O Regímen de Crescimento Aritmético das Populações em Face da Logística

J. C. DIAS DE MORAES
Engenheiro Químico e Sanitarista
Departamento de Águas e Esgotos de São Paulo

1 — GENERALIDADES

1.1 — *Introdução:* durante o estudo de um grande número de crescimentos populacionais humanos, observa-se que, dentro de certos intervalos de tempo, estes crescimentos populacionais seguem aproximadamente determinadas leis. Por este motivo, muitos autores, a começar por Malthus, conseguiram obter equações empíricas, que satisfazem, com razoável aproximação, o crescimento populacional observado dentro daquêles intervalos de tempo.

Ora, estas equações empíricas têm uma validade limitada aos intervalos de tempo observados, e qualquer extrapolação superior nem sempre pode corresponder ao futuro crescimento real a ser observado.

O intervalo de tempo em que o crescimento obedece à uma determinada lei empírica, corresponde à um estágio de crescimento, e a êsse estágio chamamos de regímen de crescimento. Êsses regimens de crescimento são casos particulares do crescimento logístico, dentro de certas restrições.

Observadores menos avisados, costumam, em seus estudos de crescimento populacional, tais como para projetos de sistemas de águas e esgotos, simplificar o desenvolvimento dos trabalhos de estimativa de população, adotando alguma das citadas leis de crescimento, conforme as conveniências ou opiniões de leigos no assunto, muitas vêzes, interessados em atribuir um excelente crescimento da população de sua cidade, e depois extrapolar para períodos de tempo muito longos, dentro dos quais é muito possível o crescimento populacional já ter mudado de regímen. Supondo que o crescimento logístico seja geralmente seguido para os crescimentos populacionais humanos, verifica-se que o observador poderá errar ora para mais, ora para menos, dependendo do estado logístico daquela população no estágio considerado, e da extrapolação feita. No primeiro caso as gerações presentes pagarão pelo maior custo da obra, e as futuras gozarão de um benefício que não pagaram. No segundo caso a obra terá que ser ampliada logo após a sua inauguração. No primeiro caso observa-se ainda uma ampla injustiça para com as gerações presentes, com ganho ilícito das gerações porvindouras, e no segundo caso a obra tornar-se-ía uma obra de Sta. Engrácia, como diria o povo na sua linguagem simples e significativa. Ainda neste caso, como veremos em trabalho posterior, a obra ficaria por um custo exorbitante, e com a possibilidade de ser abandonada em pouco tempo, para ser substituída por outra de muito maior capacidade.

E' bem verdade que, ajustar uma obra para ser paga sòmente por uma geração é algo bem difícil de ser obtido na prática. Contudo, um recuo ou um avanço exagerados sôbre o tempo de saturação das obras públicas, é um abuso que só pode ser superado por meio de um estudo sério e cuidadoso da estimativa de crescimento populacional, coisa que nem sempre se faz, ou então por um mero acaso da sorte, sistema êste desconhecido na Engenharia.

Mas, apesar de tôda a sabedoria, engenho e perspicácia de um projetista sagaz, ainda existem os acidentes imprevistos e imprevisíveis no crescimento das populações,

---

Trabalho a ser apresentado ao VI Congresso Interamericano de Engenharia Sanitária a se realizar em Porto Rico, em maio de 1.958.

Caixa Postal 6.683 — S. Paulo — Brasil

pelo fato das mesmas não serem, na maioria dos casos, populações fechadas, e cujos acidentes são fatores verdadeiramente incontroláveis na época em que foi feita a estimativa. Êstes fatores devem servir como aviso e freio aos simplistas e generalizadores impenitentes das equações de crescimento das populações.

Os rgímens de crescimento populacional ainda são uma arma razoàvelmente segura para os que os sabem utilizar com prudência e sabedoria.

1.2 — *Regímen Normal de Crescimento:* dizemos que um agrupamento humano tem regímen normal de crescimento quando êle satisfaz, no decurso de todo o seu crescimento, a equação logística clássica ou de Verhulst. E' um regimen puramente ideal, como já temos dito; podendo, contudo, existir estatìsticamente, e principalmente nas populações fechadas.

O regímen normal de crescimento das populações é difícil de ser obedecido, rigorosamente, no decorrer da história do crescimento de uma população, pelo fato de que sempre aparecem acidentes retardadores ou aceleradores do seu crescimento. Êstes acidentes podem ser de diferentes ordens, tais como econômicos, religiosos inclusive, políticos, sociais, sanitários, técnicos, etc.

Qualquer grupo humano está sempre sujeito à inter-ações sociais, econômicas, culturais, etc., com os outros que lhe são adjacentes, e conforme a intensidade destas inter-ações, a evolução do crescimento do grupo em estudo pode ser eventual ou definitivamente afetada, trazendo uma deformação permanente na curva de crescimnto.

1.3 — *Regímens de Crescimento:* o regímen normal de crescimento pode ser dividido em vários estágios, para os quais valem aproximadamente as equações empíricas encontradas por vários autores.

Não vamos discutir o mérito ou a validade dêstes regímens parciais de crescimento *quanto à sua aplicabilidade nos casos práticos, mas tão sòmente as suas relações com a* logística.

Êstes regímens parciais de crescimento são geralmente classificados nos seguintes:

a — regímen aritmético;

b — regímen geométrico ou de Malthus, simples e composto;

c — regímen de Wappaus;

d — regímen dos acréscimos finitos.

Além dêstes quatro regímens clássicos, ainda existem outros, tais como os do Prof. Aúthos Pagano (ref. 1), etc..

No presente trabalho estudaremos sòmente o aritmético. Os outros, possìvelmente, serão estudados mais tarde por nós.

1.4 — *Existência dos Diferentes Regímens de Crescimento:* a existência dos diferentes regímens de crescimento das populações é perfeitamente explicável pela curva do crescimento logístico.

Esta curva apresenta uma forma com trechos pràticamente retilíneos, com um trecho de curvatura positiva e outro com curvatura negativa e ainda um ponto de inflexão. Cada um dêstes trechos pode definir um regímen de crescimento, dentro de uma certa margem de êrro.

O regímen aritmético poderia ser estudado em três trechos diferentes da curva logística: as duas assíntotas e em tôrno do ponto de inflexão. O estágio mais interessante é aquêle que está em tôrno do ponto de inflexão, e é o que será estudado por nós neste trabalho.

2 — CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS

2.1 — *Comparação Entre os Dois Regímens:* o regímen aritmético de crescimento po*pulacional é um regímen simplesmente linear. Por êste motivo êle não pode ser extrapolado* indefinidamente, pois tal regímen não prevê nenhuma forma de saturação finita, e a saturação finita, sob qualquer aspeto que se apresente, é um fenômeno que realmente existe na natureza, como decorrência da própria limitação material do mundo cósmico em que vivemos.

O regímen aritmético, entre outras formas, pode ser representado matemàticamente por uma expressão linear do seguinte tipo:

$$P_a = P_{a0} + \alpha t \tag{1}$$

sendo P_{a0} a população inicial, α o coeficiente angular da reta de crescimento, e "t" o tempo na unidade logística. A variável tempo, entretanto, pode ser dada pela unidade logística dos tempos, como acima, ou pelas datas do calendário, indiferentemente. No caso de mudança de variável teríamos (ref. 2):

$$t = \frac{T - T_0}{i} \tag{1a}$$

que substituída na (1) fornece:

$$P_a = P_{a0} + \frac{\alpha}{i} (T - T_0) \tag{1b}$$

e teremos:

$$\boxed{\alpha' = \frac{\alpha}{i}} \tag{1c}$$

sendo α' o coeficiente angular correspondente à variável "T".

Dêste modo teremos:

$$P_a = P_{a0} + \alpha' (T - T_0) \tag{1d}$$

No caso do tempo "t" tender para o infinito teremos:

$$\lim_{t \to \infty} P_a = \infty \tag{2}$$

o que mostra não haver saturação finita neste regímen. Ora, a duração do regímen aritmético de crescimento é materialmente limitada, e a partir dêste limite êle já não funciona dentro da observação prática.

