

Proposta de equação para a representação explícita da altura da lâmina d'água em escoamentos livres por condutos de seção circular

- **Data de entrada:**
18/04/2023
- **Data de aprovação:**
30/05/2023

Proposed equation for the explicit representation of the height of the water depth in free flow through circular section conduits

José Nilton de Abreu Costa^{1*} | Luis Henrique Magalhães Costa¹ | Marco Aurélio Holanda de Castro²

DOI: <https://doi.org/10.36659/dae.2024.034>

ORCID ID

Costa JNA  <https://orcid.org/0000-0001-9691-8067>

Costa LHM  <https://orcid.org/0000-0002-1781-4188>

Castro MAH  <https://orcid.org/0000-0001-5134-7213>

Resumo

A vazão de escoamentos livres pode ser calculada pela Equação de Manning, em função da altura da lâmina d'água e de outros parâmetros. Entretanto, é comum que não se consiga determinar a altura da lâmina em função da vazão a partir da referida fórmula. Este trabalho propõe uma equação alternativa para realizar esse cálculo de maneira explícita, deduzida por meio de uma expressão de natureza sigmoideal, que exprime a altura da lâmina d'água (h) como função da vazão (Q) do escoamento, do diâmetro (D) da seção circular, da declividade do conduto (S) e da rugosidade (η) do material constituinte. Para avaliar sua acurácia, aplicou-se a fórmula proposta na resolução de um problema de parâmetros conhecidos D , Q , S e η . Os resultados indicaram erros inferiores a 3,8% em todo o trecho de variação de h , desde zero até $0,94D$. Com base nisso e em sua simplicidade algébrica, considera-se esta proposta útil e de grande valia para a solução de problemas de escoamentos livres em condutos circulares.

Palavras-chave: Escoamento livre. Equação de Manning. Vazão. Lâmina d'água.

Abstract

In free flows, the flow rate can be calculated by the Manning Equation, depending on the height of the water depth and other parameters. However, commonly, it is not possible to determine the height of the water depth as a function of the flow, from the referred formula. The present work proposes an alternative equation to perform this calculation explicitly. The equation proposed here was deduced from an expression, of the sigmoidal type, which expresses the height of the water depth (h), explicitly, as a function of the outflow (Q) of the flow, the diameter (D) of the circular section, the slope of the conduit (S) and the roughness (η) of the material that constitutes it. To evaluate the accuracy of the proposed formula, it was applied to solve a problem with known parameters D , Q , S and η . The results indicated, in the entire stretch of variation of h , from zero to $0.94D$, errors lower than 3.8%. Based on this and on its algebraic simplicity, this proposal is considered useful and of great value in the solution of free flow problems in circular conduits.

Keywords: Free flow. Manning Equation. Flow. Water depth.

¹ Universidade Estadual Vale do Acaraú – Sobral – Ceará – Brasil.

² Universidade Federal do Ceará – Fortaleza – Ceará – Brasil.

* **Autor correspondente:** nilton_deha@yahoo.com.br

1 INTRODUÇÃO

A água é símbolo de vida e sempre foi de grande importância, sendo elemento definidor da localização das civilizações desde a antiguidade. No passado, era comum que as populações se organizassem perto das bacias hidrográficas, onde encontravam as condições necessárias para o desenvolvimento de suas culturas agrícolas, bem como para o uso da água em diversos aspectos (Costa, 2011).

No decorrer dos séculos, a necessidade de uso da água tornou-se mais crescente. Com isso, a relevância da caracterização hidrológica dos cursos d'água foi se tornando cada vez mais evidente, pois se trata de um estudo importante para múltiplas finalidades, como a realização de estimativas de disponibilidade hídrica e do potencial energético, o controle de inundações e o dimensionamento de obras hidráulicas (Tucci, 2012).

Um exemplo de caracterização hidrológica, no campo específico da hidráulica de canais, é a modelagem matemática do escoamento em estruturas como tubulações, canais e rios. Em 1769, o engenheiro francês Antoine de Chézy propôs uma equação que caracterizava o escoamento em tubulações fechadas e canais abertos. Essa equação (Equação 1) retrata a velocidade (v) do escoamento em função do raio hidráulico (R_h) (razão entre a área molhada e o perímetro molhado), da declividade do canal (S) e de uma constante experimental (C), denominada coeficiente de Chézy.

$$v = C \sqrt{R_h S} \quad (1)$$

Em 1889, Robert Manning determinou que, para o escoamento uniforme em canais abertos, C é dado pela razão entre o raio hidráulico elevado a $1/6$ e a rugosidade η do material que constitui as paredes e o fundo do canal. Assim, foi obtida a Equação de Manning (Equação 2).

$$v = \frac{1}{\eta} R_h^{2/3} S^{1/2} \quad (2)$$

A Equação de Manning é uma fórmula empírica, relacionada às equações de resistência do escoamento, e que integra parâmetros geométricos e hidráulicos de um trecho de rio ou canal (Porto, 2006). Atualmente, ela é uma das metodologias de cálculo mais utilizadas por projetistas de países ocidentais no dimensionamento de canais abertos. Na maneira como é apresentada, essa equação pode ser utilizada no cálculo do escoamento uniforme em canais, independentemente da forma geométrica da seção transversal (Goldfarb *et al.*, 2004). No entanto, ressalta-se que este trabalho tem foco nos escoamentos livres em condutos de seção circular.

