \left| \frac{h_{fik}}{Q_{ik}} \right| \Delta q_i - \left[\Sigma \left| \frac{h_{fik}}{Q_{ik}} \right| \right] \Delta q_k - \frac{\Delta H_{fk}}{n} = 0 \qquad (12)$$

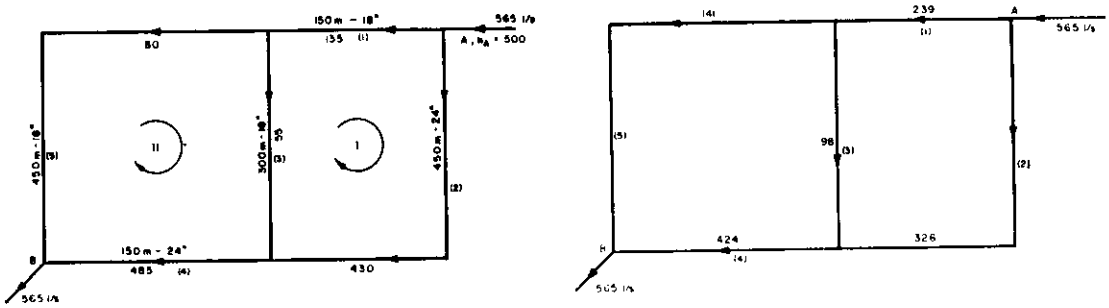
onde **k** é um índice associado à malha para a qual se escreveu a equação do tipo (12), **i**, é o índice associado a tôdas as malhas que possuem um trecho comum com a malha **k** e o par de índices **ik** designa êsse trecho comum. Como se vê, a cada malha se faz corresponder uma equação linear em que as incógnitas são os resíduos de vazão das malhas, tal como foram definidos. O problema pode agora admitir solução única pois o sistema é de **m** equações do tipo (12) a **m** incógnitas, **m** designando o número de malhas da rêde.

Convém observar que o sistema de equações aqui obtido é formalmente análogo àquele estabelecido para o balanceamento das cargas piezométricas (8). A resolução de um e de outro, seja por via numérica ou analógica, acarreta como consequência o mesmo algarítmo de cálculo.

Obtida a nova distribuição de vazões Q'_k ($Q'_k = Q_k + \Delta Q_k$) e, portanto, das perdas de carga h'_f, esta solução será a definitiva se o êrro de fechamento em cada malha dado por (10) fôr desprezível. Se em uma ou mais malhas o êrro não fôr satisfatório, torna-se necessário prosseguir no processo em busca de outras distribuições de vazões e de perdas de carga até tornar plenamente satisfeita a lei das malhas (eq. 1).

6. EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Seja a rêde da fig. 3. Nela estão registrados o diâmetro e o comprimento de cada trêcho, bem como as vazões de entrada e saída, a carga h_A e a distribuição inicial das vazões. Adotemos, como fórmula de resistência, a de Hazen-Williams



a) Distribuição inicial das vazões **Fig. 3** **b) Distribuição definitiva das vazões**

(n = 1,85). O coeficiente de resistência desta fórmula é função sòmente dos elementos característicos do conduto (comprimento, diâmetro e rugosidade). Como h_B não é dado. o número de malhas é menor que o número de nós, haverá menor número de equações no primeiro caso que no segundo, sendo então recomendável o balanceamento das vazões. O quadro abaixo contém os dados necessários a êste tipo de balanceamento, extraídos de um nomograma da fórmula de Hazen-Williams com C = 100.