Como não há um único trecho da curva logística que seja realmente retilíneo, conclui-se que a coincidência entre os dois regímens dá-se sòmente num único ponto. Neste caso, a pesquisa dêste ponto torna-se muito mais fácil usando-se o método diferencial. Assim a equação diferencial do regímen aritmético é dada por:

$$\frac{d P_a}{dt} = \alpha = \text{constante} \tag{3}$$

Por outro lado, a equação logística sob a forma normal (ref. 3) é dada por:

$$P = \frac{P_s}{1 + e^{-2\varphi}} = N P_s \tag{4}$$

como

$$\varphi = f(t) \tag{5}$$

a equação diferencial da (4) é:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{2 P_s e^{-2\varphi}}{(1 + e^{-2\varphi})^2} \times \frac{d\varphi}{dt} \tag{6}$$

mas (ref. 4):

$$\varphi = \frac{bt - a}{2} \tag{7}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{b}{2} \tag{8}$$

a qual substituida em (6) dá:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{b\,P_s\,e^{-2\varphi}}{(1 + e^{-2\varphi})^2} \tag{9}$$

que igualada a (3) fornece:

$$\alpha = \frac{b\,P_s\,e^{-2\varphi}}{(1 + e^{-2\varphi})^2} \tag{10}$$

Ora, a equação normal logística (ref. 5) é dada por:

$$N = \frac{1}{1 + e^{-2\varphi}} \tag{11}$$

que substituida em (10) fornece:

$$\boxed{\alpha = b\,P_s\,N^2\,e^{-2\varphi}} \tag{12}$$

No regímen aritmético α é constante. Como "b" e P_s são constantes, o regímen aritmético dentro da logística fica definido para:

$$N\,e^{-2\varphi} = \text{constante} \tag{13}$$

A condição de constância de α é dada pelo valor nulo de sua derivada primeira:

$$\frac{\alpha\varphi}{d\alpha} = \frac{2\,b\,P_s\,e^{-2\varphi}}{(1 + e^{-2\varphi})^3} \times (e^{-2\varphi} - 1) = 0 \tag{14}$$

cuja condição é satisfeita para:

$$e^{-2\varphi} - 1 = 0 \tag{13}$$

advindo:

$$e^{-2\varphi} = 1 \tag{16}$$

e, finalmente:

$$\boxed{\varphi = 0} \tag{17}$$

Então, dentro da logística, o regímen é aritmético sòmente no ponto de inflexão. Antes e depois dêste ponto, o regímen não é teòricamente aritmético.

Para $\varphi = 0$ virá:

$$N = N_i = 0{,}5 \tag{18}$$

Levando as duas condições (17) e (18) à (12) vem:

$$\boxed{\alpha = \frac{b\,P_s}{4}} \tag{19}$$

Sendo "b" dado por (ref. 6):

$$b = 2\,(\varphi_1 - \varphi_0) \tag{20}$$

teremos, finalmente:

$$\alpha = \frac{P_s\,(\varphi_1 - \varphi_0)}{2} \tag{21}$$

2.2 — *Mudança de Variável*: α é o coeficiente angular da tangente à curva logística tomando os tempos "t" no eixo das abscissas. Sí tomarmos os valores de φ nas abscissas, então o coefiente angular será dado por:

$$\beta = \frac{dP}{d\varphi} = \frac{dP}{dt} \times \frac{dt}{d\varphi} = \frac{2\alpha}{b} \tag{22}$$

$$\boxed{\beta = \frac{2\alpha}{b}} \tag{22a}$$

substituindo o valor de α da (12):

$$\boxed{\beta = 2 P_s N^2 e^{-2\varphi}} \tag{23}$$

que no ponto de inflexão passa a ser:

$$\boxed{\beta = \frac{P_s}{2}} \tag{24}$$

Isto mostra que o valor da tangente no ponto de inflexão, ou seja onde coincide o regímen aritmético com a curva logística, é função exclusiva da população de saturação, tomando φ como valor das abcissas.

2.3 — *Equação da Tangente*: a equação da tangente que passa pelo ponto de inflexão é fácil de ser determinada. Sabe-se que ela corta o eixo das populações no ponto de inflexão, então:

$$p = P_i = \frac{P_s}{2} \tag{27}$$

e sabe-se também o seu coeficiente angular, que é dado em (24). Então a equação da tangente no ponto de inflexão toma a forma:

$$p = \beta\varphi + P_i \tag{28}$$

Substituindo os valores de β e P_i vem:

$$p = \frac{P_s}{2}\varphi + \frac{P_s}{2} \tag{29}$$

ou seja:

$$\boxed{p = (1 + \varphi)\frac{P_s}{2}} \tag{30}$$

Mudando a variável φ para os tempos "t" teremos:

$$\varphi = \frac{bt - a}{2}$$

substituindo na (30):

$$\boxed{p = \frac{b P_s}{4 i} t + \left(1 - \frac{a}{2}\right)\frac{P_s}{2}} \tag{31}$$

Para a variável T, ou seja para as datas do calendário teremos:

$$p = \frac{b P_s}{4 i} T + \left(1 - \frac{a}{2}\right)\frac{P_s}{2} \tag{31a}$$

Considerando a (79):

$$\boxed{p = \frac{P_s}{2I} T + \left(1 - \frac{a}{2}\right) \frac{P_s}{2}} \tag{31b}$$

2.4 — *Discussão da Equação da Tangente*: estas duas equações são interessantes e merecem ser discutidas.

Fazendo $\varphi = 0$ na equação (30) vem:

$$p = \frac{P_s}{2} \tag{32}$$

para $p = 0$ vem:

$$\varphi = -1 \tag{33}$$

Para $P_s = 0$ vem:

$$p = 0 \tag{34}$$

E, para $P_s = \infty$ virá:

$$p = \infty \tag{35}$$

Isto mostra que a tangente à curva logística no ponto de inflexão gira em tôrno do ponto $p = 0$, $\varphi = -1$ quando P_s varia de zero ao infinito. O limite mínimo é dado por uma reta que coincide com o eixo das abscissas, e o limite máximo é dado por uma reta paralela ao eixo das ordenadas passando pelo ponto $\varphi = -1$, como se pode ver na Fig. N.º 1.

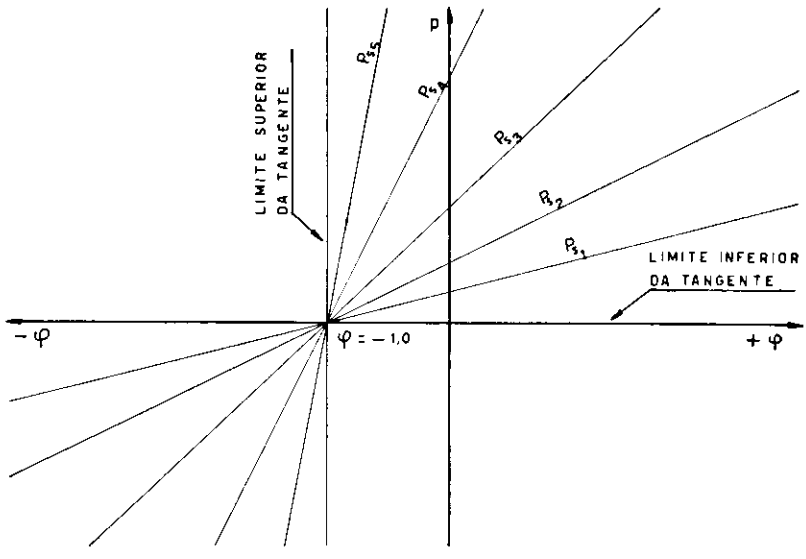


FIG. Nº 1

VARIAÇÃO DA TANGENTE NO PONTO DE INFLEXÃO

JCOM-1.957

Fazendo $t = 0$ na equação (31) vem:

$$p_{t=0} = \left(1 - \frac{a}{2}\right) \frac{P_s}{2} \tag{36}$$

Fazendo $p = 0$ vem:

$$t_{p=0} = \frac{a - 2}{b} \tag{37}$$

Vê-se então que o polo se desloca para a direita quando "a" aumenta, e que a inclinação da tangente no ponto de inflexão aumenta com o aumento de "b" e de P_s.

O ponto de inflexão é dado para:

$$p_i = \frac{P_s}{2} \tag{38}$$

Fazendo "p" na (31) tomar êste valor vem para t_i:

$$t_i = \frac{a}{b} \tag{39}$$

O eixo das ordenadas está afastado do valor acima (39) em relação ao ponto de inflexão. Ora, como "b" é sempre positivo, e "a" pode ser positivo, nulo ou negativo (ref. 7), infere-se que o ponto de inflexão pode ocupar três posições relativamente ao eixo das ordenadas, usando-se a variável "t" para as abcissas.

1.ª Posição: para

$$a < 0 \tag{40}$$

o valor de t_i é negativo, e o ponto de inflexão está à esquerda do eixo das ordenadas.

2.ª Posição: para

$$a = 0 \tag{41}$$

o valor de t_i é nulo, e o ponto de inflexço coincide com o eixo das ordenadas. Neste caso o eixo das ordenadas é o mesmo, tanto para a variável φ como para os tempos "t".

3.ª Posição: para

$$a > 0 \tag{42}$$

a valor de t_i é positivo, e o ponto de inflexão está à direita do eixo das ordenadas.

2.5 — *Limites Práticos do Reímen Aritmético*: Como já vimos no parágrafo 2.1, o regímen aritmético puro de crescimento populacional só existe num ponto da curva logística, que é o ponto de inflexão. Em qualquer outro ponto da curva o regímen não é aritmético.

Entretanto, dentro dos valores práticos, o regímen aritmético pode ser estendido à um conjunto de pontos da curva logística, englobando uma parte dos ramos direito e esquerdo da mesma, a partir do ponto de inflexão.

Vamos, por definição, dentro dos limites que a prática permite admitir, dizer que há um trecho da curva logística que obedece ao regímen aritmético de crescimento populacional, quando o desvio máximo das populações entre o regímen aritmético puro e o regímen logístico é de ± 5%. O regímen aritmético puro neste caso é definido pela tangente à curva logística no ponto de inflexão.

Dêste modo, interessa determinar quais os valores de φ e de N correspondentes à êstes desvios máximos.