Limerinos (1970) salienta que a principal questão da aplicação dessa metodologia está relacionada à obtenção do coeficiente de rugosidade de Manning. O parâmetro η , referente às forças de resistência ao escoamento, é obtido empiricamente. Assim, conforme o autor, a rugosidade está relacionada a diversos elementos, como o material do fundo do canal, a irregularidade das margens, a possibilidade de existência de obstruções, a carga de sedimentos, entre outros.

Deve-se, ainda, citar outra questão a ser observada em relação às características do canal: o fato de que as forças resistivas podem oscilar à medida que o nível d'água varia. Quando o nível d'água atinge uma planície de inundação vegetada, por exemplo, a resistência ao escoamento pode variar significativamente em função da presença da vegetação (Alves *et al.*, 2017).

Num escoamento livre em conduto de seção circular (âmbito deste trabalho), pode-se, por meio da Equação de Manning, determinar a velocidade (v) e a vazão (Q) do escoamento em função da altura (h) da lâmina d'água. Não obstante, não se pode dizer o mesmo sobre o procedimento inverso, pois a altura é uma grandeza que não pode ser isolada no primeiro membro da referida equação.

Diante do exposto, torna-se relevante a proposta de uma equação alternativa, por meio da qual seja

possível determinar a altura da lâmina d'água em situações em que se conhece o valor da velocidade ou vazão do escoamento. Nesse sentido, este trabalho apresenta uma alternativa de equação para a realização desse tipo de cálculo nas ocasiões oportunas.

2 OBJETIVO

Este trabalho objetiva apresentar uma proposta de equação para o cálculo da altura da lâmina d'água de maneira explícita, a partir dos valores de vazão, declividade e rugosidade, num conduto de seção transversal circular.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 Escoamento em canais

De acordo com Azevedo Netto *et al.* (1988), um conduto é um tubo, geralmente de seção transversal circular, usado para transporte de fluido. Quando os condutos funcionam com a seção cheia (seção plena), eles em geral estão sob pressão maior que a atmosférica e, quando não, funcionam como canais de superfície livre.

Baptista e Coelho (2010) afirmam que uma classificação geral básica que norteia o estudo da hidráulica diz respeito à pressão reinante no conduto, podendo o escoamento ser forçado ou livre. No primeiro caso, a pressão é sempre diferente da atmosférica; portanto, o conduto tem que ser fechado, como nas tubulações de recalque e sucções das bombas ou redes de abastecimento de água. No escoamento livre, a pressão na superfície do líquido é igual à atmosférica, logo o conduto pode ser aberto, como nos canais fluviais, ou fechado, como nas redes coletoras de esgoto sanitário. Assim, nos escoamentos em condutos forçados as condições de contorno são sempre bem definidas, enquanto podem ser variáveis, no tempo e no espaço, nos escoamentos livres.

Outro aspecto importante a ser realçado é a maior variabilidade das paredes dos condutos, tanto

quanto à forma como quanto à rugosidade, em contraposição à maior uniformidade observada nos condutos utilizados nos escoamentos em carga. Esse quadro também contribui de forma significativa para uma maior complexidade das formulações matemáticas relativas aos escoamentos livres. Apesar dessas diferenças entre os dois tipos de escoamento, os princípios básicos que regem os livres são essencialmente os mesmos daqueles referentes aos forçados (Baptista; Coelho, 2010).

Segundo Akutsu (2012), os tipos de canais podem ser classificados de acordo com diversos critérios, como:

- De acordo com o tipo de contorno da seção: canais de seções abertas (superfície livre exposta ou a “céu aberto”), tais como os rios, canais construídos (canais de irrigação, aquedutos etc.); canais de seções fechadas, tais como as redes de esgotos e galeria de águas pluviais.
- De acordo com a cota de assentamento em relação à cota do terreno: canais de seção aberta, tais como os casos dos rios e canais de irrigação; canais de seção aberta, construídos com a cota acima da cota do terreno, como o caso dos aquedutos romanos; e canais de seção fechada, implantados abaixo do nível do solo, tais como o caso das redes de esgoto e galerias de águas pluviais.
- De acordo com a forma geométrica da seção transversal: canais de seção retangular; canais de seção trapezoidal; canais de seção triangular; canais de seção circular; canais de seções especiais (oval, capacete, arco de círculo etc.); e canais de seções não uniformes ou não simétricas.

Os escoamentos também podem ser classificados em diversas categorias, como: turbulento ou laminar; real ou ideal; reversível ou irreversível; permanente ou variado; uniforme ou não uniforme; rotacional ou irrotacional etc. (Streeter; Wylie, 1982). Compreende-se como regime de escoamento permanente aquele em que as propriedades e

características hidráulicas de determinada seção da canalização não variam ao longo do tempo. Caso contrário, o escoamento é classificado como variável ou não permanente. Entende-se, ainda, como regime de escoamento uniforme aquele em que as propriedades e características hidráulicas não variam ao longo do espaço, ou seja, se mantêm constantes ao longo de um trecho percorrido. O caso oposto é classificado como escoamento variado ou não uniforme (Akutsu, 2012).

Como anteriormente mencionado, este trabalho tem como foco os escoamentos que ocorrem em condutos de seção circular. Desse modo, faz-se necessário analisar a evolução do enchimento do conduto, identificando a velocidade e a vazão como relações unívocas da altura da lâmina d'água.

A Figura 1 representa a seção circular de um conduto de raio R (diâmetro $D = 2R$), em que a altura genérica de uma lâmina d'água é h .

