

ESTUDO DE UM MODELO DE AUTODEPURAÇÃO DAS ÁGUAS DOS RIOS EM CONDIÇÕES AERÓBICAS E ANAERÓBICAS

Eng.º WALTER DEL PICCHIA*

Este trabalho tem por objetivos:

- (1) Estudar detalhadamente o comportamento das equações que descrevem a autodepuração das águas dos rios em condições aeróbicas (modelo de Streeter-Phelps-Camp); este estudo será feito também para situações limites dos parâmetros das equações, situações estas não previstas normalmente, e nas quais as equações usuais para a DBO, OD e tempo crítico não são aplicáveis.
- (2) Descrever um modelo para a autodepuração das águas dos rios em condições anaeróbicas, e estudar detalhadamente as equações correspondentes.

PARTE 1 — MODELO PARA CONDIÇÕES AERÓBICAS E CASOS LIMITES

Um modelo matemático correntemente utilizado para cálculo das concentrações de DBO (demanda bioquímica de oxigênio) e OD (oxigênio dissolvido) nos cursos de água superficiais, em condições permanentes e para concentrações de OD positivas, é o proposto por Streeter e Phelps [1] [2] e aperfeiçoado por Camp [3]. Embora essas equações descrevam de um modo apenas aproximado os complexos fenômenos biológicos, físicos e químicos que ocorrem nos rios [4], elas são normalmente utilizadas para prever as concentrações de DBO e OD sob diversas condições de lançamento de cargas poluidoras. Para sua

aplicação adota-se um trecho com características uniformes; os lançamentos pontiformes são feitos no início do trecho e os lançamentos distribuídos ao longo do mesmo.

As seguintes hipóteses são admitidas [3]:

- a) A velocidade de desoxigenação é proporcional à quantidade de DBO remanescente
- b) A velocidade de reoxigenação atmosférica é proporcional ao déficit de oxigênio em relação à concentração de saturação (Cs)
- c) A velocidade de sedimentação da DBO é proporcional à quantidade de DBO remanescente
- d) As velocidades de acréscimo de DBO e oxigênio, devido ao escoamento superficial, depósitos bentônicos, fotossíntese e respiração de plantas é constante ao longo do trecho considerado
- e) A vazão, a temperatura, as cargas e os coeficientes para cada trecho são constantes no tempo
- f) Há "mistura completa", as concentrações de DBO e oxigênio sendo assumidas uniformes numa

(*) — Professor Adjunto da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Consultor em Engenharia de Sistemas. Na realização desse trabalho tivemos o valioso apoio da CETESB, da PLANIDRO e da SABESP, às quais externamos nossos agradecimentos.

As ideias apresentadas neste trabalho estão sendo implantadas pelo autor na CETESB, no sistema para computador digital MAPS — Modelo de Análise da Poluição por Simulação, o qual compreende ainda programas de controle, programas auxiliares e programas de simulação da qualidade das águas em lagos e reservatórios.

secção transversal
g) O sistema é unidimensional

Representaremos o "deficit máximo de oxigênio" (concentração de OD nula) por D_m , o qual em valor, é igual a C_s , concentração de saturação de oxigênio.

Nestas condições, e sendo $D_0 < D_m$ o deficit inicial, o modelo mencionado consiste nas equações:

$$\frac{dL}{dt} = - (K_1 + K_3) L + P, \text{ com } L(0) = L_0 \geq 0$$

$$\frac{dD}{dt} = - K_2 D + K_1 L - A, \text{ com } D(0) = D_0 > 0, = 0 \text{ ou } < 0$$

$$P = P_a + P_b \geq 0$$

$$A = F - B - R > 0, = 0 \text{ ou } < 0$$

onde [5]:

L — Demanda bioquímica de oxigênio, primeiro estágio, em mg/l

L_0 — Valor de L no instante inicial

D — Deficit de oxigênio dissolvido, em relação a C_s , em mg/l ($D = C_s - OD$)

D_0 — Valor de D no instante inicial

K_1 — Coeficiente de desoxigenação, em dia⁻¹

K_2 — Coeficiente de reoxigenação atmosférica, em dia⁻¹

K_3 — Coeficiente de sedimentação, em dia⁻¹

P — Coeficiente de acréscimo de DBO ao longo do trecho, em mg/l/dia

A — Coeficiente de acréscimo de oxigênio ao longo do trecho, em mg/l/dia

P_a — Coeficiente de acréscimo de DBO ao longo do trecho devido escoamento superficial, em mg/l/dia

P_b — Coeficiente de acréscimo de DBO ao longo do trecho devido depósitos bentônicos, em mg/l/dia