Observando a Fig. N.º 2 vemos de imediato que:

$$\varepsilon = \frac{p - P}{P} = \frac{p}{P} - 1 \tag{43}$$

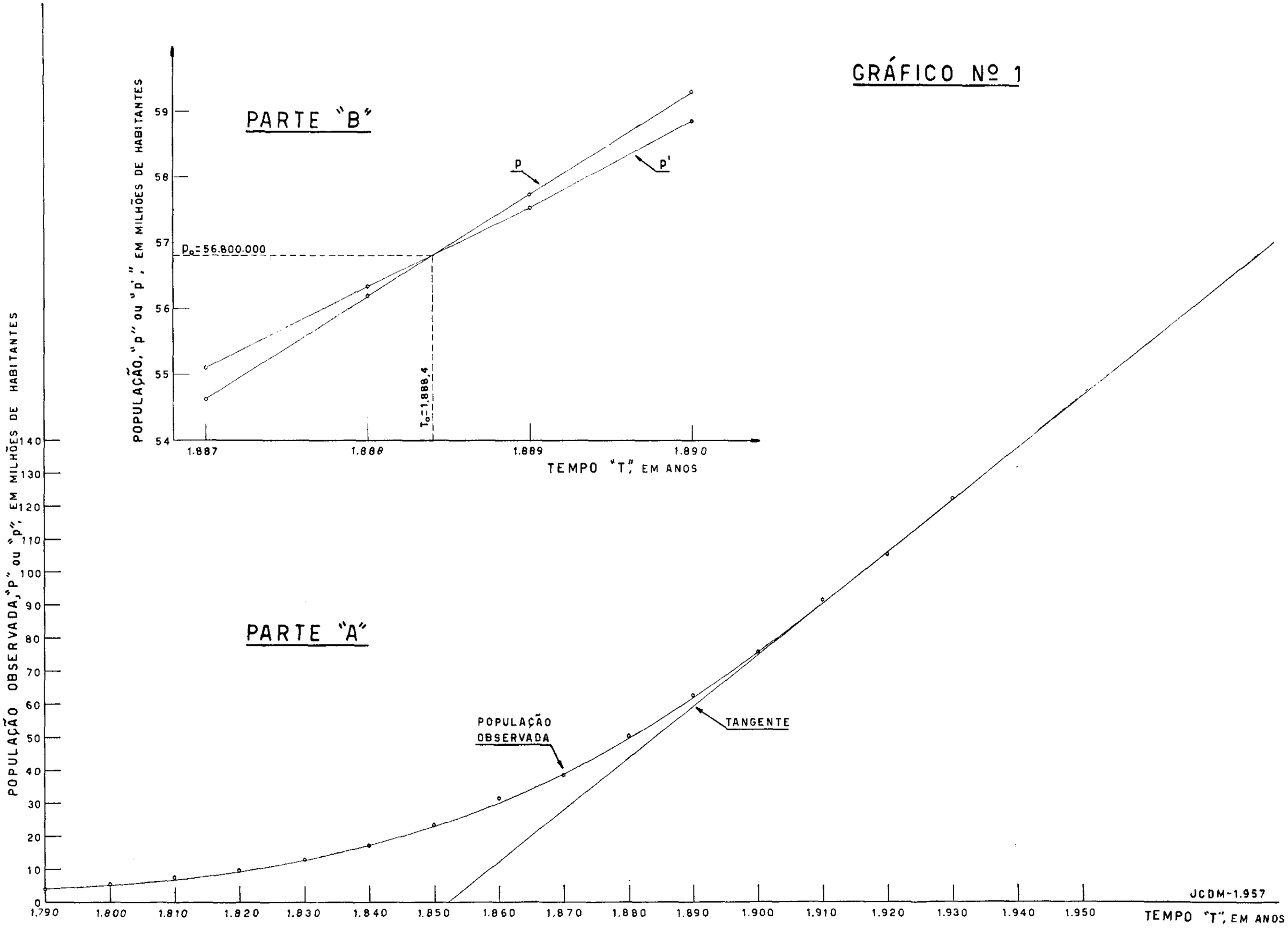
sendo ε o êrro admitido, "p" o valor da população dado pela tangente no ponto de inflexão, e P o valor da população dado pela logística.

Substituindo "p" dada pela (30) e P dada pela (4) virá imediatamente:

$$\varepsilon = \frac{(1 + \varphi)\,\frac{P_s}{2}}{P_s N} - 1 = \frac{1 + \varphi - 2N}{2N} \tag{44}$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1 + \varphi - 2N}{2N}} \tag{44a}$$

GRÁFICO Nº 1


PARTE "B"
POPULAÇÃO, "p" ou "p'", EM MILHÕES DE HABITANTES
59
58
57
56
55
54
p
p'
p_0=56.800.000
T_0=1.888,4
1.887
1.888
1.889
1.890
TEMPO "T", EM ANOS
PARTE "A"
POPULAÇÃO OBSERVADA, "P" ou "p", EM MILHÕES DE HABITANTES
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
POPULAÇÃO OBSERVADA
TANGENTE
1.790
1.800
1.810
1.820
1.830
1.840
1.850
1.860
1.870
1.880
1.890
1.900
1.910
1.920
1.930
1.940
1.950
TEMPO "T", EM ANOS
JCDM-1.957

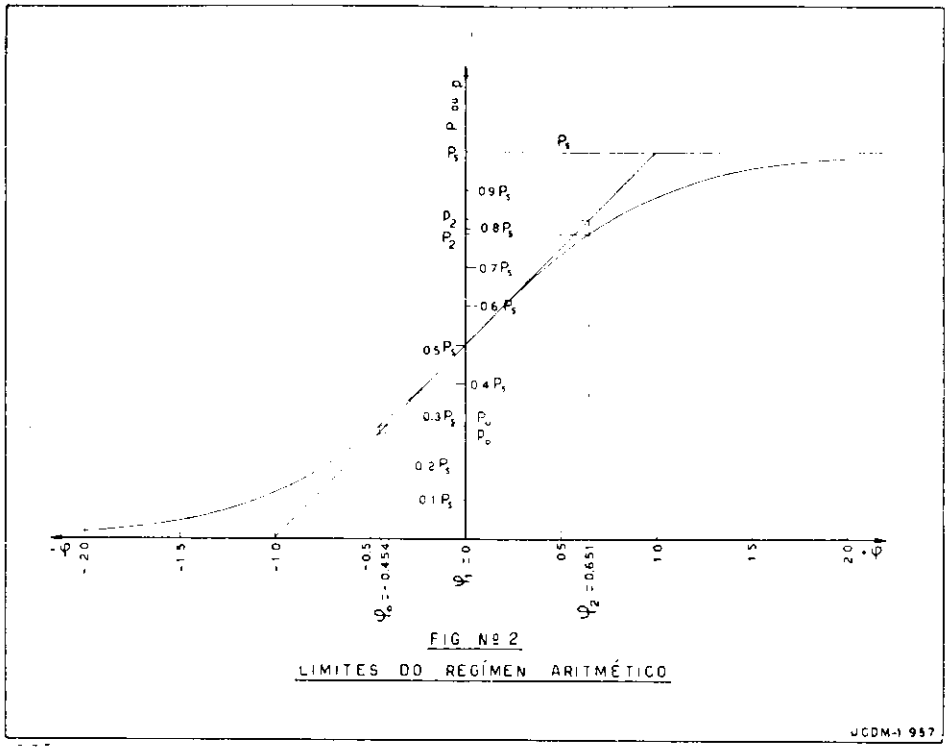


FIG Nº 2

LIMITES DO REGÍMEN ARITMÉTICO

Aplicando a ε os valores máximo e mínimo teremos:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = +\ 0{,}05 = \dfrac{1 + \varphi_0 - 2\,N_0}{2\,N_0} \\[2ex] \varepsilon_2 = -\ 0{,}05 = \dfrac{N\ 1 + \varphi_2 - 2\,N_2}{2\,N_2} \end{cases} \tag{45}$$

A partir da tabela da função logística normal (ref. 8), resolvemos estas duas equações pelo método das aproximações, cujas raízes são:

$$\begin{cases} \varphi_2 = +\ 0{,}65063 \\ N_2 = \quad 0{,}7860176 \end{cases} \tag{46}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = -\ 0{,}45321 \\ N_0 = \quad 0{,}2877921 \end{cases} \tag{47}$$

Os valores máximo e mínimo, dentro dos quais funciona o regímen aritmético como acima definido, são independentes da população, sendo função exclusiva de φ, pois na equação (44) a normal N é função de φ. Por outro lado, os dois valores limites de φ são função do desvio admitido ε.

Dêste modo, o regímen aritmético é satisfeito na logística, para um êrro ao nível de $\pm$ 5%, entre os valores de $\varphi_2 = 0{,}65063$ e $\varphi_0 = -\ 0{,}45321$.

Verifica-se que o intervalo no ramo direito da curva é maior do que no ramo esquerdo, a partir do ponto de inflexão. Isto é devido ao fato de ε ser um valor relativo, e como P e "p" são maiores no ramo direito do que no esquerdo, os valores de φ_2 e N_2 são maiores do que os de φ_0 e N_0 em valores absolutos.