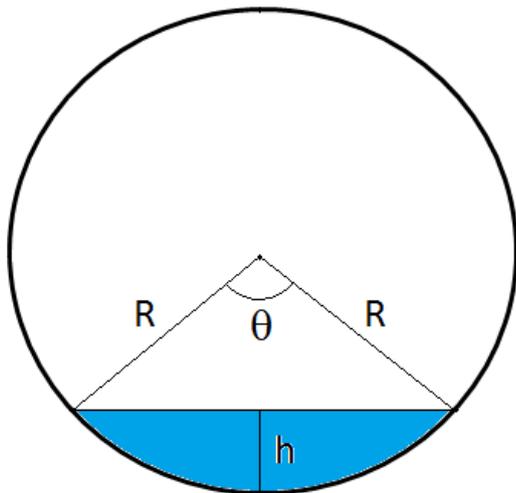


Figura 1 – Seção transversal de um escoamento em conduto circular.

Inicialmente, pode-se identificar que, para cada valor de h ($0 \leq h \leq D$), existe um único valor de ângulo central θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$). Com o auxílio das razões trigonométricas de um triângulo retângulo, pode-se deduzir uma relação entre essas duas grandezas, expressa pela Equação 3.

$$h = \frac{D}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3)$$

A região ocupada pela água na seção transversal (área molhada) é uma figura geométrica conhecida como segmento circular. Sua área (A_m) pode ser calculada por meio da subtração entre a área do setor circular (de raio R e ângulo central θ) e a área do triângulo isósceles correspondente, de lados iguais a R e ângulo interno θ . Assim, pode-se chegar à Equação 4:

$$A_m = \frac{D^2}{8} [\theta - \text{sen}\theta] \quad (4)$$

O perímetro molhado é a linha que limita a área molhada às paredes e o fundo do conduto, não abrangendo a superfície livre da água. No caso da seção circular, P_m é o comprimento de um arco de circunferência de raio R e ângulo central θ , que pode ser calculado pela Equação 5.

$$P_m = \frac{D\theta}{2} \quad (5)$$

O raio hidráulico (R_h) é, portanto, dado pela Equação 6:

$$R_h = \frac{D}{4} \left(\frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta} \right) \quad (6)$$

Substituindo o raio hidráulico na Equação de Manning, obtém-se a Equação 7, que exprime a velocidade (v) como função do ângulo central θ .

$$v = \frac{1}{\eta} \left[\frac{D}{4} \left(\frac{\theta - \text{sen}\theta}{\theta} \right) \right]^{2/3} S^{1/2} \quad (7)$$

Analisando Q em função de θ , pode-se deduzir, a partir da equação da continuidade (Equação 8), que a vazão é dada pela Equação 9.

$$Q = Av \quad (8)$$

$$Q = \frac{1}{\eta} S^{1/2} \frac{D^{8/3}}{2^{13/3}} \frac{(\theta - \text{sen}\theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}} \quad (9)$$

Ao atribuir valores numéricos aos parâmetros η , D e S , é possível construir gráficos que esboçam a variação da velocidade e da vazão em função do ângulo central θ . A Figura 2 mostra, no plano cartesiano, a curva descrita pela Equação 9, isto é, o gráfico da vazão ($Q \times \theta$).

Na Figura 2, pode-se observar que a vazão assume um valor máximo global para algum valor de θ , ou, equivalentemente, para algum valor de h . Matematicamente, esse extremo ocorre quando $\theta = 5,28$ rad. Por meio da Equação 3, conclui-se que o nível de água associado a esse ângulo é $h = 0,9384 D$. Assim, a vazão máxima do escoamento ocorre quando a altura da lâmina d'água é igual a aproximadamente 94% do diâmetro da seção transversal do canal.

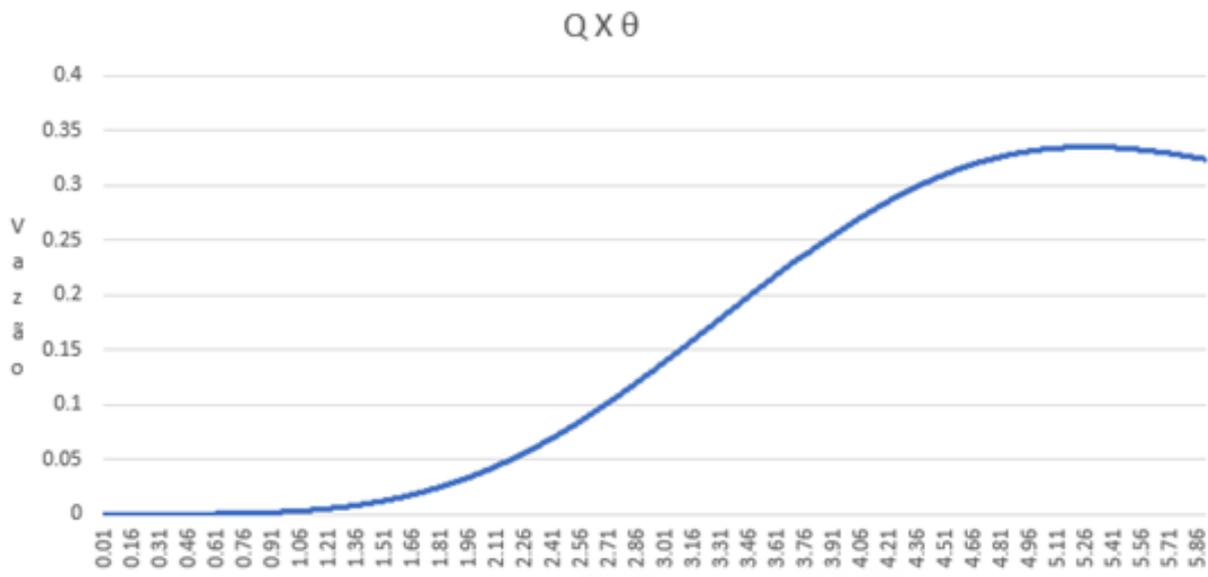


Figura 2 – Gráfico da vazão em função do ângulo central.

