

# BOLETIM

DA

# REPARTIÇÃO DE AGUAS E ESGOTOS

de S. Paulo

Diretor: Eng.<sup>o</sup> Oswaldo B. Thompson

NUMERO 9

Publicação Periodica  
S. Paulo — Março de 1940

ANO IV

## Cupolas de Revolução

de pequenas espessuras simetricamente carregadas em  
relação ao eixo vertical

*J. M. de Toledo Malta*

eng. chefe da 3.a S. T.

Antes de abordar o assunto, convem advertir que este artigo não tem pretensão alguma de apresentar novidades. Na obra classica, e hoje um tanto esquecida, de Maurice Levy sobre a grafo-estatica, encontra-se o essencial da doutrina hoje aqui reeditada.

Usando antigas notas de nosso uso pessoal e atendendo a instancias de diversos colegas, aos quais a questão interessa, achamos que não seria de todo inutil divulgar entre os leitores do "Boletim" essa compilação que nos tem prestado bons serviços em multiplas applicações.

O que mais recomenda o metodo de Maurice Levy é a sua perfeita generalidade, dentro das restrições definidas no titulo. Qualquer forma de cupola, qualquer sistema de cargas, analisam-se com rigor e facilidade contanto que se possam exprimir como funções de coordenadas cartesianas ou polares. A continuidade não é necessaria. Uma unica circumstancia tem até agora impedido a preferencia deste metodo sobre outros mais vulgarizados, embora evidentemente inferiores: é a exigencia de um minimo de destreza no manejo das diferenciais. Assim mesmo procuramos, quanto possivel, aplainar esse pequeno obstaculo, transformando as equações fundamentais de Maurice Levy em formulas imediatamente applicaveis aos casos mais usuais.

### Teoria Geral

As estruturas de que trataremos só apresentam esforços internos uniformemente distribuidos. A sollicitação interna, em qualquer ponto

de uma cupola, ficará perfeitamente determinada quando tivermos calculado (\*) esses esforços elementares em duas secções normais arbitrariamente escolhidas. A própria natureza do problema em apreço indica as direcções preferiveis: segundo os páraellos e segundo os meridianos. Resulta da simetria das cargas, e da forma, que não ha esforços tangenciais nessas direcções, as quais, por isso mesmo, são direcções principais em toda a cupola.

A fig. 1 representa a geratriz de uma cupola referida ao eixo de revolução  $Oy$  e a um eixo horizontal arbitrario  $Ox$  situado acima do fecho. Os  $yy$  positivos medem-se de cima para baixo e os  $xx$  da origem para fóra. A mesma convenção de sinais estende-se ás forças exteriores verticais e horizontais:

Sejam:

- $\varepsilon$  a espessura da cupola geralmente constante, porem sempre muito pequena em relação ás demais dimensões;
- $\omega$  o seu peso especifico;

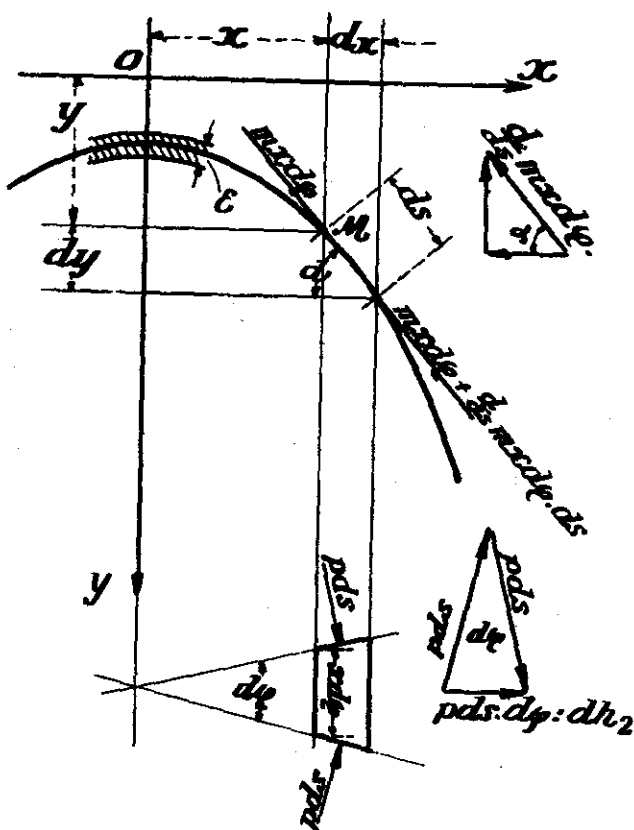


Fig. 1

(\*) Aqui, implicitamente, intervem a seguinte hipotese: as ações perifericas são despreziveis em comparação com os esforços internos, donde o estado elastico duplo, ou plano.