2.6 — *Assimetria Entre* φ_2 *e* φ_0: Os valores de φ_2 e φ_0 deveriam ser, aparentemente, simétricos em relação ao eixo das ordenadas, pelo fato da curva ser simètricamente invertida em relação à tangente no ponto de inflexão. Entretanto, como vimos acima, tal não acontece.

Para uma diferença relativa ε_2 no ramo direito, correspondente a um valor φ_2, teremos:

$$\varepsilon_2 = \frac{p_2 - P_2}{P_2} \tag{48}$$

e para o ramo esquerdo, correspondente a φ_0 virá:

$$\varepsilon_0 = \frac{p_0 - P_0}{P_0} \tag{49}$$

Sí tivermos:

$$|\varepsilon_0| = |\varepsilon_2| \tag{50}$$

teremos evidentemente:

$$\left|\frac{p_0 - P_0}{P_0}\right| = \left|\frac{p_2 - P_2}{P_2}\right| \tag{51}$$

Ora, entretanto:

$$P_2 > P_0 \tag{52}$$

e então:

$$p - P_2 > p_0 - P_0 \tag{53}$$

Si a primeira diferença é maior do que a segunda em valor absoluto, há um maior afastamento entre a tangente e a curva logísta no ramo direito do que no esquerdo. Êste maior afastamento condiciona necessàriamente a seguinte desigualdade:

$$|\varphi_2| > |\varphi_0| \tag{54}$$

conferindo com os resultados obtidos para φ_2 e φ_0 em (46) e (47).

Isto tem uma consequência muito importante, a qual mostra que, para qualquer que seja o nível do desvio adotado, mas sempre igual em valor absoluto nos dois ramos, entre o regímen logístico e o aritmético, a duração dêste regímen é sempre maior depois da passagem pelo ponto de inflexão do que antes de passar pelo mesmo ponto.

3.7 — *Duração Total do Regímen Aritmético*: é outro aspeto importante do assunto que estamos focalizando.

Já vimos que os limites do regímen aritmético, a um nível qualquer do desvio adotado em relação à logística, não dependem da população de saturação, e nem das outras constantes da equação logística, mas tão sòmente do valor do desvio adotado, e, em consequência, de φ_2 e φ_0.

Voltando à (7), e isolando "t" vem:

$$t = \frac{2\varphi + a}{b} \tag{55}$$

Aplicando a dois limites extremos de um trecho de cuja duração se deseja saber:

$$\begin{cases} t_n = \dfrac{2\varphi_n + a}{b} \\[2ex] t_m = \dfrac{2\varphi_m + a}{b} \end{cases} \tag{56}$$

Subtraindo a segunda da primeira vem:

$$t_n - t_m = \frac{2}{b}(\varphi_n - \varphi_m) \tag{57}$$

Considerando que:

$$t = \frac{T - T_0}{i} \tag{58}$$

ou, para os dois pontos em consideração:

$$\begin{cases} t_n = \dfrac{T_n - T_0}{i} \\ t_m = \dfrac{T_m - T_0}{i} \end{cases} \tag{59}$$

vem imediatamente em (57):

$$\boxed{D_{n-m} = \Delta T_{n-m} = T_n - T_m = \frac{2\,i}{b}\,(\varphi_n - \varphi_m)} \tag{60}$$

Considerando as (46) e (47) virá finalmente:

$$\boxed{D_{2-0} = 2{,}20768\,\frac{i}{b}} \tag{61}$$

que é a equação da duração total do regímen aritmético, ao nível daquele desvio adotado.

2.8 — *Relação Duracional*: uma vez tomados dois períodos diferentes de crescimento, pode haver interêsse em se saber a relação entre a duração de um período com referência ao outro. A esta relação chamamos de relação duracional. Sendo o primeiro intervalo de tempo definido indiretamente por dois valores de φ, tais como φ_m, e φ_n, e o segundo intervalo definido por outros dois pontos φ_q e φ_r, teremos que a duração de cada intervalo será dada a partir da (60) por:

$$\begin{cases} D_{n-m} = \dfrac{2\,i}{b}\,(\varphi_n - \varphi_m) \\ D_{r-q} = \dfrac{2\,i}{b}\,(\varphi_r - \varphi_q) \end{cases} \tag{62}$$

em que:

$$\varphi_r > \varphi_q > \varphi_n > \varphi_m \tag{63}$$

A relação duracional será definida por:

$$\boxed{R_D = \frac{\varphi_n - \varphi_m}{\varphi_r - \varphi_q}} \tag{64}$$

Esta relação poderá tomar valores menores, iguais ou maiores do que a unidade, mas nunca poderá ser negativo.

No caso de:

$$\varphi_n - \varphi_m = \varphi_r - \varphi_q \tag{65}$$

a relação duracional será igual a unidade.

Sí os pontos de ordem "n" e "q" coincidirem, e os de ordem "m" e "r" se tornarem equidistantes no tempo, em relação ao ponto central, satisfazendo, portanto, a condição de Yule, teremos que:

$$R_D = \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}} \tag{66}$$

e, observando-se que:

$$\varphi_n = 2\,\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}$$

virá para a relação duracional:

$$R_D = \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}}{\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}} = 1 \tag{67}$$

Isto quer dizer que para a condição de Yule, a relação duracional será sempre igual a unidade.

Demonstra-se fàcilmente que vale a seguinte expressão para a relação duracional:

$$R_D = \frac{\varphi_n - \varphi_m}{\varphi_r - \varphi_q} = \frac{T_n - T_m}{T_r - T_q} = \frac{t_n - t_m}{t_r - t_q} \tag{68}$$

2.9 — *Durações Parciais do Regímen Aritmético*: a duração parcial do regímen aritmético à esquerda do ponto de inflexão é menor do que a duração parcial à direita do mesmo ponto. Fazendo na (60):

$$\begin{cases} D_{1-0} = -\dfrac{2\,i}{b}\,\varphi_0 \\[2ex] D_{2-1} = \dfrac{2\,i}{b}\,\varphi_2 \end{cases} \tag{69}$$

pois $\varphi_1 = 0$, teremos que a relação duracional para o regímen aritmético será dada por:

$$\boxed{R_D = \frac{\varphi_2}{-\varphi_0}} \tag{70}$$

substituindo os valores de φ_2 e φ_0 pelos dados nas (46) e 47) teremos:

$$R_D = \frac{0{,}65063}{-(-\,0{,}45321)} = 1{,}43506 \tag{71}$$

mostrando que a relação duracional é constante para os pontos extremos do regímen aritmétiso, sendo independente das unidades, e dependendo sòmente do valor do desvio adotado $\pm\ \varepsilon$.

Aplicando sucessivamente a (60) para:

$$\text{ramo direito} \quad \begin{cases} \varphi_n = \varphi_n \\ \varphi_m = \varphi_0 = 0 \end{cases} \tag{72}$$

$$\text{ramo esquerdo} \quad \begin{cases} \varphi_n = \varphi_0 = 0 \\ \varphi_m = \varphi_m \end{cases} \tag{73}$$

teremos:

$$\begin{aligned} D_{n-0} &= \frac{2\,i}{b}\,\varphi_n \\ D_{0-m} &= -\frac{2\,i}{b}\,\varphi_m \end{aligned} \tag{74}$$

Isolando φ da (44a) e aplicando a "n" e "m" teremos:

$$\begin{cases} \varphi_n = 2\,N_n\,(1 + \varepsilon_n) - 1 \\ \varphi_m = 2\,N_m\,(1 + \varepsilon_m) - 1 \end{cases} \tag{75}$$

e substituindo nas (73) virá:

$$\begin{cases} D_{n-0} = \dfrac{2\,i}{b}\,[2\,N_n\,(1 + \varepsilon_n) - 1] \\[2ex] D_{0-m} = -\dfrac{2\,i}{b}\,[2\,N_m\,(1 + \varepsilon_m) - 1] \end{cases} \tag{76}$$

Neste caso a relação duracional será:

$$R_D = \frac{D_{n-0}}{D_{0-m}} = \frac{2\,N_n\,(1 + \varepsilon_n) - 1}{-\,2\,N_m\,(1 + \varepsilon_m) + 1} \tag{77}$$

Com o aumento de ε_n a duração no ramo direito aumenta, e com o aumento do valor absoluto de ε_m também aumenta a duração no lado esquerdo. Entretanto, sendo $|\varepsilon_n| = |\varepsilon_m|$, o aumento do lado esquerdo é menor do que o do lado direito, de tal modo que a relação duracional aumenta. Isto mostra que, no regímen aritmético, a duração é função dos valores dos desvios adotados.

2.10 — *Invariante Logístico:* para cada curva logística a duração do regímen aritmético é constante, sendo independente de "i" e de "b", para mesmos níveis do desvio adotado, pois esta duração, como é evidente, é função exclusiva da estrutura e das condições de desenvolvimento do agrupamento humano em estudo. A duração não depende das constantes de localização "a" e "b" da época do crescimento estudado na curva logística, porque numa mesma logística "a" e "b" podem tomar um número infinito de valores, como já vimos em trabalho anterior (ref. 7).