3.2 Função sigmoide

A função sigmoide, ou sigmoide, é uma função real de uma variável independente real, do tipo $y = f(x)$, comumente aplicada em áreas como computação e economia. O termo sigmoide se deve à semelhança de formato entre o seu gráfico e a letra S. A expressão matemática do sigmoide consiste numa solução particular da Equação 10, que é uma equação diferencial de variáveis separáveis.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \cdot y \cdot (1 - y) \quad (10)$$

De fato, separando as variáveis, tem-se a Equação 11:

$$\frac{1}{y(1 - y)} dy = \lambda dx \quad (11)$$

Para a obtenção da solução geral, é necessário integrar indefinidamente ambos os membros da Equação 11. Desse modo, chega-se a sua solução geral, dada pela Equação 12:

$$y = \frac{c \cdot e^{\lambda x}}{1 + c \cdot e^{\lambda x}} \quad (12)$$

Para $c = 1$ e $\lambda = 1$, se tem a Equação 13, que é uma solução particular da Equação 10.

$$y = \frac{e^x}{1 + e^x} \quad (13)$$

Ao multiplicar o numerador e o denominador do segundo membro da Equação 13 por e^{-x} , chega-se à Equação 14, que define a função sigmoideal.

$$y = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (14)$$

A função sigmoideal é, ainda, uma função tangente hiperbólica. Pode-se verificar esse fato com o

auxílio de uma série de manipulações algébricas, que resultam na Equação 15 ou, equivalentemente, na Equação 16:

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} \quad (15)$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) \quad (16)$$

A Figura 3 esboça o gráfico da função sigmoideal no intervalo real $[-10, 10]$.

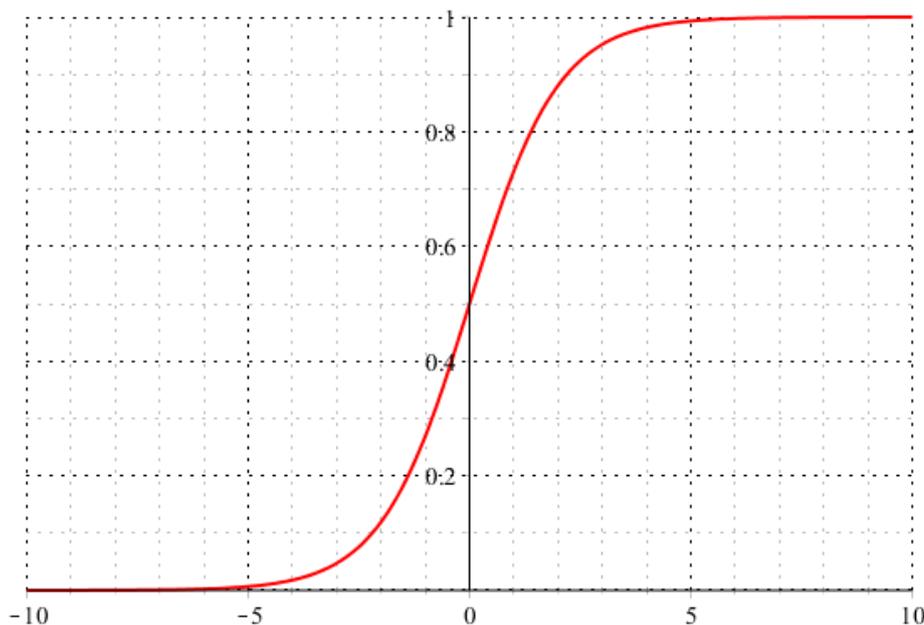


Figura 3 – Gráfico da função sigmoideal.

A Figura 3 evidencia características que podem ser constatadas a partir da expressão da função sigmoideal (Equação 14). O gráfico desse sigmoide possui duas assíntotas horizontais: quando o valor de x aumenta indefinidamente (tendendo a $+\infty$), o valor de y se aproxima indefinidamente de um. Quando o valor de

x diminui indefinidamente (tendendo a $-\infty$), o valor de y se aproxima indefinidamente de zero. Além disso, observa-se que a função sigmoideal é estritamente crescente, uma vez que sua derivada primeira é sempre positiva. Há, ainda, um único ponto de inflexão em todo o seu domínio, localizado na abscissa zero.

A função logística é uma função cuja expressão advém da função sigmoide, por meio da inserção dos parâmetros a , b e c , resultando na Equação 17.

$$y = \frac{a}{1 + e^{-c(x-b)}} \quad (17)$$

Segundo Kosko (1992) *apud* Pedrollo (1999), os termos a , b e c denominam-se, respectivamente, parâmetro de escala, parâmetro de localização e parâmetro de forma. Sua inserção não altera o formato característico do gráfico da função sigmoide. No entanto, a depender dos valores adotados para a , b e c , o gráfico da função logística pode se tornar mais achatado ou alongado, na horizontal ou na vertical, ou, ainda, ser deslocado para a direita ou para a esquerda.