Trecho	$L_{(m)}$	$D_{(\text{"})}$	Q (l/s)	hf/L (10^{-3}m/m)	hf (m)	hf/Q_2 (s/m)	Q' (l/s)	Q' (l/s)	h'f/L (10^{-3}m/m)	hf' (m)
1	150	18	135	2,50	0,38	2,78	104	239	7,5	1,13
2	450	24	430	5,00	2,25	5,23	−104	326	3,0	1,35
3	300	18	55	0,47	0,14	2,56	43	98	1,4	0,42
4	150	24	485	6,00	0,90	1,86	−61	424	5,5	0,83
5	450	18	80	0,95	0,43	5,35	61	141	2,6	1,17

$$\Delta H_{fI} = -hf_1 + h_{f2} - h_{f3} = 1{,}73, \quad \frac{\Delta H_{fI}}{n} = \frac{1{,}73}{1{,}85} = 0{,}94.$$

$$\left(\Sigma \frac{h_f}{Q}\right)_I = 10{,}57$$

$$\Delta H_{fII} = h_{f3} + h_{f4} - h_{f5} = 0{,}61, \quad \frac{\Delta H_{fII}}{n} = \frac{0{,}61}{1{,}85} = 0{,}33$$

$$\left(\Sigma \frac{h_f}{Q}\right)_{II} = 9{,}77$$

Em virtude dêstes elementos, o sistema (12) regendo ambas as malhas, assume a forma:

malha n.º I : $2{,}56\ \Delta q_{II} - 10{,}57\ \Delta q_I - 0{,}94 = 0$

malha n.º II: $2{,}56\ \Delta q_I - 9{,}77\ \Delta q_{II} - 0{,}33 = 0$

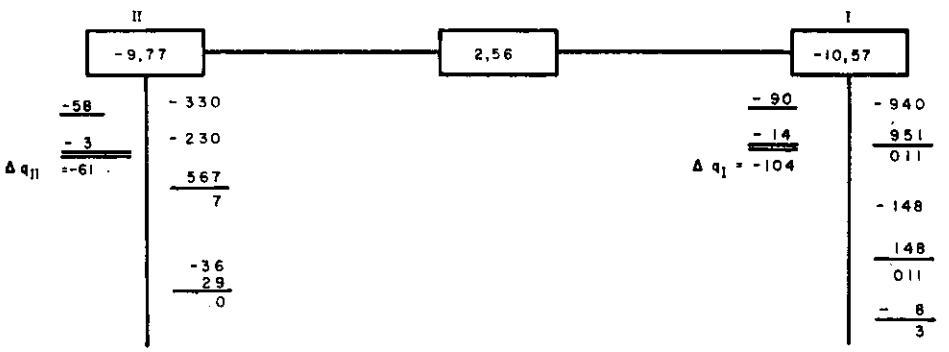
Sua resolução daria os elementos necessários ao cálculo da provável distribuição definitiva das vazões. Entretanto, quando num problema concreto, o número de equações é elevado, a resolução do sistema pelos métodos clássicos torna-se extremamente laboriosa e enfadonha. Passemos, então a ilustrar a técnica de resolução inspirada no método da relaxação tomando por base o presente exemplo, porém prescindindo da correspondente justificativa matemática. Chamamos de resíduos relativos às malhas n.ºs I e II, os números:

$$R_I = 2{,}56\ \Delta q_{II} - 10{,}57\ \Delta q_I - 940$$
$$R_{II} = 2{,}56\ \Delta q_I - 9{,}77\ \Delta q_{II} - 330$$

e de resíduos iniciais os valores de R_I e R_{II} para $\triangle q_I = \triangle q_{II} = 0$. Os resíduos iniciais foram multiplicados por 10^3 para que $\triangle q_I$ e $\triangle q_{II}$ resultem em litros/seg.

Ao relaxar a malha n.º I por um acréscimo $\delta(\triangle q_I) = +1$, permanecendo inalterável o $\triangle q_{II}$ da outra malha $[\delta(\triangle q_I) = 0]$, vemos que o resíduo na malha n.º I se acresce de $\triangle R_I = -10{,}57$, e o da outra malha se acresce de $\triangle R_{II} = 2{,}56$.