Tomando-se a equação (55), e aplicando-a a dois pontos de ordem "n" e "m", e subtraindo uma da outra, teremos:

$$t_n - t_m = \frac{2(\varphi_n - \varphi_m)}{b} \tag{78}$$

Substituindo t_n e t_m pelos seus valores dados pela (58) vem finalmente:

$$\frac{T_n - T_m}{\varphi_n - \varphi_m} = \frac{2i}{b} \tag{79}$$

mostrando que a relação $2i/b$ é constante. Aplicando aos dois primeiros pontos, que são conhecidos, e correspondentes a P_0 e P_1 teremos:

$$I = \frac{T_1 - T_0}{\varphi_1 - \varphi_0} = \frac{2i}{b} \tag{80}$$

O valor de I é constante para cada curva logística, e depende sòmente das condições estruturais responsáveis pelo processo particular de crescimento do agrupamento humano em estudo. Devido à sua invariância ao longo de tôda a curva logística em estudo, chamamos a esta grandeza de invariante logístico.

O invariante logístico é o número de anos que decorre para cada avanço unitário da variável φ, independentemente de quanto cresce a população em valor absoluto. O invariante logístico está estreitamente relacionado com o que poderíamos chamar de velocidade de crescimento populacional, assim como com à duração parcial ou total de qualquer agrupamento humano. Quanto maior fôr o invariante logístico tanto menos ràpidamente cresce a população, e tanto menos ràpidamente se aproxima ela do ponto de saturação. Em estudo posterior serão mostrados fatos interessantes relacionados com o invariante logístico.

Da equação (80) conclui-se imediatamente que:

$$b = \frac{2i}{b} \tag{81}$$

mostrando que "b" é diretamente proporcional ao intervalo de tempo unitário "i" numa mesma curva logística. Por outro lado, numa mesma curva logística vale a proporção seguinte:

$$\frac{i_n}{b_1} = \frac{i_2}{b_2} = \dots\dots\dots\dots = \frac{i_1}{b_n} \tag{82}$$

2.11 — *Duração do Crescimento Entre Dois Pontos Quaisquer*: substituindo a relação $2i/b$ na equação (60) pela dada em (18) virá:

$$\boxed{D_{n-m} = I(\varphi_n - \varphi_m)} \tag{83}$$

Esta equação mostra que a duração do crescimento populacional entre os pontos φ_n e φ_m é função da diferença $\varphi_n - \varphi_m$ e do invariante logístico.

A equação (83) pode ser dada sob a forma de:

$$\boxed{D = \Delta T = I \Delta \varphi} \tag{84}$$

ou ainda sob forma diferencial:

$$\boxed{\frac{dT}{dp} = I} \tag{85}$$

2.12 — *Duração do Regímen Aritmético Sob Forma Invariante*: substituindo os valores de φ_2 e φ_0 dados nas (46) e (47) na (83) virá:

$$\boxed{D_{2-0} = 1{,}10384\, I} \tag{86}$$

No regímen aritmético, conforme admitido neste trabalho, a sua duração é função exclusiva do invariante logístico, e diretamente proporcional à êle.

2.13 — *Êrros Máximo e Mínimo Sôbre a Logística*: outro fato interessante é a pesquisa dos êrros máximo e mínimo que se pode cometer, pela extrapolação do crescimento aritmético além de φ_2 e aquém de φ_0, sôbre os valores correspondentes da logística.

O segmento da reta tangente ao ponto de inflexão, correspondente ao regímen aritmético, é limitado inferiormente por $p_{min} = 0$, e superiormente por $p_{max} = P_s$. Assim poderemos pesquisar fàcilmente os valores de φ_{min} e φ_{max}.

Tomando-se a equação da tangente no ponto de inflexão (30):

$$p = (1 + \varphi)\, \frac{P_s}{2} \tag{87}$$

e aplicando para:

$$p = p_{min} = 0 \tag{88}$$

teremos:

$$\varphi_{min} = -1 \tag{89}$$

e para:

$$p = p_{max} = P_s \tag{90}$$

teremos

$$\varphi_{max} = +1 \tag{91}$$

cujos valores correspondentes da normal logística são:

$$\begin{cases} N_{max} = 0{,}8808 \\ N_{min} = 0{,}1192 \end{cases} \tag{92}$$

Os êrros são determinados a partir da (43) devidamente aplicada para os dois casos. O êrro mínimo será dado por:

$$\varepsilon_{min} = \frac{p_{min} - P_{min}}{P_{min}} = \frac{-P_{min}}{P_{min}} = -1 \tag{93}$$

e o máximo:

$$\varepsilon_{max} = \frac{p_{max} - P_{max}}{P_{max}} = \frac{P_s - P_{max}}{P_{max}} = \frac{P_s}{P_{max}} - 1 \tag{94}$$

Entretanto, o valor de P correspondente a P_{max} é:

$$P_{max} = \frac{P_s}{1 + e^{-2}} \tag{95}$$

que substituindo na (94) fornece o valor do êrro máximo:

$$\varepsilon_{max} = e^{-2} = 0{,}13534 \tag{96}$$

Como vemos, o êrro cometido do lado esquerdo da curva é de 100% sôbre a logística, ou seja, igual ao próprio valor da população logística, e o do lado direito é igual 13,534% sôbre o valor da população logística.

A extrapolação máxima do lado esquerdo, pelo regímen aritmético, leva ao anulamento da população muito antes do seu início de formação, e a extrapolação máxima no ramo direito, também pelo regímen aritmético, leva a população à saturação antes da época real (a um certo nível de êrro) da saturação.

Êrros maiores poderão ser cometidos, como é evidente, para extrapolações maiores no ramo direito.

3 — DETERMINAÇÃO DA LOGÍSTICA A PARTIR DE UM REGÍMEN ARITMÉTICO CONHECIDO

3.1 — *Considerações*: diante do nosso desenvolvimento precedente, torna-se possível determinar uma logística a partir de dados populacionais conhecidos, quando o crescimento do grupo em questão está no regímen aritmético.

De um modo geral, uma curva logística pode ser determinada, pelo menos, pelos três seguintes modos:

a — a partir de três pontos equidistantes no tempo, usando a condição de Yule;

b — a partir de três pontos não equidistantes no tempo;

c — a partir de múltiplos pontos equidistantes ou não no tempo.

Para o primeiro caso existem vários processos, inclusive o nosso, já referido neste trabalho por mais de uma vez. Neste caso, contudo, não se pode dispensar a condição de Yule, ou seja da equidistância no tempo de, no mínimo, três populações conhecidas.

No segundo caso pode ser empregado o nosso processo (ref. 9), ou outro qualquer adequado ao caso.

Êstes dois casos, contudo, não fornecem uma logística de grande valor estatístico, apesar de em muitos exemplos, a logística determinada por êles corresponder com bastante precisão ao passado do desenvolvimento populacional. Nestes dois casos, o uso dos dados populacionais se restringe a três populações, apesar de, as vêzes, se dispor de muitos mais dados. O Prof. Aúthos Pagano (ref. 10), aliás, obtém uma média de vários dados para cada ponto específico da logística, de modo que há um aumento sensível na precisão da curva determinada por êste processo.

O processo que vamos estudar neste trabalho, poderá dar oportunidade a se ter uma logística, digamos, média, e portanto de considerável melhor valor estatístico do que as fornecidas pelos dois processos anteriormente citados, principalmente quando se dispõe de muitas populações mais ou menos alinhadas, obedecendo a um provável regímen de crescimento aritmético. Mas, êste processo exige uma condição importante, sem a qual êle não pode ser aplicado. Esta condição é a de que se disponha de alguns dados populacionais anteriores ou posteriores ao estabelecimento do regímen aritmético observado, para se determinar o valor do desvio ε entre a curva observada e a reta responsável pelo regímen aritmético.

É evidente que ε não precisa ser necessàriamente igual a $\pm$ 0,05, como foi estabelecido anteriormente. Mas, neste caso deverão ser pesquisados os valores de φ_0, φ_2, etc., em função do valor do novo desvio adotado. No sentido de simplificar o nosso trabalho, vamos nos ater ao caso de $\varepsilon = \pm$ 0,05.

3.2 — *Estabelecimento da Curva Observada*: é bastante raro se obter muitos dados populacionais que satisfaçam a uma reta, e que forneçam um começo de curvatura em uma ou duas das pontas dentro do regímen logístico puro. O que se obtém, geralmente, a partir de dados observados, de população ou experimentais em geral, são pontos que mostram a tendência da curva. Esta tendência pode ser linear, parabólica, hiperbólica, logística, etc., ou sem forma definida.

Existem vários processos estatísticos para se determinar a tendência mais provável do fenômeno em estudo, sobressaindo-se o dos mínimos quadrados e o da correlação. O que interessa é a obtenção da curva média de maior aderência aos pontos conhecidos, para se poder obter a logística mais provável relativa ao conjunto de dados disponíveis.

No nosso exemplo vamos empregar o processo mais simples que existe, e que é o chamado processo gráfico. Êste processo consiste, em resumo, em se lançar os pontos, em função dos valores de P e T, num papel milimetrado, e numa escala conveniente para se ter uma boa noção de conjunto, e que permita se fazer leituras interpoladas com razoável precisão, e traçar "à olho" a curva que mais se pareça com a média do crescimento. Traçada a reta média, completa-se a parte curva também "à olho". O melhor sistema de se traçar a curva é com a chamada curva flexível, de modo a se ajustar a curvatura da mesma à provável curvatura da curva, em função da posição dos pontos lançados.