O parâmetro de escala (a) interfere diretamente no conjunto-imagem da função logística. Seguindo a lei de associação dada pela Equação 17, tem-se que a imagem da função é o intervalo aberto $]0, a[$. O parâmetro de localização (b) é a abscissa do ponto de inflexão do gráfico, isto é, o local em que se dá a inversão da concavidade da curva. O parâmetro de forma (c) é o alongamento ou achatamento do gráfico na direção horizontal. Segundo Pedrollo (1999), o valor de c determina o quão suave ou abrupta é a passagem entre os valores mínimo e máximo da função logística.

4 METODOLOGIA

Para um determinado canal de seção retangular, os parâmetros η , S e D podem ser considerados constantes. Desse modo, a Equação 9 pode ser reescrita como o produto entre uma constante k (Equação 18) e uma função $g(\theta)$ (Equação 19), cuja variável é o ângulo central da seção transversal do escoamento.

$$k = \frac{1}{\eta} S^{1/2} \frac{D^{8/3}}{2^{13/3}} \quad (18)$$

$$g(\theta) = \frac{(\theta - \text{sen}\theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}} \quad (19)$$

Portanto, a vazão do escoamento é dada pela Equação 20:

$$Q = k \cdot g(\theta) \quad (20)$$

A partir da Equação 3, pode-se deduzir que θ é uma função injetora da variável h/D , que representa a altura relativa da lâmina d'água, ou seja, o percentual de h em relação ao diâmetro D . Essa função é descrita pela Equação 21:

$$\theta = 2 \arccos \left(1 - 2 \frac{h}{D} \right) \quad (21)$$

Ou, simplesmente:

$$\theta = f \left(\frac{h}{D} \right) \quad (22)$$

Assim, tem-se que:

$$Q = k \cdot g \left(f \left(\frac{h}{D} \right) \right) \quad (23)$$

Diante disso, afirma-se que a vazão é o produto da multiplicação entre a constante k e uma função da altura relativa da lâmina d'água, conforme a Equação 24.

$$Q = k \cdot G \left(\frac{h}{D} \right) \quad (24)$$

Dado que k é constante, a função $G(h/D)$ é a responsável pelo formato do gráfico da vazão (Figura 2). Considerando a variação de Q dentro do subdomínio do intervalo $0 \leq h/D \leq 0,94$, pode-se perceber algumas semelhanças entre esse gráfico e o gráfico da função sigmoide (Figura 3). Ambas as curvas são estritamente crescentes e possuem um ponto de inflexão que as separa em dois trechos:

um à esquerda, de concavidade positiva, e outro à direita, de concavidade negativa.

Diante dessas semelhanças, propôs-se a determinação de uma fórmula que expresse a vazão do escoamento (Q) como uma função sigmoidal da altura relativa da lâmina d'água h/D . A vantagem do uso dessa fórmula está relacionada ao fato de que a função sigmoide (Equação 14) é invertível. Em razão dessa invertibilidade, pode-se expressar h como uma função explícita de Q , o que seria impossível de fazer, para canais de secção circular, a partir da equação de Manning.

4.1 Proposta de equação para a altura (h) em função da vazão (Q)

Partindo da Equação 24, ao substituir a função $G(h/D)$ por uma expressão de natureza sigmoidal, obtém-se a Equação 25:

$$Q = k \cdot \text{sig}\left(\frac{h}{D}\right) \quad (25)$$

Com o intuito de obter um bom ajuste do gráfico da função $G(h/D)$ ao gráfico de $\text{sig}(h/D)$, escolheu-se para esta última uma expressão idêntica à lei da função logística, resultando na Equação 26:

$$\text{sig}\left(\frac{h}{D}\right) = \frac{a}{1 + e^{-c\left(\frac{h}{D} - b\right)}} \quad (26)$$

Dessa forma, o próximo procedimento a ser realizado é a determinação dos parâmetros a , b e c , de modo que os valores de vazão estimados pela Equação 25 reproduzam, com o melhor nível de acurácia possível, os valores calculados a partir da Equação de Manning.

Inicialmente, buscou-se determinar os valores de a , b e c de modo que a aproximação entre as funções $\text{sig}(h/D)$ e $G(h/D)$ pudesse ser considerada satisfatória em todo o intervalo de interesse: $0 \leq h/D \leq 0,94$. No entanto, somente pôde ser identificada uma boa aproximação entre essas funções no inter-

valo $0,46 \leq h/D \leq 0,94$. Dentro desse subintervalo, os valores mais adequados encontrados para os parâmetros foram os seguintes: $a = 7,20$, $b = 0,54$ e $c = 6,80$. Substituindo esses valores na Equação 26, chegou-se à Equação 27.

$$\text{sig}\left(\frac{h}{D}\right) = \frac{7,20}{1 + e^{-6,8\left(\frac{h}{D} - 0,54\right)}} \quad (27)$$

Realizando algumas manipulações algébricas, obteve-se a Equação 28:

$$\text{sig}\left(\frac{h}{D}\right) = \frac{7,20}{1 + 39,33e^{-6,8\frac{h}{D}}} \quad (28)$$

Substituindo o resultado da Equação 28 no segundo membro da Equação 25, chega-se à Equação 29, que propõe uma alternativa para a estimativa da vazão Q num canal de secção retangular em função da rugosidade η , da declividade S , do diâmetro D e da altura da lâmina d'água h , no intervalo $0,46 D \leq h \leq 0,94 D$.