F — Coeficiente de produção de oxigênio devido fotossíntese, em mg/l/dia

B — Coeficiente de redução de oxigênio devido depósitos bentônicos, em mg/l/dia

R — Coeficiente de redução de oxigênio devido a respiração de plantas, em mg/l/dia

1.1 — Caso geral ($K_2 > 0, K_1 + K_3 > 0, K_2 \neq K_1 + K_3$)

A resolução das equações vistas fornece*:

$$L = \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3} \right) e^{-(K_1 + K_3)t} + \frac{P}{K_1 + K_3}$$

$$D = \frac{K_1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(e^{-(K_1 + K_3)t} - e^{-K_2 t} \right) + \frac{1}{K_2} \left(\frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A \right) (1 - e^{-K_2 t}) + D_0 e^{-K_2 t}$$

Para calcular o tempo crítico (t_{cr}), tempo no qual D é extremante (máximo ou mínimo), devemos derivar D, igualar a zero e resolver em t. Derivando D obtemos

$$D' = \frac{dD}{dt} = \alpha e^{-(K_1 + K_3)t} + \beta e^{-K_2 t}$$

com:

$$\alpha = \frac{K_1}{K_2 - (K_1 + K_3)} [P - L_0 (K_1 + K_3)]$$

$$\beta = \frac{K_1 K_2}{K_2 - (K_1 + K_3)} \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3} \right) + \left(\frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A \right) - K_2 D_0$$

Resolvendo $D' = 0$ em t obtemos:

$$\alpha e^{-(K_1 + K_3)t_{cr}} + \beta e^{-K_2 t_{cr}} = 0$$

$$e^{[K_2 - (K_1 + K_3)]t_{cr}} = - \frac{\beta}{\alpha}$$

Portanto:

$$t_{cr} = \frac{1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \ln \left(- \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

ou, substituindo:

* — Um modo conveniente de resolver equações diferenciais do tipo acima é por meio da Transformação de Laplace [6].

$$t_{cr} = \frac{1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \ln \left[\frac{K_2}{K_1 + K_3} + \left(\frac{K_2 - (K_1 + K_3)}{(K_1 + K_3)L_0 - P} \right) \left(\frac{P}{K_1 + K_3} - \frac{A + K_2 D_0}{K_1} \right) \right]$$

Observando a fórmula acima, vemos que t_{cr} pode ser positivo, negativo ou nulo e, conforme os sinais de α e β , pode não existir. Adiante estudaremos os tipos de curvas obtidas dependendo dos valores de α e β . O valor de D no tempo crítico (D_{cr}), pode resultar positivo, negativo ou nulo.

1.2 — Caso limite em que $K_2 > 0$ e $K_1 + K_3 = 0$ (substância não biodegradável e não sedimentável).

As equações se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = P$$

$$\frac{dD}{dt} = -K_2 D - A$$

Sua resolução fornece:

$$L = L_0 + Pt$$

$$D = \left(D_0 + \frac{A}{K_2} \right) e^{-K_2 t} - \frac{A}{K_2}$$

Derivando D obtemos:

$$D' = - (A + K_2 D_0) e^{-K_2 t}$$

Como D' é uma exponencial, $D' = 0$ não tem solução finita, não se definindo t_{cr} nesse caso.

1.3 — Caso limite em que $K_2 = 0$ e $K_1 + K_3 > 0$ (reoxigenação atmosférica nula, por exemplo quando existe uma película de óleo sobre a superfície das águas).

As equações se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = - (K_1 + K_3) L + P$$

$$\frac{dD}{dt} = K_1 L - A$$

Sua resolução fornece:

$$L = \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3} \right) e^{-(K_1 + K_3)t} + \frac{P}{K_1 + K_3}$$

$$D = D_0 + \frac{K_1}{K_1 + K_3} \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3} \right) (1 - e^{-(K_1 + K_3)t}) + \left\{ \frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A \right\} t$$

Derivando D obtemos:

$$D' = \gamma e^{-(K_1 + K_3)t} + \delta$$

$$\text{com: } \gamma = K_1 \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3} \right)$$

$$\delta = \frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A$$

De $D' = 0$, resolvendo em t obtemos:

$$t_{cr} = \frac{1}{K_1 + K_3} \ln \left(- \frac{\gamma}{\delta} \right)$$

ou, substituindo:

$$t_{cr} = \frac{1}{K_1 + K_3} \ln \frac{K_1 [P - (K_1 + K_3) L_0]}{K_1 P - (K_1 + K_3) A}$$

Observando a expressão acima, vemos que t_{cr} pode ser positivo, negativo ou nulo e, conforme os sinais de γ e δ , pode não existir. O valor de D_{cr} (D crítico) pode resultar positivo, negativo ou nulo. Adiante estudaremos os tipos de curvas obtidas em decorrência dos valores de γ e δ .