$X, Y$ , as cargas, respectivamente horizontal e vertical, por unidade de superficie da cupola;

$m$  o esforço normal dirigido segundo o meridiano, por unidade linear do paralélo.

$p$  o esforço normal dirigido segundo o paralélo, por unidade linear do meridiano.

Quanto aos sinais de  $m$  e  $p$ , convencionou-se que o sinal "mais" corresponde a uma compressão.

Analisemos o equilibrio de um elemento situado no ponto  $M$  de coordenadas  $x, y$ , de comprimento  $ds$ , segundo a geratriz, e limitado por um fuso de angulo diedro  $d\varphi$ . A figura mostra-nos as forças axiais applicadas nas quatro faces do elemento considerado. Os esforços normais  $m$  dão uma resultante

$$\frac{d}{ds} mx d\varphi ds$$

fazendo um angulo  $\alpha = \text{arc tang } \frac{dy}{dx}$  com o eixo horizontal.

Essa resultante decompõe-se em suas componentes horizontal e vertical, iguais respectivamente a:

$$dh_1 = - \frac{d}{ds} mx d\varphi ds \cos\alpha$$

$$= - ds \cdot d\varphi \frac{d}{ds} mx \frac{dx}{ds}$$

$$dv = - \frac{d}{ds} mx \cdot d\varphi ds \sin\alpha$$

$$= - ds \cdot d\varphi \cdot \frac{d}{ds} mx \frac{dy}{ds}$$

Os esforços normais  $p$  dão uma resultante horizontal

$$dh_2 = p \cdot ds \cdot d\varphi$$

As forças exteriores que atúam sobre o elemento considerado são:

$$\text{horizontal } dX = Xx \cdot ds \cdot d\varphi$$

$$\text{vertical } dY = Yx \cdot ds \cdot d\varphi + \omega \varepsilon x \cdot ds \cdot d\varphi$$

Escrevendo-se agora

$$dY + dv = 0, \quad dX + dh_1 + dh_2 = 0$$

isto é, as duas condições de equilibrio do elemento, e cancelando-se o fator comum  $ds \cdot d\varphi$ , resultam as duas equações diferenciais seguintes que são as de Maurice Levy

$$\frac{d}{ds} mx \frac{dy}{ds} = Yx + \omega \epsilon x \quad (1)$$

$$p = \frac{d}{ds} mx \frac{dx}{ds} - Xx$$

Para maior facilidade das aplicações preferimos escrever essas equações sob a forma abaixo, por ser mais explicita:

$$m = \frac{\int Yx \, ds + \omega \epsilon \int x \, ds + C}{x \frac{dy}{ds}} \quad (2)$$

$$p = mx \frac{d^2x}{dy^2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + (Y + \omega \epsilon) x \frac{dx}{dy} - Xx$$

A primeira determina imediatamente  $m$  por simples integração. Apresenta-se ahi uma constante  $C$  cujo valor será obtido, em geral, da seguinte maneira.

Seja  $Q$  a soma total de todas as cargas verticais applicadas sobre a cupola (peso proprio inclusive) do paralelo  $M$  de coordenadas  $x_0, y_0$ , para cima. Esse peso  $Q$ , distribuido sobre uma circunferencia  $2\pi x_0$ , dará no ponto  $M$  um esforço axial

$$m_0 = \frac{Q}{2\pi x_0 \operatorname{sen} \alpha_0} = \frac{Q}{2\pi x_0} \left[ \frac{ds}{dy} \right] x = x_0$$

chamando-se  $K_0$  o valor particular da expressão  $\int Yx \, ds + \omega \epsilon \int x \, ds$  quando se faz  $x = x_0$ , a primeira das equações (2) nos dará:

$$C = -K + \frac{Q}{2\pi}$$

Determinada, assim, a expressão de  $m$  achar-se-á por meio da segunda equação (2) a expressão correspondente de  $p$ .

A geratriz de qualquer cupola, compõe-se, por via de regra pratica, unicamente de linhas rétas e de arcos de circulo. As equações supra, em coordenadas cartesianas ortogonais, applicam-se comodamente aos trechos retilineos, isto é, ás superficies conicas em geral.

Para os trechos de contorno circular será muito mais conveniente o emprego de coordenadas polares.

Eis porque trataremos separadamente as duas especies usuais de geratriz.