$$Q = \frac{7,20k}{1 + 39,33e^{-6,8\frac{h}{D}}} \quad (29)$$

Como mencionado anteriormente, a vantagem dessa última fórmula é sua invertibilidade, isto é, a possibilidade de expressar h como uma função de η , S e Q . Logo, ao isolar h no primeiro membro, obtém-se a Equação 30:

$$h = 0,147D \cdot \ln\left(\frac{39,33Q}{7,20k - Q}\right) \quad (30)$$

A Equação 29 não é aplicável no restante do domínio de interesse – o intervalo $0 \leq h/D < 0,46$ – e, portanto, a Equação 30 também não o é. Em face disso, buscou-se outra função, de natureza distinta, que pudesse ser aproximada da função $G(h/D)$ nesse intervalo. Escolheu-se uma função potencial, conforme a Equação 31.

$$pot\left(\frac{h}{D}\right) = m\left(\frac{h}{D}\right)^n \quad (31)$$

Assim, nesse intervalo, a vazão é dada pela Equação 32:

$$Q = k \cdot pot\left(\frac{h}{D}\right) \quad (32)$$

Desse modo, nessa etapa do trabalho foi realizada uma busca pelos valores mais adequados para os parâmetros m e n . Os valores encontrados para essas incógnitas, de modo que fosse obtida a melhor aproximação possível entre as funções $pot(h/D)$ e $G(h/D)$, foram $m = 14,415$ e $n = 2,07$. Substituindo esses valores nas equações 31 e 32, chegou-se à Equação 33:

$$Q = 14,415k\left(\frac{h}{D}\right)^{2,07} \quad (33)$$

Fazendo as operações necessárias para isolar h no primeiro membro, obtêm-se a Equação 34:

$$h = 0,276D\left(\frac{Q}{k}\right)^{0,483} \quad (34)$$

Finalmente, a síntese das equações 29 e 33 apresenta a Equação 35, uma proposta para o cálculo da vazão num conduto de seção circular em função da altura da lâmina d'água:

$$Q = \begin{cases} 14,415k\left(\frac{h}{D}\right)^{2,07} & \text{se } 0 \leq \frac{h}{D} < 0,46 \\ \frac{7,20k}{1+39,33e^{-6,8\frac{h}{D}}} & \text{se } 0,46 \leq \frac{h}{D} \leq 0,94 \end{cases} \quad (35)$$

4.2 Aplicação da equação proposta

Para avaliar a acurácia da equação proposta, foi escolhido um problema de hidráulica de canais a cuja

resolução aplicou-se a fórmula demonstrada como produto desta pesquisa. A situação em questão envolve um canal de seção circular, em que são conhecidos o diâmetro, a declividade e a rugosidade de suas paredes e fundo.

Escolheram-se diversos valores de alturas de lâmina d'água h , variando de 0 a 94% do diâmetro da seção do canal. Para cada uma dessas lâminas, foi calculada a vazão Q por meio da Equação de Manning. Para cada vazão assim encontrada, recalculou-se, por meio das Equações 30 e 34, o valor de h , obtendo uma altura estimada h_{est} , que foi comparada ao seu valor original.

O erro relativo associado à estimativa da altura da lâmina d'água em cada caso foi definido pela Equação 36. Calcularam-se, então, esses erros e, a partir desses, a confiabilidade dos resultados fornecidos pela equação ora proposta.

$$Erro = \frac{h_{est} - h}{h} \times 100\% \quad (36)$$

O problema escolhido, apresentado por Carvalho e Oliveira (2008, p. 31), em seu Capítulo 1, Seção 1.2.9.1 (exercícios resolvidos), trata de uma galeria de águas pluviais de seção circular com diâmetro $D = 1$ m, rugosidade $\eta = 0,013$ e declividade $S = 0,00248$ m/m. O transporte de água ocorre em condições de regime permanente uniformes.

5 RESULTADOS

A fórmula proposta neste estudo foi aplicada ao problema de Carvalho e Oliveira (2008), e os dados obtidos foram inseridos em uma planilha do Excel para facilitar e automatizar os cálculos (Tabela 1). Foram enumeradas as alturas das lâminas d'água, começando em $h = 0,02$, em progressão aritmética crescente de razão igual a 0,02, até chegar na lâmina de maior vazão. Calculou-se a vazão para cada um desses valores de h por meio da equação de Manning e, em seguida, foi recalculada

lada a altura da lâmina d'água, a partir desses valores de vazão, utilizando a equação proposta. Posteriormente, foi calculado o erro entre o valor

original da altura da lâmina d'água e o valor recalculado pela fórmula proposta, por meio da Equação 36.

Tabela 1 – Valores reais e aproximados da altura lâmina d'água em função da vazão.