3.3 — *Valores Dependentes Diretamente de* ε: observando-se a Fig. N.º3 temos no trecho reto da curva, em negrito, a curva média observada, obtida como vimos em 3.2. Observa-se, também, a reta prolongada nas duas bordas, e duas partes curvas, também nas bordas. A parte curva à esquerda é da população observada (neste caso), e à direita é hipotética. Há um trecho reto à direita, em linha mais fina, também hipotético. A teoria desenvolvida por nós tanto vale para o lado esquerdo (como neste caso), como para o lado direito.

O eixo das ordenadas refere-se à população, e o das abcissas refere-se às datas do calendário, aos tempos na unidade logística, e à variável φ.

As posições de ordem zero e dois referem-se respectivamente à φ_0 e a φ_2, conforme definidos nas (45), (46), (47) e outras. A posição de ordem 1 refere-se à $\varphi_1 = 0$.

Os elementos conhecidos são:

$$\begin{aligned}
T_0 &= \text{obtido por interpolação do Gráfico N.º 1} \\
p_0 &= \text{como } T_0 \\
P_0 &= \text{como } T_0 \\
\varphi_0 &= -\ 0{,}45321 \\
\varphi_1 &= 0 \\
\varphi_2 &= +\ 0{,}65063 \\
t_0 &= 0 \\
t_1 &= 1 \\
N_0 &= 0{,}2877921 \\
N_1 &= 0{,}50 \\
N_2 &= 0{,}7860176
\end{aligned} \tag{97}$$

O valor de "a" é:

$$a = -\ 2\,\varphi_0 = 2 \times 0{,}45321 = 0{,}90642$$

$$\boxed{a = 0{,}90642} \tag{98}$$

Como os três pontos não são equidistantes no tempo, o valor de "b" será:

$$b = \frac{2\,(\varphi_1 - \varphi_0)}{\Delta T_1} \tag{99}$$

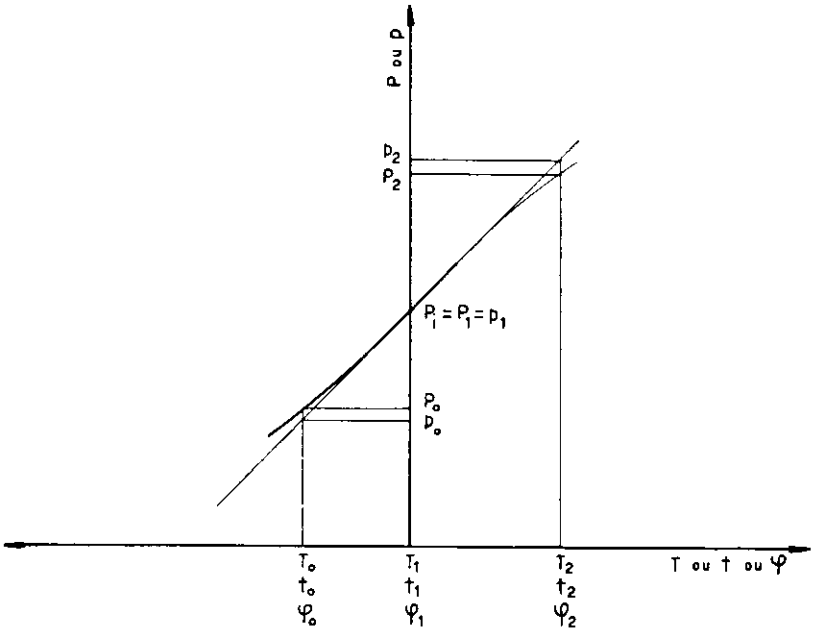


FIG. Nº 3

JCOM-1.957

sendo adotado:

$$\Delta T_1 = t_1 - t_0 = 1 \tag{100}$$

então:

$$b = -2\varphi_0 = a = 0{,}90642$$

$$\boxed{b = 0{,}90642} \tag{101}$$

O valor de t_2 será:

$$t_2 = \frac{2\varphi_2 + a}{b} = \frac{2 \times 0{,}65063 + 0{,}90642}{0{,}90642} = 2{,}4356$$

$$\boxed{t_2 = 2{,}4356} \tag{102}$$

Os valores de "a", "b" e t_2 são fixados em função do valor de ε.

3.4 — *Determinação de* (p_0, P_0) *ou* (p_2, P_2): são determinados a partir da equação (43):

$$\varepsilon = \frac{p - P}{P}$$

Para o ramo esquerdo da curva deve-se ter $\varepsilon = -0{,}05$ e para o ramo direito deve ser $\varepsilon = +0{,}05$, ou seja, tomando os valores indicados na Fig. N.º 3:

a — *ramo esquerdo*:

$$\varepsilon_0 = \frac{p_0 - P_0}{P_0} = -0{,}05 \tag{103}$$

b — *ramo direito*:

$$\varepsilon_2 = \frac{p_2 - P_2}{P_2} = +0{,}05 \tag{103a}$$

O processo de se determinar p_0 e P_0 ou p_2 e P_2, assim como T_0 ou T_2, será descrito detalhadamente no capítulo seguinte, quando daremos um exemplo.

3.5 — *Determinação de P_s*: uma vez determinado P_0 ou P_2 o valor de P_s será calculado, para o lado esquerdo da curva por:

$$P_s = \frac{P_0}{N_0} = \frac{P_0}{0{,}2877921}$$

$$\boxed{P_s = 3{,}47473\, P_0} \qquad (104)$$

e para o lado direito:

$$P_s = \frac{P_2}{N_2} = \frac{P_2}{0{,}7860176}$$

$$\boxed{P_s = 1{,}27223\, P_2} \qquad (104a)$$

3.6 — *Determinação de P_1 e P_0 ou P_2*: partindo-se do ramo esquerdo da curva os valores de P_1 e P_2 ficam desconhecidos, mas são determinados assim:

$$\boxed{P_1 = N_1 P_s = 0{,}5\, P_s} \qquad (105)$$

$$\boxed{P_2 = N_2 P_s = 0{,}7860176\, P_s} \qquad (105a)$$

e, partindo-se do ramo direito teremos:

$$\boxed{P_1 = N_1 P_s = 0{,}5\, P_s} \qquad (106)$$

$$\boxed{P_0 = N_0 P_s = 0{,}2877921\, P_s} \qquad (106a)$$

3.7 — *Determinação dos Coeficientes Angulares*: o coeficiente angular em relação à unidade logística dos tempos "t" é dado pela (19):

$$\boxed{\alpha = \frac{b\, P_s}{4}} \qquad (107)$$

e, o referente à T (datas do calendário) é obtido da equação do crescimento aritmético puro:

$$\boxed{\alpha' = \frac{p_n - p_m}{T_n - T_m}} \qquad (108)$$

para dois pontos quaisquer de ordem "n" e "m". O valor de α' tira-se do Gráfico N.º 1.

Na verdade, o nosso processo consiste em se tornar o valor da população P_a, do regímen aritmético puro dado na (1), igual ao valor de "p" da tangente ao ponto de inflexão, dado na (43), o que nem sempre poderá se verificar.

Tendo-se α e α' obtém-se o valor de "i" dado na (3a):

$$\boxed{i = \frac{\alpha'}{\alpha}} \qquad (109)$$

3.8 — *Determinação de T_1 e T_2*: tendo-se "i" obtém-se T_1 e T_2 a partir da (1a):

$$\boxed{T_1 = i + T_0} \tag{110}$$

$$\boxed{T_2 = i\,t_2 + T_0} \tag{110a}$$

Assim ficam determinados todos os valores necessários para se estabelecer a logística.

3.9 — *Construção da Curva Logística*: com todos os elementos determinados pode-se então construir a curva logística. Para isso, pode ser usado o nosso método, já anteriormente publicado (ref. 2), ou outro qualquer.

4 — PROCESSO PRÁTICO DE CÁLCULO

4.1 — *Exemplo a Ser Dado*: o Prof. Aúthos Pagano em suas "Lições de Estatística" oferece um exemplo da logística norte-americana, com dados populacionais desde 1.790. Releva notar que aquêle povo já em data tão longinqua tinha preocupações fundamentais quanto à Estatística, independentemente das tricas políticas e de outras atividades nocivas ao conhecimento exata da realidade norte-americana. Não é, pois, de se admirar que hoje a Estatística ocupe um lugar proeminente na planificação das atividades daquele povo, uma vez que desde 1.790 até a data atual, não passou uma única década sem que se fizesse um recenseamento nacional.

Vamos usar os dados fornecidos pelo Prof. A. Pagano, com a sua devida licença, para o exemplo que daremos a seguir. Os resultados obtidos pelo nosso processo não são muito diferentes dos obtidos pelo ilustre Prof. A. Pagano.

4.2 — *Gráfico N.º 1*: com os dados populacionais disponíveis construimos a parte A do Gráfico N.º 1. Na parte aproximadamente retilínea traçamos a reta tangente ao suposto ponto de inflexão. Observa-se que o ramo da curva de que dispomos é o ramo esquerdo, e êle apresenta uma forma bem parecida com o ramo esquerdo da curva logística. Na verdade o crescimento populacional norte-americano acompanha nìtidamente a logística. Em 1.940 houve uma deformação na curva, deformação esta devida provàvelmente à guerra.