Relaxando a malha n.º II por um acréscimo $\delta(\triangle q_{II}) = +1$, seu resíduo se acresce de $\delta R_{II} = -9{,}77$ e o da outra malha se acresce de $\delta R_I = 2{,}56$. Consideremos, agora, em uma dada fase do processo, a malha que apresenta maior resíduo relativo em módulo (a malha n.º I, p. ex.). Ao relaxar esta malha por um acréscimo $\delta(\triangle q_I) \neq 1$ seu resíduo acresce de $-10{,}57\ \delta(\triangle q_I)$. Escolhendo $\delta(\triangle q_I)$ de maneira a anular o resíduo então existente, o que pode ser feito impondo a relação $-10{,}57\ \delta(\triangle q_I) + R_I \cong 0$, seja $\delta(\triangle q_I) \cong + R_o/10{,}57$, o resíduo da outra malha se acrescerá de $2{,}56\ \delta(\triangle q_I)$. Idêntico raciocínio se aplica quando a malha n.º I apresenta, numa dada fase do processo, o maior resíduo relativo em módulo. É nisto que consiste a relaxação individual*. O esquema seguinte é uma das sugestões para desenvolver os cálculos de uma maneira concisa.



À esquerda da linha traçada para cada malha colocam-se os acréscimos $\delta(\triangle q)$ e à direita os resíduos finais e os transferidos das malhas adjacentes. Os números -940 e -330 são os resqduos iniciais das malhas I e II respectivamente. Na prima fase do processo a malha I apresenta maior resíduo inicial relativo. Relaxando-a por $\delta(\triangle q_I) = -90$ seu resíduo se acresce de $+951$, resultando um resíduo 11 e o resíduo da outra se acresce de $-90 \times 2{,}56 = -230$. Na segunda fase do processo, a malha II apresenta o resíduo $-330 - 230 = -560$ o qual pode ser reduzido pelo acréscimo $\delta(\triangle q_{II}) = -58$, com o que, o resíduo da outra malha, se acresce de $-2{,}56 \times 58 \cong -148$. E assim por diante, a relaxação continua até tornar os resíduos pràticamente desprezíveis, em ambas as malhas. Nestas condições, os acréscimos resultantes são: (em litros/seg):

$$\triangle q_I = -104, \quad \triangle q_{II} = -61$$

donde as correções: (litros/seg):

$$\triangle Q_1 = +104, \ \triangle Q_2 = -104, \ \triangle Q_3 = -61 - (-104) = 43$$

$$\triangle Q_4 = -61, \ \triangle Q_5 = +61$$

e portanto, a nova distribuição de vazões (em litros/seg):

$$Q'_1 = 135 + 104 = 239 \qquad Q'_3 = 55 + 43 = 98$$

$$Q'_2 = 430 - 104 = 326 \qquad Q'_4 = 485 - 61 = 424$$

$$Q'_5 = 80 + 61 = 141$$

(*) Não fazemos referência à relaxação por grupo para não alongar demasiadamente o presente trabalho.

resultando pela fórmula de resistência adotada (Hazen-Williams, C = 100) as perdas de carga correspondentes (em metros):

$$h'_{f1} = 1{,}13,\ h'_{f2} = 1{,}35,\ h'_{f3} = 0{,}42,\ h'_{f4} = 0{,}83,\ h'_{f5} = 1{,}17$$

os quais permitem decidir a aceitabilidade da nova distribuição de vazões verificando a ordem de grandeza dos excessos de carga (ou êrro de fechamento) correspondente às malhas.

$$\Delta H'_{fI} = -h'_{f1} + h'_{f2} - h'_{f3} = -0{,}3$$

$$\Delta H'_{fII} = h'_{f3} + h'_{f4} - h'_{f5} = 0{,}08$$

Se aceitáveis, o problema está resolvido. Se não, refaz-se o cálculo do modo que foi exposto partindo da distribuição de vazões encontrada na etapa anterior ou ainda de conformidade ao n.º 10. Convém observar que no presente exemplo os êrros de fechamento são realmente pequenos, podendo ser desprezados. É importante notar que cada elemento da distribuição inicial difere do elemento correspondente da nova distribuição em média cêrca de 40%. Para êste afastamento, uma única etapa foi suficiente para resolver o problema proposto. Acrescenta-se ainda, que a marcha de cálculo, no caso de um balanceamento das cargas piezométricas, é absolutamente semelhante ao que acima foi indicado.