### Geratriz Retilinea

1. *Cone, vertice acima.* A posição da geratriz  $OA$  em relação aos eixos coordenados é como se vê na fig. 2. A origem coincide com o vertice. Chama-se  $\alpha$  o angulo da geratriz com o plano horizontal. Temos portanto:

$$y = x \operatorname{tang} \alpha \quad \frac{dx}{dy} = \operatorname{cotg} \alpha \quad \frac{d^2x}{dy^2} = 0 \quad x = y \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \alpha \quad ds = \frac{dx}{\operatorname{cos} \alpha} = \frac{dy}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Estas relações, introduzidas nas equações (2), darão as formulas de  $m$  e  $p$ , quer em função de  $x$ , quer de  $y$ .

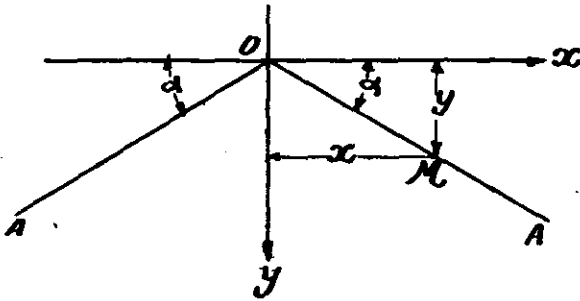


Fig. 2

Damol-as das duas maneiras, que cada uma se recomenda conforme o caso a ser resolvido.

1.º) Em função de  $x$

$$\boxed{m = \frac{\omega \epsilon x^2 + 2 \int Yx dx + C_1}{x \operatorname{sen} 2\alpha}} \quad (3)$$

$$p = (Y + \omega \epsilon) x \operatorname{cotg} \alpha - Xx$$

2.º) Em função de  $y$

$$\boxed{m = \frac{\omega \epsilon y^2 + 2 \int Yy dy + C_2}{2y \operatorname{sen}^2 \alpha}} \quad (3) \text{ bis}$$

$$p = y \operatorname{cotg} \alpha [(Y + \omega \epsilon) \operatorname{cotg} \alpha - X]$$

*Determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$*

Reportando-nos ao metodo geral exposto acima, sejam

$$K_1 = 2 \int Yx dx \quad \text{para } x = x_0$$

$$K_2 = 2 \int Yy dy \quad \text{para } y = y_0$$

Teremos então:

$$C_1 = - (K_1 + \omega \epsilon x_0^2) + \frac{Q \operatorname{cos} \alpha}{\pi}$$

$$C_2 = - (K_2 + \omega \epsilon y_0^2) + \frac{Q \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \alpha}{\pi}$$

É de notar-se que, quando  $\alpha = 45^\circ$ , tem-se  $x = y$ , donde a identidade das duas formulas (3) e (3) bis, e  $C_1 = C_2$ .

2. *Cone, vertice abaixo.* Na fig. 3 mostra-se a posição da geratriz em relação aos eixos. O vertice  $O'$  acha-se a uma altura  $h$  abaixo do eixo  $Ox$ .

$$y = h - x \operatorname{tang.} \alpha \qquad x = (h - y) \operatorname{cotg.} \alpha$$

$$\frac{dx}{dy} = - \operatorname{cotg} \alpha \qquad \frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

$$\frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \alpha \qquad ds = \frac{dy}{\operatorname{sen} \alpha} = - \frac{dx}{\operatorname{cos} \alpha}$$

Introduzidas essas relações nas equações fundamentais, obtêm-se as formulas seguintes:

1.º) Em função de  $x$ :

$$\boxed{m = \frac{-\omega \varepsilon x^2 - 2 \int Yx \, dx + C_1}{x \operatorname{sen} 2\alpha} \qquad p = -(Y + \omega \varepsilon) x \operatorname{cotg} \alpha - Xx} \qquad (4)$$

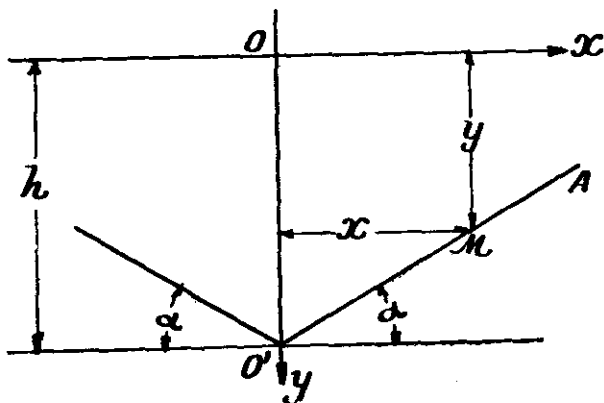


Fig. 3

2.º) Em função de  $y$

$$\boxed{m = \frac{\omega \varepsilon y(2h - y) + 2 \int Y(h - y) \, dy + C_2}{2(h - y) \operatorname{sen}^2 \alpha} \qquad p = -(h - y) \operatorname{cotg} \alpha [(Y + \omega \varepsilon) + X]} \qquad (4) \text{ bis}$$