Da parte A do Gráfico N.º 1 tiramos os dados referentes à T, "p" e P, e com êles construimos a Tabela N.º 1. Esta tabela é feita para o enquadramento aproximado de p_0, P_0 e T_0, por meio do cálculo dos valores de ε.

Verifica-se que o valor de $\varepsilon = -0{,}05$ está entre os anos de 1.888 e 1.889. Assim, torna-se necessário se determinar com mais precisão T_0 e os valores de p_0 e P_0 correspondentes à $\varepsilon = -0{,}05$.

Para isso, tomamos as populações P da Tabela N.º 1 e as multiplicamos por 0,95 colocando os resultados na coluna p', correspondentes à equação:

$$p' = (1 + \varepsilon)\,P = (1 - 0{,}05)\,P = 0{,}95\,P \tag{111}$$

Dos valores de p', algum será o p_0, ainda que interpolado. Transportando estes valores para a parte B do Gráfico N.º 1 teremos uma curva, que é a curva dos 0,95 P. Nesta mesma parte B do gráfico lançamos a reta correspondente ao regímen aritmético dos "p"; ou seja a tangente ao ponto de inflexão. No cruzamento das duas curvas teremos o ponto que determina T_0 e p_0, com $\varepsilon = -0{,}05$.

Assim temos determinado o ponto procurado:

$$\begin{cases} T_0 = 1.888{,}40 \text{ anos} \\ p_0 = p'_0 = 56.800.000 \text{ hab.} \end{cases} \tag{112}$$

O desvio ε vale então:

$$\varepsilon = \frac{p_0 - P_0}{P_0} = \frac{56.800.000 - 59.790.000}{59.790.000} = -0{,}05 \tag{113}$$

E o valor de P_0 será:

$$P_0 = \frac{p_0}{0{,}95} = \frac{56.800.000}{0{,}95} = 59.790.000 \text{ hab.} \tag{114}$$

4.3 — *Determinação de P_s*: é dado pela equação (104):

$$P_s = 3{,}4747\ P_0 = 207.700.000 \text{ hab.} \tag{115}$$

4.4 — *Determinação de P_1 e de P_2*: são dados pelas (105) e (105a):

$$\begin{cases} P_1 = 0{,}05\ P_s = 103.850.000 \text{ hab.} \\ P_2 = N_2\ P_s = 0{,}7860 \times 207.700.000 = 163.250.000 \text{ hab.} \end{cases} \tag{116}$$

4.5 — *Determinação dos Coeficientes Angulares*: o valor de α é dado pela equação (107):

$$\alpha = \frac{b\ P_s}{4} = \frac{0{,}90642 \times 207.700.000}{4} = 47.065.000 \text{ hab}/_{t=1} \tag{117}$$

O valor de α' provém da equação da tangente ao ponto de inflexão:

$$\alpha' = \frac{p_n - p_m}{T_n - T_m} = \frac{138.000.000 - 13.000.000}{1.940 - 1.860} = 1.562.500 \text{ hab/ano} \tag{118}$$

4.8 — *Determinação do Intervalo de Tempo "i"*: é calculado a partir da equação (109):

$$i = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{47.065.000}{1.562.500} = 30{,}12 \text{ anos} \tag{119}$$

4.7 — *Determinação de T_1 e de T_2*: o valor de T_1 é dado por:

$$T_1 = i + T_0 = 30{,}12 + 1.888{,}40 = 1.918{,}52 \text{ anos} \tag{120}$$

e o valor de T_2 é dado pela (110a):

$$T_2 = i\,T_2 + T_0 = 30.12 \times 2{,}4356 + 1.888{,}40 = 1.961{,}76 \text{ anos} \tag{121}$$

O regímen aritmético começou nos Estados Unidos no fim da penúltima década do século passado e deverá terminar em tôrno de 1.962. segundo a logística.

4.8 — *Ajustamento de φ para as Datas Inteiras*: os valores de φ até agora determinados referem-se à datas fracionárias. E' interessante contudo, se construir uma tabela e uma curva para datas inteiras. Para isso usa-se a equação (36a) dada no nosso trabalho anterior (ref. 2):

$$\varphi_n = \frac{b\,\Delta t_n}{2} + \varphi_{n-1} \tag{122}$$

fazendo:

$$\varphi_{n-1} = \varphi_0 = -\ 0{,}45321 \tag{123}$$

$$\Delta T_n = T_{int} - T_0 = 1.890 - 1.888{,}4 = 1{,}6 \text{ anos} \tag{124}$$

$$\Delta t_n = \frac{\Delta T_n}{i} = \frac{1{,}6}{30{,}12} = 0{,}05312 \tag{125}$$

virá:

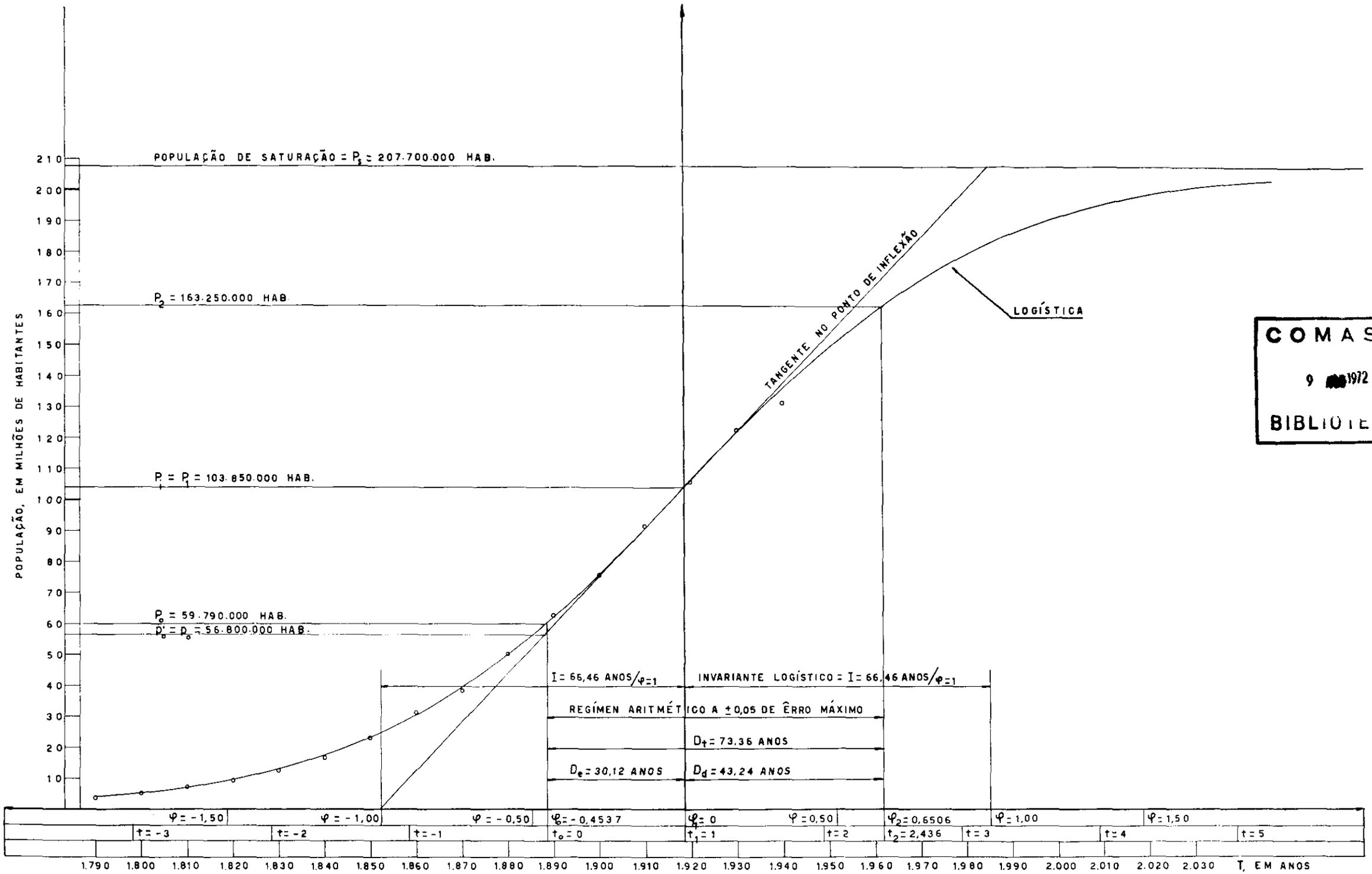
$$\varphi_{1.890} = \frac{0{,}9064 \times 0{,}05312}{2} - 0{,}45321 = 0{,}42913 \tag{126}$$

O valor de $\Delta\varphi$ para afastamentos iguais a 10 anos é determinado a partir da mesma equação, fazendo-se:

$$\Delta t = \frac{10}{30{,}12} = 0{,}33200 \tag{127}$$

$$\varphi_{1.900} = \frac{0{,}90642 \times 0{,}33200}{2} - 0{,}42913 = -\ 0{,}27865 \tag{128}$$

$$\varphi_{10} = \varphi_{1.900} - \varphi_{1.890} = 0{,}15047 \tag{129}$$



COMASP
9 1972
BIBLIOTECA

FIGURA Nº 4

LOGÍSTICA NORTE-AMERICANA

JCDM-1.957

Com todos estes valores construimos a Tabela N.º 3, e a curva logística dada na Fig. N.º 4.