7. EMPRÊGO DA FÓRMULA UNIVERSAL DE RESISTÊNCIA.

Esta fórmula é do tipo

$$h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \text{ com } f = f\,(R,\ D/K)$$

onde V é a velocidade média na seção (quociente da vazão Q pela área S), R é o número de Reynolds, K é a rugosidade uniforme equivalente do material de que é feito o conduto e f é o coeficiente de perda de carga distribuída (ou contínua). Como a preferência pela fórmula universal vem se acentuando no meio técnico, cremos ser útil mostrar a sua viabilidade no cálculo de rêdes de distribuição de água tendo em vista o método proposto. Recordemos que a obtenção de f é facilitada por meio de diagramas e entre êstes indicamos o diagrama de Rouse, variante do diagrama de Moody, já amplamente divulgado pela literatura técnica. No caso do balanceamento de vazões, os dados pertinentes a cada conduto são: a vazão Q, o diâmetro D, o comprimento L, a viscosidade cinemática ν à temperatura em que o líquido estaria escoando e a rugosidade relativa D/K. A incógnita é hf. A vazão Q e o diâmetro D fornecem a velocidade $V = 4Q/\pi D^2$, donde o par de valores ($R = VD/\nu$, D/K) que dão o valor de f (cf. diagrama de Moody-Rouse) e êste permite calcular o valor de hf (cf. fórmula universal) e consequentemente o valor de h_f/Q. Ressalta-se que para a verificação do êrro de fechamento (cf. menção feita no n.º anterior) os valores de f e portanto de h_f devem corresponder à nova distribuição de vazões. No caso do balanceamento das cargas piezométricas os dados correspondentes a cada conduto são h_f, L, D, ν, D/K. A incógnita é Q. Nêste caso calculamos

$$R\sqrt{f} = \frac{VD}{\nu}\sqrt{\frac{2gD\,h_f}{L\,V^2}} = \frac{D}{\nu}\sqrt{\frac{2g\,D\,h_f}{L}}$$

número independente de V e portanto de Q. Isto feito, com o par de valôres ($R\sqrt{f}$, D/K) o diagrama de Moody-Rouse fornece: ou $R = \frac{VD}{\nu}$ (donde o valor de $V = \frac{\nu R}{D}$) ou f (donde o valor de V que resulta da fórmula universal). Obtido V resulta $Q = V\frac{\pi D^2}{4}$ donde o valor Q/h_f, necessário ao balanceamento. Tal como no caso anterior, ressalva-se que o êrro de fechamento em cada nó deve ser calculado com a distribuição de vazões correspondente à nova distribuição das cargas piezométricas.

8. MÉTODO DAS ANALOGIAS ELÉTRICAS.

Acabamos de ver que o método proposto se resume no estabelecimento de um sistema de equações lineares. Quando o número de nós ou malhas é grande, haverá igual número de equações cuja resolução mesmo com a técnica indicada pode se tornar excessivamente laboriosa. Modernamente, vem se generalizando o uso de máquinas matemáticas eletrônicas para cálculos numéricos de grande vulto. Como estas máquinas nem sempre estão ao alcance fácil do calculista, cremos ser oportuno trazer ao conhecimento do leitor os fundamentos de um analisador elétrico capaz de efetuar automàticamente o processo da relaxação atrás descrito. O analisador é particularmente simples porque se compõe de resistências ohmicas e a alimentação pode se fazer por corrente alternada ou contínua. A fig. 4 representa um elemento do analisador onde V_j representam os potenciais elétricos nos nós, C_j as condutâncias e i_j as correntes com seus sentidos fixados arbitràriamente. A condutância C_o está conectada a um potencial U_o, prèviamente fixado. Em virtude das leis de Kirchoff podemos estabelecer a seguinte relação:

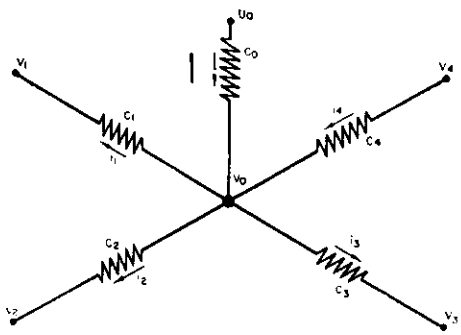


Fig. 4 — Elemento de um analisador elétrico

$$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 + C_4V_4 - (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\ V_o + C_o\ (U_o - V_o) = 0$$