*Determinação das constantes  $C_1$  e  $C_2$*

Ponhamos:

$$2 \int Yx \, dx = K_1 \qquad \text{para } x = x_0$$

$$2 \int Y(h - y) dy = K_2 \quad \text{para } y = y_0$$

Procedendo-se como no caso anterior, acha-se:

$$C_1 = K_1 + \omega \varepsilon x_0^2 + \frac{Q \cos \alpha}{\pi}$$

$$C_2 = - [K_2 + \omega \varepsilon y_0 (2h - y_0)] + \frac{Q \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tang} \alpha}{\pi}$$

3. *Cilindro.* Seja  $r$  o raio do cilindro de eixo vertical, conforme fig. 4.

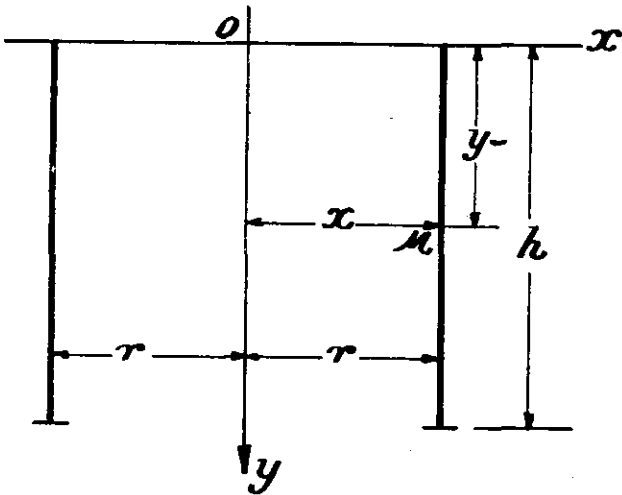


Fig. 4

$$x = r \quad \frac{dy}{ds} = 1 \quad \frac{dx}{dy} = 0 \quad \frac{d^2x}{dy^2} = 0$$

Sendo as paredes verticais, por hipótese, é necessário que se tenha  $Y = 0$ . Si  $q$  é a carga vertical aplicada sobre o alto das paredes por unidade linear, as equações (2) conduzem às formulas seguintes:

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \omega \varepsilon y + q \\ p &= - Xr \end{aligned}} \quad (5)$$

Si o vaso cilindrico está cheio de um liquido de peso especifico (b) até o nivel  $Ox$ , então  $X = \delta y$  e  $p = - Xr = - \delta r y$ , resultado conhecido.

### Geratriz circular

1. — O centro do arco gerador póde achar-se em qualquer posição relativamente aos eixos coordenados. A fig. 5 representa o arco

$AB$ , no quadrante das direções positivas de  $Ox$  e  $Oy$ ;  $a$  e  $b$  são, respectivamente, a abcissa e a ordenada do centro  $C$ .

Passando, daqui por diante, ao emprego de coordenadas polares, elegemos para eixo de referencia a vertical passando por  $C$  e para polo, o centro  $C$ . Seja  $r$  o raio do arco gerador. A posição de um ponto qualquer  $M$  de coordenadas  $x, y$ , da cupola, poderá ser determinada pelo angulo  $\varphi$ , medido no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio, entre o raio  $CM$  e a vertical  $CO$ . Teremos então :

$$\begin{array}{ll} x = a + r \operatorname{sen} \varphi & dx = r \cos \varphi \cdot d\varphi \\ y = b - r \cos \varphi & dy = r \operatorname{sen} \varphi \cdot d\varphi \\ s = s_0 + r\varphi & ds = r d\varphi \end{array}$$

Donde:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{cotg} \varphi \quad \frac{dy}{ds} = \operatorname{sen} \varphi \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{d\varphi} \operatorname{cotg} \varphi \frac{d\varphi}{dy} = - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \cdot \frac{1}{r \operatorname{sen} \varphi} = - \frac{1}{r \operatorname{sen}^3 \varphi}$$