| h (m) | Q (m³/s) | hest (m³/s) | Erro (%) |
|-------|-------------|-------------|--------------|
| 0,02 | 0,000802382 | 0,019681383 | -1,593082953 |
| 0,04 | 0,003557916 | 0,04040796 | 1,019900264 |
| 0,06 | 0,00845734 | 0,061389394 | 2,315656467 |
| 0,08 | 0,015572688 | 0,082442477 | 3,053095928 |
| 0,10 | 0,024927811 | 0,103475578 | 3,475577952 |
| 0,12 | 0,036518211 | 0,124431835 | 3,693195757 |
| 0,14 | 0,050320075 | 0,145271513 | 3,765366654 |
| 0,16 | 0,066295265 | 0,165964604 | 3,727877568 |
| 0,18 | 0,084394394 | 0,18648714 | 3,60396694 |
| 0,20 | 0,104558878 | 0,206819147 | 3,409573573 |
| 0,22 | 0,2672237 | 0,226943401 | 3,156091468 |
| 0,24 | 0,150811808 | 0,246844635 | 2,8519314 |
| 0,26 | 0,176748192 | 0,266508998 | 2,503460835 |
| 0,28 | 0,20444719 | 0,285923673 | 2,115597561 |
| 0,30 | 0,233819593 | 0,305076599 | 1,692199678 |
| 0,32 | 0,264771682 | 0,323956257 | 1,236330318 |
| 0,34 | 0,297205504 | 0,342551504 | 0,750442312 |
| 0,36 | 0,331019087 | 0,360851436 | 0,236510013 |
| 0,38 | 0,366106607 | 0,378845276 | -0,303874801 |
| 0,40 | 0,402358497 | 0,396522272 | -0,869432074 |
| 0,42 | 0,439661521 | 0,41387161 | -1,459140491 |
| 0,44 | 0,477898811 | 0,430882331 | -2,07219758 |
| 0,46 | 0,516949861 | 0,466463302 | 1,405065663 |
| 0,48 | 0,556690484 | 0,484378639 | 0,912216524 |
| 0,50 | 0,596992735 | 0,502141248 | 0,428249533 |
| 0,52 | 0,637724786 | 0,519819948 | -0,034625456 |
| 0,54 | 0,678750756 | 0,537481828 | -0,466328075 |
| 0,56 | 0,719930488 | 0,555193363 | -0,858327996 |
| 0,58 | 0,761119263 | 0,573021442 | -1,203199698 |
| 0,60 | 0,802167439 | 0,591034337 | -1,494277199 |
| 0,62 | 0,842919999 | 0,609302606 | -1,725386183 |
| 0,64 | 0,883215984 | 0,6278999 | -1,890640655 |
| 0,66 | 0,92288779 | 0,646903615 | -1,984300694 |
| 0,68 | 0,961760268 | 0,666395246 | -2,000699084 |
| 0,70 | 0,9996496 | 0,686460176 | -1,934260552 |
| 0,72 | 1,036361837 | 0,70718643 | -1,779662528 |

continua...

Tabela 1 – Continuação...

| h (m) | Q (m³/s) | hest (m³/s) | Erro (%) |
|-------------|--------------------|-------------------|--------------------|
| 0,74 | 1,071691015 | 0,728661506 | -1,532228912 |
| 0,76 | 1,105416651 | 0,750965711 | -1,1887222 |
| 0,78 | 1,13730037 | 0,774159135 | -0,748828798 |
| 0,80 | 1,167081256 | 0,798257143 | -0,217857102 |
| 0,82 | 1,194469242 | 0,823185342 | 0,388456303 |
| 0,84 | 1,219135407 | 0,848698771 | 1,035567953 |
| 0,86 | 1,240697108 | 0,874242183 | 1,656067742 |
| 0,88 | 1,258693987 | 0,898725384 | 2,127884555 |
| 0,90 | 1,272546543 | 0,920214479 | 2,246053238 |
| 0,92 | 1,281477846 | 0,93565085 | 1,701179359 |
| 0,94 | 1,284345624 | 0,94092234 | 0,098121248 |

Destacada em negrito na última linha da Tabela 1 está a ocasião em que a altura da lâmina d'água corresponde a 94% do diâmetro, o que configura a vazão máxima. Observa-se, na quarta coluna, que os erros listados possuem valores consideravelmente pequenos quando comparados aos valores reais de lâmina d'água. Esse fato é identificável pois nenhum erro supera, em valor absoluto, a medida de 3,8%. Assim, conclui-se que a utilização da

fórmula proposta para encontrar explicitamente a lâmina d'água pela vazão pode resultar em valores com boa aproximação.

Na Figura 4, elaborada com as informações da Tabela 1, encontram-se os gráficos da altura real da lâmina d'água e da altura estimada pela fórmula proposta, em função dos valores de vazão, que variam de zero até o valor de vazão máxima.

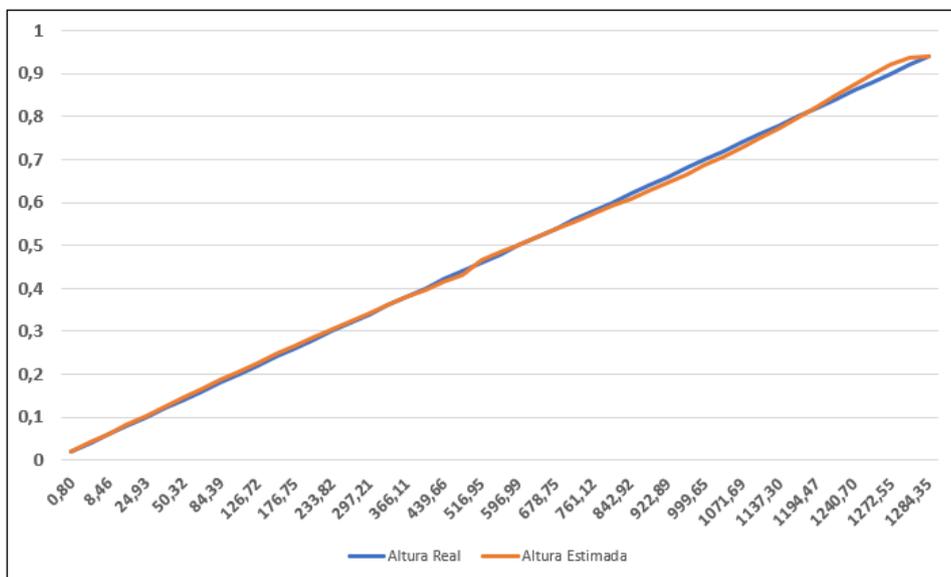


Figura 4 – Comparação entre as alturas de lâmina d'água real e estimada.