Na eventualidade de se realizar em todos os nós da rêde a relação $V_o << U_o$, a equação acima assume a forma aproximada:

$$C_1V_1 + C_2V_2 + C_3V_3 + C_4V_4 - (C_1 + C_2 + C_3 + C_4)\ V_o + C_o\ U_o = 0$$

A expressão geral para qualquer nó K da rêde elétrica ligado aos nós vizinhos i por condutores C_{ik} e ao nó externo pela condutância C_K é portanto da forma

$$\Sigma\ C_{ik}\ V_i - \Sigma\ C_{ik}\ V_k + C_kU_k = 0 \qquad (13)$$

que é uma equação do tipo (8) ou (12). Imaginemos, agora, uma rêde hidráulica devendo ser estudada pelo método do balanceamento das vazões. O sistema de equações que a rege é da forma:

$$\Sigma \left| \frac{h_{fik}}{Q_{ik}} \right| \Delta q_i - \Sigma \left| \frac{h_{fik}}{Q_{ik}} \right| \Delta q_k - \frac{\Delta H_{fk}}{n} = 0 \qquad (14)$$

Sejam α e β, constantes positivas arbitrárias, tais que:

$$\Delta q_k = \alpha\ V_k$$

$$\frac{h_{fik}}{Q_{ik}} = \beta\ C_{ik}$$

A Eq. (12) assume a forma

$$\alpha\ \beta\ [\Sigma\ C_{ik}\ V_i - (\Sigma\ C_{ik})\ V_k] - \frac{\Delta H_{fk}}{n} = 0$$

que sublinha uma analogia entre V e Δq, bastando tomar para as resistências $R_k = 1/C_k$ valores tais que

$$\alpha \beta C_k U_k + \frac{\Delta H_{fk}}{n} = 0 \text{ ou } R_k = \alpha \beta \frac{U}{\Delta H_{f/n}}$$

Cada nó da rêde elétrica é imagem de cada malha da rêde hidráulica, o conduto da rêde hidráulica comum a duas malhas adjacentes virá representado na rêde elétrica por uma resistência conectando os dois nós representativos das malhas.

Do mesmo modo se prova a analogia entre a variação Δh e V no balanceamento das cargas piezométricas, havendo nêste caso correspondências entre os nós de ambas as rêdes e também entre os condutos e as resistências elétricas conectando os nós homólogos.

9. EXEMPLO ILUSTRATIVO

Um modo prático de executar o analisador e com êle operar para a consecução automática do balanceamento das vazões será fixar as resistências de alimentação R_k suficientemente grandes em relação às resistências de distribuição r_{ik}. Assumindo valores convenientes para β e $\gamma = \alpha \beta$, calculam-se as resistências de distribuição e de alimentação por:

$$r_{ik} = \beta \frac{Q_{ik}}{h_{fik}}$$

$$R_k = -\gamma \frac{U}{\Delta H_{f/n}}$$

com o que se deduz $\alpha = \gamma/\beta$. O potencial U será fixado algèbricamente para cada nó na forma descrita logo em seguida.

A leitura dos potenciais nos nós dará pela relação $\Delta q = \alpha V$ os valores procurados Δq_k das malhas imagens.

Ilustremos isto com o exemplo desenvolvido no n.º 6. A fig. 5 mostra em linha pontilhada a rêde hidráulica e em linha cheia a sua imagem, a rêde elétrica.