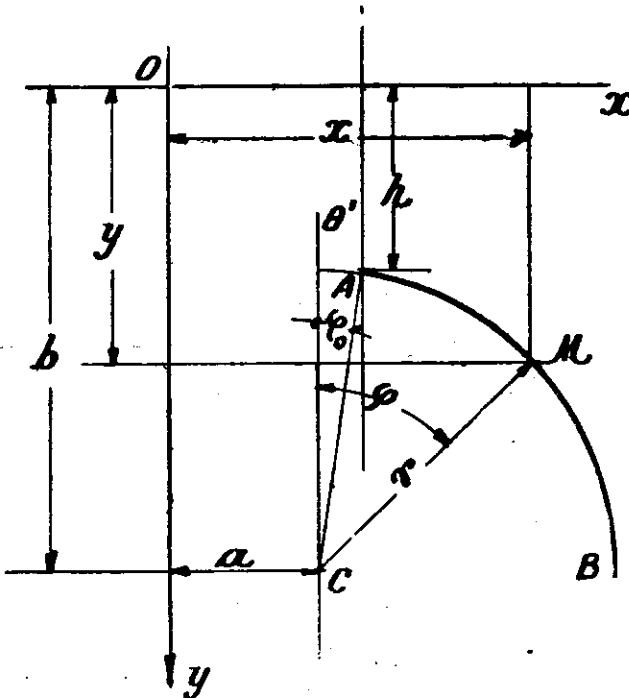


Fig. 5

Levadas essas relações ás equações fundamentais (2), resultam as seguintes, que são as suas equivalentes em coordenadas polares, no caso da geratriz circular:



$$m = \frac{\omega \varepsilon (a \varphi - r \cos \varphi) + a \int Y d\varphi + r \int Y \operatorname{sen} \varphi \cdot d\varphi + C}{\left(\frac{a}{r} + \operatorname{sen} \varphi\right) \operatorname{sen} \varphi} \quad (6)$$

$$p = -m \left(1 + \frac{a}{r \operatorname{sen} \varphi}\right) + (Y + \omega \varepsilon)(a \cotg \varphi + r \cos \varphi) - X(a + r \operatorname{sen} \varphi)$$

2. — *Caso particular. Cupola esférica.* Fazendo-se  $a = 0$  nas equações supra, obtêm-se as formulas gerais relativas á esféra:

$$m = \frac{-\omega \varepsilon r \cos \varphi + r \int Y \operatorname{sen} \varphi d\varphi + C}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \quad (7)$$

$$p = -m + (Y + \omega \varepsilon) r \cos \varphi - X r \operatorname{sen} \varphi$$

#### Determinação da constante $C$

Seja  $Q$  o total das cargas verticais applicadas sobre a cupola esférica, acima do paralelo inicial  $M$ , determinado por  $\varphi = \varphi_0$ .

Seja  $K$  o valor particular da expressão  $\int Y \operatorname{sen} \varphi d\varphi$ , para  $\varphi = \varphi_0$ .

$$\text{Então teremos } m_0 = \frac{Q}{2\pi r \operatorname{sen}^2 \varphi_0}$$

valor que, substituído a  $m$  na primeira equação (7) dá

$$C = \frac{Q}{2\pi r} + r(\omega \varepsilon \cos \varphi_0 - K) \quad (8)$$

Sendo muito frequentes as cupolas esféricas, estudaremos alguns casos de cargas, entre os mais usuais.

a) *Peso proprio só.* Fazendo-se  $Y = X = 0$ , teremos para  $\varphi_0 = 0$ , isto é, no fecho da cupola:

$$Q = 0 \quad K = 0 \quad \text{Donde} \quad C = \omega \varepsilon r$$

E, pela primeira de (7)

$$m = \frac{\omega \varepsilon r (1 - \cos \varphi)}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

expressão aparentemente indeterminada para  $\varphi = 0$ . Aplicando-se-lhe, porem, a regra de L'Hospital, ou pondo-se em vez de  $\operatorname{sen}^2 \varphi$  o seu equivalente  $1 - \cos^2 \varphi = (1 - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)$  e eliminando-se o factor comum  $(1 - \cos \varphi)$ , acha-se:

$$m = \frac{\omega \varepsilon r}{1 - \cos \varphi}$$

$$p = (\cos \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{\omega \varepsilon r}{1 + \cos \varphi}$$

Para  $\varphi = 0$ , isto é, no fecho

$$m_0 = \frac{\omega \varepsilon r}{2} = p_0$$

Para  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , isto é, a  $90^\circ$

$$m = \omega \varepsilon r \quad p = -\omega \varepsilon r$$

Vê-se que  $m$  é sempre positivo, porem  $p$  muda de signal.

$$p = 0 \quad \text{para } \cos \varphi = \operatorname{sen}^2 \varphi, \text{ o que dá } (\varphi)^\circ \cong 51^\circ 50'$$

São resultados conhecidos. Damo-los para mostrar a facilidade com que os fornece a teoria geral.