A linha em vermelho representa os valores aproximados de altura da lâmina d'água, estimados pelas equações 30 e 34. Por sua vez, a linha azul representa os valores reais de altura da lâmina d'água, associados aos valores de vazão contidos no eixo horizontal e calculados pela Equação de Manning. A proximidade entre as curvas é notável: há uma quase sobreposição entre elas por um longo trecho, correspondente ao intervalo de valores de lâmina d'água entre zero e 45% do diâmetro.

A divergência entre as curvas é mais acentuada no trecho final, próximo ao ponto de vazão máxima. Não obstante, conforme as informações da Tabela 1, os erros percentuais nesse trecho não ultrapassam a medida de 2,3%. Convém destacar que, para alturas de lâminas próximas a 0,45 D e 0,46 D, há um curto trecho em que a inclinação do gráfico é mais acentuada. Isso se deve ao fato de que nesse intervalo ocorre a mudança do uso da Equação 30 para a Equação 34, no cálculo aproximado das alturas de lâmina d'água.

Finalmente, vale salientar que a vazão máxima calculada pela Equação de Manning é praticamente igual à vazão máxima calculada pela Equação 33, proposta neste estudo. Esse fato pode, ainda, ser evidenciado com a coincidência entre as extremidades finais das linhas azul e vermelha na Figura 4.

6 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como propósito apresentar uma alternativa para o cálculo da altura da lâmina d'água num conduto de secção circular em função da vazão. A metodologia foi exitosa na determinação da proposta e na precisão dos valores obtidos a partir desta. Em face disso, considera-se evidente a contribuição da fórmula apresentada neste estudo para a realização dos cálculos e a solução dos problemas aos quais ela pode ser aplicada. Trata-se, portanto, de uma ferramenta útil e de grande valia na abordagem de escoamentos livres de secção circular, a exemplo das tubulações de esgoto.

A equação proposta teve a sua acurácia testada nesta investigação. A partir de um exemplo resolvido, no qual se aplicou tanto a Equação de Manning como a fórmula apresentada, obtiveram-se valores muito bem aproximados no que se refere às alturas da lâmina d'água. Na análise comparativa entre os valores reais e estimados, observou-se que os erros relativos obtidos apresentaram valores, em módulo, inferiores a 3,8%.

A vantagem da fórmula proposta neste trabalho, além da realização de boas estimativas de valores de lâmina d'água, está na simplicidade de se trabalhar com a altura h isoladamente no primeiro termo. Por conseguinte, é possível estimar a altura da lâmina com nível satisfatório de acurácia, a partir do valor de vazão (inicialmente conhecido ou calculado). Como mencionado anteriormente, isso não seria possível apenas com a Equação de Manning. Nesse caso, seria necessário o uso de métodos numéricos ou ferramentas computacionais para tal propósito.

7 CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

Concepção do Artigo: Costa JNA, Costa LHM; **Metodologia:** Costa JNA, Castro MAH; **Discussão dos Resultados:** Costa JNA, Costa LHM, Castro MAH; **Redação – Primeira Versão:** Costa JNA; **Redação – Revisão & Edição:** Costa JNA, Costa LHM.

8 REFERÊNCIAS

- AKUTSU, J. **Hidráulica geral e aplicada**. São Carlos: Universidade Federal de São Carlos, 2012.
- ALVES, L. G. S. *et al.* Estimativa do coeficiente de Manning para cálculo de vazão em regime sob efeito de remanso hidráulico na bacia amazônica. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 22., 2017, Florianópolis. **Anais** [...]. Porto Alegre: Associação Brasileira de Recursos Hídricos, 2017. SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 12., Florianópolis, 2017. p. 1-7. Disponível em: <https://files.abrhidro.org.br/Eventos/Trabalhos/60/PAP022828.pdf>. Acesso em: 31 jan. 2024.
- AZEVEDO NETTO, J. M. de *et al.* **Manual de hidráulica**. 8. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.
- BAPTISTA, M. B.; COELHO, M. M. L. P. **Fundamentos de engenharia hidráulica**. 3. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2010.

CARVALHO, J. de A; OLIVEIRA, L. C. de. **Instalações de bombeamento para irrigação**: hidráulica e consumo de energia. Lavras: Editora UFLA, 2008.

COSTA, J. N. de A. **Análise da outorga de direito de uso dos recursos hídricos no estado do Ceará**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

GOLDFARB, M. C. *et al.* Escoamento uniforme em canais circulares lisos. Parte II: comparação entre o método de Kazemipour e a equação de Manning. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 8, n. 2-3, p. 180-183, 2004. <https://doi.org/10.1590/S1415-43662004000200003>

KOSKO, B. **Neural networks and fuzzy systems**: a dynamical systems approach to machine intelligence. Nova Jersey: Prentice Hall, 1992.

LIMERINOS, J. T. **Determination of the Manning coefficient from measured bed roughness in natural channels**. Washington, DC: United States Government Printing Office, 1970.

PORTO, R. de M. **Hidráulica básica**. 4 ed. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 2006.

PEDROLLO, O. C. Previsão hidrológica de curto prazo com chuvas efetivas determinadas pela função sigmoide. **Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, Porto Alegre, v. 4, n. 2, p. 19-30, 1999. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/232492>. Acesso em: 31 jan. 2024.

STREETER, V. L; WYLIE, E. B. **Mecânica dos fluidos**. 7. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1982.

TUCCI, C. E. M. (Org.). **Hidrologia**: ciência e aplicação. 4 ed. Porto Alegre: UFRGS; ABRH, 2012.