O equipamento compreende uma fonte de corrente contínua (bateria de acumuladores, total 6 volts), um potenciômetro de medida P, um galvanômetro, uma sonda e um potenciômetro não graduado p. O potenciômetro P tem um comutador que permite ligá-lo ao polo positivo ou negativo da fonte, achando-se em série com êsse potenciômetro uma resistência não graduada de igual valor (no caso igual a 10.000 ohms). Esta fica ligada sempre ao polo oposto daquêle do potenciômetro. Entre a resistência e o potenciômetro fica estabelecido o zero de referência. A fixação dêste zero na rêde elétrica, é feita por meio do potenciômetro p segundo o método da ponte de Wheatston. A alimentação geral

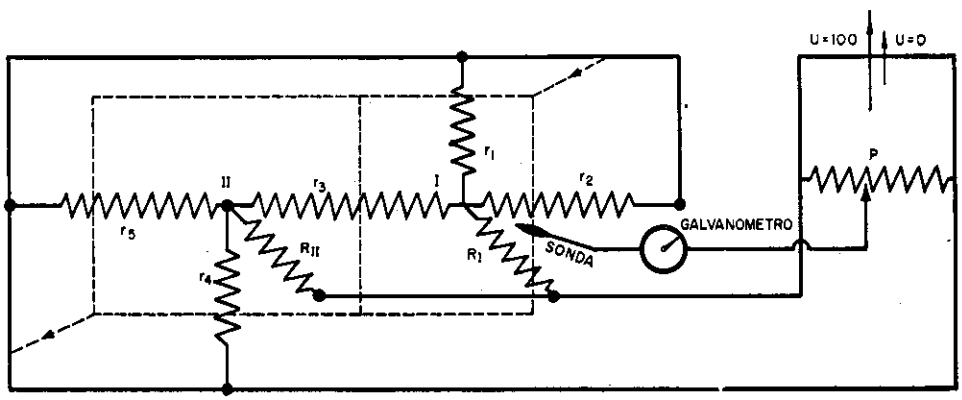


Fig. 5 — Esquema da Rêde Elétrica superposta à Rêde Hidráulica

dá uma diferença de potencial que podemos chamar arbitràriamente 0-100 quando é possível prescindir do sinal algébrico de ΔH_f ou então $-$ 100 e $+$ 100 quando ΔH_f pode ser positivo e negativo. No primeiro caso, fazemos U = 100 e no segundo caso U = $-$ $-$ 100 (menos no nó em que $\Delta H_f > 0$ e mais no caso contrário). A detecção do potencial V num nó se faz colocando a sonda no referido nó e manobra-se o cursor de P até anular a corrente no galvanômetro. O potencial registrado em P é o potencial V procurado.

O quadro abaixo resume os valores envolvidos no problema para a execução do analizador e obtenção dos resultados finais:

CONDUTO N.º	$h_{f(m)}$	$Q(m^3/s)$	Q/h_f (m^2/s)	β	r
1	0,38	0,135	0,355	2000	710
2	2,25	0,430	0,191	2000	382
3	0,14	0,055	0,393	2000	786
4	0,90	0,485	0,539	2000	1078
5	0,43	0,080	0,182	2000	364

MALHA N.º	γ	U(%)	$\Delta H_{f/n}$	$R_{(ohms)}$	α	V(%)	Δq
I	33000	100	940	3510	16,5	6,1	100,7
II	33000	100	330	10000	16.5	3,5	57,8

Os valores Δq foram obtidos para uma relação $\left(\frac{\bar{R}}{\bar{r}}\right) = (3510/1078) = 3{,}25$, em que $\bar{R}$ é a menor das R_k e $\bar{r}$ é a maior das r_{ik}. Notemos que a precisão melhora para uma relação $\left(\frac{\bar{R}}{\bar{r}}\right)$ maior, que se obtém adotando valor maior para γ, donde um valor maior para α, com o que o analizador fornecerá valores menores de V. Está claro que uma redução sensível de V pode acarretar problemas na precisão da leitura na ponte P. Quando isso acontece, sugerimos colocar em série (de um lado e de outro dos bornos da ponte P) resistências de boa precisão no valor de 90.000 ohms. Esta inserção melhora a sensibilidade do equipamento de medida.