b) *Carga vertical uniformemente distribuida sobre a superficie da cupola.*

Seja  $Y = g$ . Obtêm-se formulas analogas ás anteriores, bastando escrever  $g$  em vez de  $\omega \varepsilon$ . Teremos, então, abstracção feita do peso proprio:

$$m = \frac{gr}{1 + \cos \varphi}$$

$$p = (\cos \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{gr}{1 + \cos \varphi}$$

Daqui por diante daremos as formulas, deixando ao leitor o encargo de verificá-las. Cumpre advertir que cada caso é considerado isoladamente, abstracção feita de qualquer carga permanente, inclusive o peso proprio.

c) *Carga vertical uniformemente distribuida sobre o plano horizontal.*

$$Y = g \cos \varphi \quad X = 0$$

$$m = \frac{gr}{2}$$

$$p = \frac{gr}{2} \cos 2 \varphi$$

$$m \text{ é constante. Para } \varphi = 0 \quad p = m = \frac{gr}{2}$$

$$\text{Para } (\varphi)^\circ = 90^\circ \quad p = -\frac{gr}{2}$$

$$\text{Para } (\varphi)^\circ = 45^\circ \quad p = 0$$

d) *Líquido de peso específico  $\delta$ , elevando-se à altura  $h$  sobre o fecho.*

$$m = \frac{\delta r}{6} \left[ 3(h + r) - 2r \frac{1 + \cos \varphi + \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right]$$

$$p = \frac{\delta r}{6} \left[ 3(h - r) + 2r \frac{4 + \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right]$$

$$\text{Para } \varphi = 0 \quad m = p = \frac{\delta r h}{2}$$

Para  $(\varphi)^\circ = 90^\circ$

$$m = \frac{\delta r}{6} (3h + r)$$

$$p = \frac{\delta r}{6} (3h + 5r)$$

### 3. — *Cúpulas esféricas perfuradas no fecho.*

Seja  $d$  o diâmetro da perfuração circular (fig. 6) e  $2\alpha$  o ângulo ao centro correspondente. Vamos dar as fórmulas para os casos de carga a), b), c), d) do parágrafo anterior.

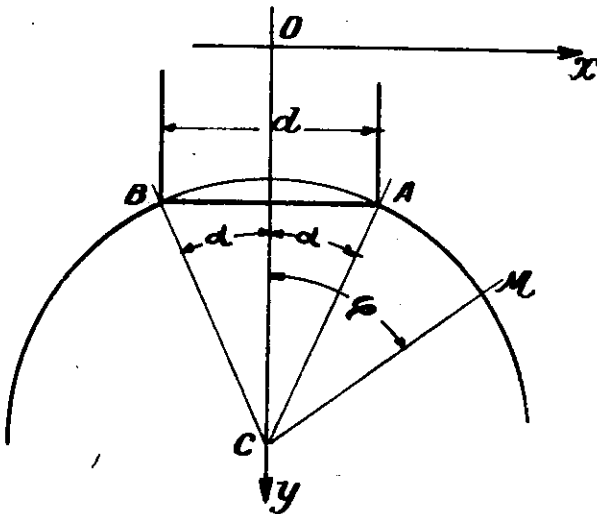


Fig. 6

a) *Peso proprio só*

$$m = \omega \varepsilon r \frac{\cos \alpha - \cos \varphi}{\text{sen}^2 \varphi}$$

$$p = \omega \varepsilon r \frac{\cos \varphi (1 + \text{sen}^2 \varphi) - \cos \alpha}{\text{sen}^2 \varphi} = -m + \omega r \cos \varphi$$

b) *Carga vertical  $Y = g$*

$$m = gr \frac{\cos \alpha - \cos \varphi}{\text{sen}^2 \varphi}$$

$$p = gr \frac{\cos \varphi (1 + \text{sen}^2 \varphi) - \cos \alpha}{\text{sen}^2 \varphi}$$

c) *Carga vertical*  $Y = g \cos \varphi$

$$m = \frac{gr \operatorname{sen}^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$p = \frac{gr \operatorname{sen}^2 \varphi \cos 2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

d) *Liquido de peso especifico*  $\delta$  *até a altura*  $h$  *acima do fecho.*

$$m = \frac{\delta r}{6} \frac{3(h+r)(\operatorname{sen}^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 2r(\cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi)}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$p = -m + \delta r h + \delta r^2 (1 - \cos \varphi)$$

e) *Carga vertical sobre o perimetro da perfuração.*

Seja  $P$  o peso total da estrutura que se apoia sobre o paralelo  $AB$  (fig. 7) A carga vertical *p. m. l.* de periferia será  $\frac{P}{\pi d}$  que se decomporá em cada elemento da circunferencia  $AB$  segundo a tangente á geratriz e segundo a horizontal. Sejam  $n$  e  $q$ , respectivamente, essas componentes, por unidade linear:

$$n = \frac{P}{\pi d \operatorname{sen} \alpha} = \frac{2 Pr}{\pi d^2}$$

$$q = -\frac{P \operatorname{cotg} \alpha}{\pi d} = -\frac{P \sqrt{4r^2 - d^2}}{\pi d^2}$$