4.8 — *Equações do Regímen Aritmético e da Logística*: a equação do regímen aritmético de crescimento norte-americano será:

$$p = p_0 + \alpha' (T - T_0) \tag{130}$$

$$p = 56.800.000 + 1.562.500 (T - 1.888.40) \tag{131}$$

e a da logística norte-americana é:

$$P = \frac{207.700.000}{1 + e^{0,90642 (1 - t)}} \tag{132}$$

4.9 — *Invariante da Logística Norte-Americana*: é dado por:

$$I = \frac{2\,i}{b} = \frac{2 \times 30.12}{0,90642} = 66,46 \text{ anos}/_{\tau = t} \tag{133}$$

4.10 — *Duração do Regímen Aritmético Norte-Americano*: a duração total do regímen aritmético norte-americano será:

$$D_t = 1,10384 \times 66,46 = 73,36 \text{ anos} \tag{134}$$

A duração à esquerda é:

$$D_e = - (- 0,45321) \times 66,46 = 30,12 \text{ anos} \tag{135}$$

A duração à direita é:

$$D_d = 0,65063 \times 66,46 = 43,24 \text{ anos} \tag{136}$$

4.11 — *Observações Finais*: na Fig. N.º 4 consta a curva logística norte-americana, com todos os dados necessários à boa compreensão de sua construção.

Os dados observados nos recenseamentos constam em pequenos círculos, ao longo da curva calculada, mostrando que a população norte-americana cresce de acôrdo com a logística de Verhulst.

Por outro lado, na Tabela N.º 3 verifica-se que a logística calculada por nós, pelo processo do regímen aritmético, coincide bem com a calculada pelo ilustre estaticista brasileiro, Prof. A. Pagano, seguindo o processo clássico, assim como com os dados observados nos recenseamentos norte-americanos. O único ponto que apresenta um desvio relativamente grande é o referente à data de 1.940, desvio êste provàvelmente devido às condições sociais e econômicas acarretadas pelo início da 2.ª Grande Guerra.

Esta grande aderência dos valores calculados pelo processo do regímen aritmético aos observados, e aos calculados pelo Prof. A. Pagano, nos leva a crer que êste nosso processo poderá ser aplicado a outros casos semelhantes, com alguma vantagem sôbre os processos dos três pontos, equidistantes ou não no tempo.

TABELA N.º 1

ENQUADRAMENTO DO DESVIO ε

DATA ANOS	P hab.	p hab.	p — P hab.	ε
1.880	49.500.000	43.700.000	— 5.800.000	— 0,1171
1.881	50.700.000	45.260.000	— 5.440.000	— 0,1073
1.882	51.800.000	46.820.000	— 4.980.000	— 0,0961
1.883	53.000.000	48.380.000	— 4.620.000	— 0,0871
1.884	54.200.000	49.940.000	— 4.260.000	— 0,0786
1.885	55.400.000	51.500.000	— 3.900.000	— 0,0702
1.886	56.700.000	53.060.000	— 3.640.000	— 0,0642
1.887	58.000.000	54.620.000	— 3.380.000	— 0,0582
1.888	59.300.000	56.180.000	— 3.120.000	— 0,0526
1.889	60.550.000	57.740.000	— 2.810.000	— 0,0464
1.890	61.950.000	59.300.000	— 2.650.000	— 0,0427

TABELA DOS 0,95 P

TABELA N.º 2

DATA ANOS	P hab	p' hab
1.887	58.000.000	55.100.000
1.888	59.300.000	56.335.000
1.889	60.550.000	57.522.500
1.890	61.950.000	58.852.500

TABELA N.º 3

LOGÍSTICA NORTE-AMERICANA

ANOS DATA	φ	N	POPULAÇÕES — hab		
			Observada	Prof. A. Pagano	Moraes
1.790	— 1,933	0,0204	3.929.000	3.917.000	4.252.000
1.800	— 1,783	0,0275	5.308.000	5.325.000	5.712.000
1.810	— 1,632	0,0367	7.240.000	7.220.000	7.635.000
1.820	— 1,482	0,0490	9.638.000	9.754.000	10.192.000
1.830	— 1,331	0,0651	12.866.000	13.109.000	13.538.000
1.840	— 1,181	0,0862	17.069.000	17.511.000	17.908.000
1.850	— 1,031	0,1114	23.192.000	23.198.000	23.138.000
1.860	— 0,880	0,1468	31.443.000	30.408.000	30.490.000
1.870	— 0,730	0,1885	38.558.000	39.333.000	39.151.000
1.880	— 0,579	0,2387	50.156.000	50.059.000	49.578.000
1.888,4	— 0,453	0,2878	—	—	59.776.000
1.890	— 0,429	0,2979	62.948.000	62.506.000	61.874.000
1.900	— 0,278	0,3645	75.995.000	76.366.000	75.707.000
1.910	— 0,128	0,4364	91.972.000	91.119.000	90.703.000
1.920	+ 0,022	0,5110	105.711.000	106.079.000	106.135.000
1.930	+ 0,172	0,5857	122.775.000	120.527.000	121.650.000
1.940	+ 0,323	0,6527	131.410.000	133.835.000	135.566.000
1.950	+ 0,473	0,7207	—	145.571.000	149.689.000
1.960	+ 0,624	0,7768	—	—	161.341.000
1.970	+ 0,774	0,8250	—	—	171.353.000
1.980	+ 0,925	0,8641	—	—	179.474.000
1.990	+ 1,075	0,8959	—	—	186.078.000
2.000	+ 1,226	0,9210	—	—	191.292.000

RESUMO

O Autor estuda o regímen aritmético de crescimento das populações em face da logística de Verhulst, mostrando que o crescimento logístico passa por uma fase de crescimento que pode ser assemelhado ao crescimento aritmético. Em base nesta hipótese faz um tratamento matemático do assunto, indicando propriedades interessantes do crescimento aritmético.

Estabelece um método próprio para a determinação de curvas logísticas a partir de crescimentos aritméticos conhecidos.

Apresenta um exemplo de aplicação para a logística norte-americana.

SUMMARY

The Author studies the population arithmetical grow in the face of the Verhulst's logistic, showing that the logistic increase goes thru a growing phase in which it may be linked to the arithmetical growth. He works out a mathematical study of the matter, and presents an interesting property of the population arithmetical growth.

He establishes his own method to determinate the logistic curves from known arithmetical growths.

The Author also presents a practical example for the north-american logistic.

BIBLIOGRAFIA

Ref. 1 — Pagano, A., "Lições de Estatística", Vol. 3, pg. 12-13, S. Paulo, 1.951;

Ref. 2 — Moraes, J. C. D., "A Normal Logística", eq. (31), Revista D. A. E., N.º 26, Setembro, 1.955, São Paulo;

Ref. 3 — Moraes, J. C. D., ob. cit., eq. (14);

Ref. 4 — Moraes, J. C. D., ob. cit., eq. (33);

Ref. 5 — Moraes, J. C. D., ob. cit., eq. (8);

Ref. 6 — Moraes, J. C. D., "Sôbre Algumas Propriedades da Função Logística", eq. (5a), Revista D. A. E., N.º 27, Maio, 1.956, São Paulo;

Ref. 7 — Moraes, J. C. D., ob. cit. ref. 6, Cap. 4;

Ref. 8 — Moraes, J .C. D., ob. cit. ref. 2, pg. 69 em diante;

Ref. 9 — Moraes, J. C. D., "A Resolução Geral da Equação Logística", Revista D. A. E., pg. 51 em diante, Vol. 29, Junho, 1.957, São Paulo;

Ref. 10 — Pagano, A., ob. cit. pg. 96.

ERRATA do trabalho "A Resolução Geral da Equação Logística", do mesmo autor, publicado nesta Revista N.º 29, Junho, 1.957.

Página	Linha	Onde se lê	Leia-se
51	27	única razão de apresentação	única razão da apresentação
61	11	e "boa" para h = 1,8 = — 2	é "boa" para h = — 1,8 = — 2
62	eq. (68)	$b = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_0)}{\Delta t_1} = \frac{2(-0{,}668 + 0{,}867)}{8}$	$b = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_0)}{\Delta t_1} = \frac{2(-0{,}668 + 0{,}867)}{1{,}0}$
63	eq. (76)	$P_s = \frac{1.502 + 77.381 - 2 \times 4.149}{1 - \frac{4.149}{1.502}}$	$P_s = \frac{1.502 + 77.381 - 2 \times 4.149}{1 - \frac{4.149}{28.015}}$
64	eq. (77)	$P_s = \frac{70.586}{0{,}85191} = 82.555{,}9$	$P_s = \frac{70.586}{0{,}85191} = 82.855{,}9$
64	4	vale 82.556 hab,	vale 82.856 hab.,