10. ESTABELECIMENTO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LEVANDO EM CONTA A DERIVADA SEGUNDA

Vimos que ao haver necessidade de mais de uma iteração e tratando-se, p. ex., de balancear as vazões, em cada iteração se envolveria o cálculo das quantidades hf, hf/Q, $\Sigma \frac{hf}{Q}$ e $\Delta Hf/n$ para cada malha, com o que se passaria à resolução do sistema de equações por qualquer dos processos indicados. Ao em vez disto, talvez seja preferível operar do seguinte modo. A fórmula (4), quando se desprezam na série hf(Q) o quarto têrmo em diante, se transforma em

$$h_f = h_{fo} + n \frac{h_{fo}}{Q_o} \Delta Q + \frac{n(n-1)}{2} \frac{hf}{Q^2_o} \overline{\Delta Q}^2$$

$$= hf_o + n \left[1 + \frac{(n-1)}{2} \frac{\Delta Q}{Q} \right] \frac{h_{fo}}{Q_o} \Delta Q$$

e procedendo como no n.º 4, verifica-se que resulta um sistema de equações idêntica ao (12), comparecendo coeficientes da forma $[1 + (n - 1/2)\ \Delta Q/Q]\ hf/Q$ em substituição àqueles hf/Q, a saber:

$$\Sigma \left[1 + \frac{(n-1)}{2} \frac{Q_{ik}}{Q_{ik}^{(o)}} \right] \frac{hf_{ik}^{(o)}}{Q_{ik}^{(o)}} \Delta q_i - \left\{ \Sigma \left[1 + \frac{(n-1)}{2} \frac{Q_{ik}}{Q_{ik}^{(o)}} \right] \frac{hf_{ik}^{(o)}}{Q_{ik}^{(o)}} \right\} \Delta q_k - \frac{\Delta H_{ik}^{(o)}}{n} = 0$$

onde os índices conservam o significado mencionado no n.º 4, $hf_{ik}^{(o)}$ e $\Delta H_{ik}^{(o)}$ são os resultantes da distribuição inicial $Q_{ik}^{(o)}$ (a figurar em tôdas as etapas iterativas) e Δq é o resíduo de vazão correspondente à etapa seguinte em que foram obtidos os ΔQ_{ik}. Nestas condições, a solução satisfatória será aquela em que os $\Delta Q'_{ik}$ obtidos numa determinada etapa forem suficientemente próximos dos obtidos na etapa anterior ΔQ_{ik}.

O exposto neste número permite, por aproximações sucessivas, chegar ao resultado final empregando sempre os mesmos coeficientes hf/Q deduzidos para a primeira e arbitrária repartição das vazões. Por experiência própria temos constatado que duas iterações consecutivas são suficientes para atingir-se a igualdade dos ΔQ a menos de 1%. O mesmo raciocínio aqui seguido conduz, para o caso do balanceamento das cargas piezométricas, a um sistema de equações idêntico ao (8), bastando substituir ali os coeficientes Q/hf por

$$[1 + 1/2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) \Delta hf/hf]\ Q/hf.$$

11. CONCLUSÃO

Foi possível abordar o problema do cálculo de verificação da estrutura hidráulica das rêdes de distribuição de água, com tôda generalidade, graças aos sistemas de equações lineares (8) e (12) estabelecidas com as principais grandezas — a vazão Q e a carga piezométrica h — sob a forma de diferenças finitas. Ambas as vias de cálculo, numérica e analógica, tal como foram apresentadas, dispensam escrever os sistemas de equações (8) e (12) para a análise das rêdes. Na forma, êstes sistemas são idênticos, vantagem que se traduz como foi visto num único algarítmo de cálculo por via numérica e num único circuito analisador por via analógica. As operações que aí intervém são bastante simples e podem ser elaboradas por pessôas de nível técnico médio.

BIBLIOGRAFIA

1. ASSY, T. M. — Rêdes de distribuição de água. Cálculo Numérico e Analógico. Tese (EPUSP). 1959.
2. CROSS, H. — Analysis of flowin networks of conduits or conductors. University of Illinois, Bull. 286 — Nov. 1936.

   Mc ILROY, M. S. — Pipeline Network Flow Analysis Using Ordinary Algebra — J.A.W.W.A. — Maio 1949.