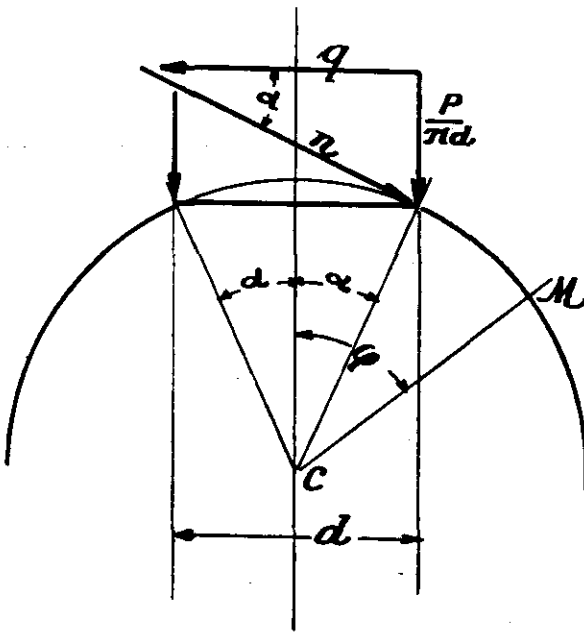


Fig. 7

Os esforços horizontais  $q$  serão equilibrados pela resistencia de um anel colocado na circunferencia de perfuração. O esforço de compressão nesse anel será :

$$F = + \frac{1}{2} q d = + \frac{P \sqrt{4r^2 - d^2}}{2\pi d}$$

Essa compressão  $q$  ficará assim localizada no paralelo A B, sem outra ação sobre o resto da cupola.

À tensão tangencial  $n$  extender-se-á, porem, á superficie subjacente segundo as equações (7), dando os esforços  $m$  e  $p$  seguintes.

$$m = \frac{P}{2\pi r \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$p = -m = -\frac{P}{2\pi r \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

#### 4 — Cupolas esfericas invertidas.

São usadas frequentemente como fundo de reservatorios elevados, conforme a fig. 8 (a). Observando-se a fig. 8 (b), verifica-se que é bastante invertel-a para se ter a cupola na mesma posição, relativamente aos eixos, que serviu á dedução das formulas anteriores. Assim, essas mesmas formulas se aplicam ao caso em apreço com uma unica alteração: o sentido positivo das cargas verticais é, agora, de baixo para cima. Em outras palavras, os pesos são negativos.

Os casos de cargas mais importantes são os dois seguintes:

##### a) *Peso proprio só*

$$m = -\frac{\omega \varepsilon r}{1 + \cos \varphi}$$

$$p = -(\cos \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{\omega \varepsilon r}{1 + \cos \varphi}$$

b) *Conteúdo liquido.* Seja  $h$  a altura a que se eleva o liquido de peso especifico  $\delta$  acima do centro C.

$$m = -\frac{\delta r}{6} \left( 2r + 3h + \frac{2r \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} \right)$$

$$p = -m - \delta r (h + r \cos \varphi)$$

#### Base das cupolas

O paralelo pelo qual uma cupola se apoia ou se suspende, á estrutura que a suporta, chama-se base.

Sejam  $m_o$  e  $\varphi_o$  o esforço axial segundo o meridiano e o angulo da geratriz com o plano horizontal, na base da cupola. Seja  $x_o$  o raio do paralelo-base.

Decompondo-se  $m_o$  em suas componentes, horizontal  $q$  e vertical  $v$  temos:

$$q = m_o \cos \varphi_o \quad v = m_o \operatorname{sen} \varphi_o$$

Os esforços horizontais  $q$  serão absorvidos por um anel colocado em coincidência com o paralelo-base, sem influencia sobre o suporte.

O esforço de tração (signal "menos") sobre o anel será, no caso de uma cupola apoiada :

$$F = - qx_0 = - m_0 x_0 \cos \varphi_0$$

Si a cupola for suspensa, como por exemplo na fig. 8 (a) esse mesmo esforço será de compressão. (signal "mais").

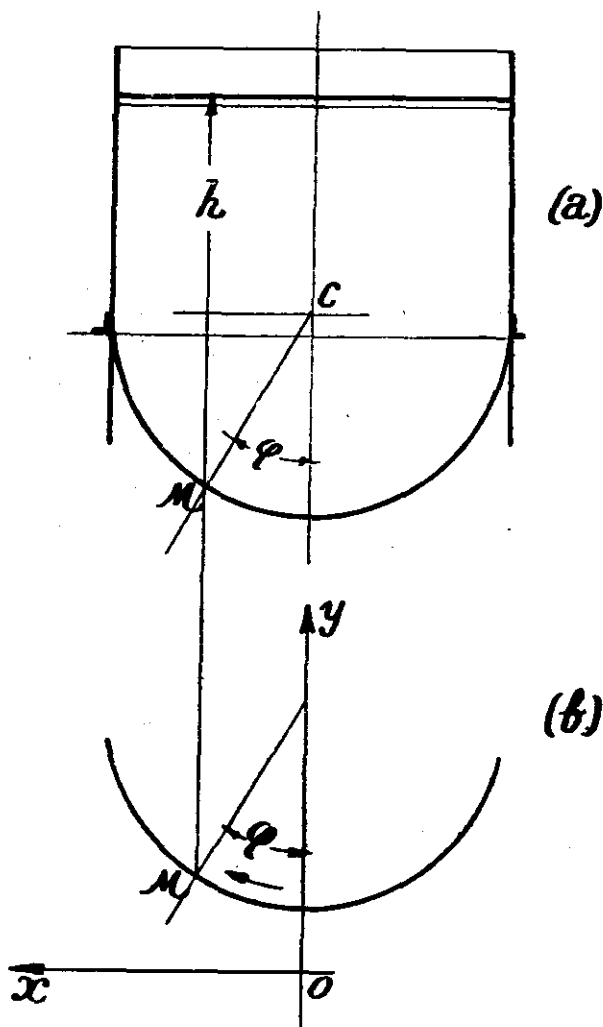


Fig. 8

O suporte receberá uma carga vertical  $V$  uniformemente distribuida sobre a base:

$$V = 2\pi x_0 v = 2\pi x_0 m_0 \text{ sen} \varphi_0$$

Si a cupola for esférica, será  $x_0 = r \text{ sen} \varphi_0$ , portanto

$$V = 2 \pi r m_0 \text{ sen}^2 \varphi_0$$

Como verificação, é claro que  $V$  deve ser igual ao total das cargas verticais applicadas sobre a cupola.

**Esforços unitarios**

Em cada ponto de cupola os esforços unitarios principais serão :

$$\sigma_m = \frac{m}{\varepsilon}$$

$$\sigma_p = \frac{p}{\varepsilon}$$

D'onde o trabalho elastico de comparação, para verificar-se o limite admissivel, deverá calcular-se pelas formulas :

$$R_I = \sigma_m - \frac{\sigma_p}{n}$$

$$R_{II} = \sigma_p - \frac{\sigma_m}{n}$$

sendo  $n$  o coeficiente de Poisson.

O resultado mais deformavel será o prevalecente. Compreende-se que as formulas supra de  $R_I$  e  $R_{II}$ , só applicaveis a materiais homogeneos, perdem todo o sentido quando se trata de cupolas de cimento armado. Neste caso, a verificação isolada dos  $\sigma_m$  e  $\sigma_p$  maximos será suficiente.

**Espessura variavel**

Em todos os desenvolvimentos anteriores das formulas fundamentais, consideramos constante a espessura  $\varepsilon$ .

Si, entretanto, a espessura for variavel, haverá, em rigor, que deduzir outras formulas para o calculo dos  $m$  e  $p$  devidos ao peso proprio.

Para isso, bastará escrever  $\varepsilon$  em função das coordenadas, pas-sal-o para dentro do sinal de integração nas equações (2) e desen-volvel-as consequentemente. Mas, si a variação for de pouca importancia, como se dá em geral, esse trabalho póderá ser dispensado, introduzin-do-se nas formulas um valor médio de  $\varepsilon$  para calcular  $m$  e  $p$ . No cal-culo subsequente dos  $\sigma_m$  e  $\sigma_p$  serão considerados os valores efetivos da espessura.

---

*Este artigo foi publicado pela primeira vez em o numero 91 — junho de 1933 — do Boletim do Instituto de Engenharia de S. Paulo, completamente esgotado, e reeditado na Revista do Gremio Politécnico, numero 128 de 1938, tambem esgotado. O Boletim da R. A. E. julgou util reimprimil-o novamente para atender á procura que continúa tendo entre os engenheiros e porque servird de referencia a um estudo a ser publicado em um dos proximos numeros. (N. da R).*