1.4 — Caso limite em que $K_2 = 0$ e $K_1 + K_3 = 0$ (substância não biodegradável nem sedimentável e reoxigenação atmosférica nula).

As equações se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = P$$

$$\frac{dD}{dt} = -A$$

Sua resolução fornece:

$$L = L_0 + Pt$$

$$D = D_0 - At$$

Neste caso (caso degenerado), $D' = -A$ e não existe tempo crítico.

1.5 — Caso em que $K_2 > 0$, $K_1 + K_3 > 0$ e $K_2 = K_1 + K_3$

As equações se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = -K_2L + P$$

$$\frac{dD}{dt} = -K_2D + K_1L - A$$

Sua resolução fornece:

$$L = \left(L_0 - \frac{P}{K_2}\right) e^{-K_2t} + \frac{P}{K_2}$$

$$D = K_1 \left(L_0 - \frac{P}{K_2}\right) t e^{-K_2t} + \frac{1}{K_2}$$

$$\left(\frac{K_1P}{K_2} - A\right) (1 - e^{-K_2t}) + D_0 e^{-K_2t}$$

Derivando D obtemos:

$$D' = (\theta + \phi t) e^{-K_2t}$$

$$\text{com: } \theta = K_1L_0 - A - K_2D_0$$

$$\phi = K_1(P - L_0K_2)$$

De $D' = 0$, resolvendo em t obtemos:

$$t_{cr} = -\frac{\theta}{\phi}$$

ou, substituindo:

$$t_{cr} = \frac{K_1L_0 - A - K_2D_0}{K_1(K_2L_0 - P)}$$

Observando a fórmula acima, vemos que t_{cr} pode ser positivo, negativo ou nulo, e para $\phi = 0$ não existirá. Adiante veremos os tipos de curvas obtidas dependendo dos valores de θ e ϕ . O valor de D_{cr} (D crítico), pode resultar positivo, negativo ou nulo.

Em todos os casos vistos na Parte 1, as equações são válidas enquanto $D < D_m$. Se D for crescente e atingir o valor D_m , chamaremos de t_{cz} (tempo de cruzamento) o instante em que isto ocorrer.

De $t = 0$ até $t = t_{cz}$ teremos condição aeróbica e as equações vistas são válidas; após $t = t_{cz}$ as condições serão anaeróbicas e cairemos em um dos casos descritos na Parte 3.

PARTE 2 — ESTUDO DAS EQUAÇÕES PARA CONDIÇÕES AERÓBICAS ($D_0 < D_m$)

2.1 — Caso geral ($K_2 > 0$, $K_1 + K_3 > 0$, $K_2 \neq K_1 + K_3$)

Neste caso se aplicam as seguintes equações:

$$L = \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3}\right) e^{-(K_1 + K_3)t} + \frac{P}{K_1 + K_3}$$

$$D = \frac{K_1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3}\right) \cdot (e^{-(K_1 + K_3)t} - e^{-K_2t}) + \frac{1}{K_2} \left(\frac{K_1P}{K_1 + K_3} - A\right) (1 - e^{-K_2t}) + D_0 e^{-K_2t}$$

$$D' = \alpha e^{-(K_1 + K_2)t} + \beta e^{-K_2t}$$

$$\alpha = \frac{K_1}{K_2 - (K_1 + K_3)} [P - L_0 (K_1 + K_3)]$$

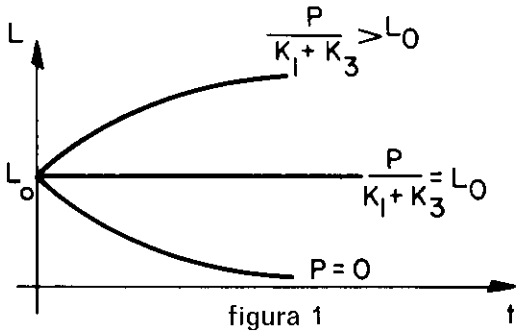
$$\beta = \frac{K_1 K_2}{K_2 - (K_1 + K_3)} \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3}\right) + \left(\frac{K_1P}{K_1 + K_3} - A\right) - K_2D_0$$

$$t_{cr} = \frac{1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \ln \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

$$D'' = -\alpha (K_1 + K_3) e^{-(K_1 + K_3)t} - \beta K_2 e^{-K_2 t}$$

Na fig. 1 vemos a representação de L .

Observação: Utilizaremos $D'' = \frac{d^2 D}{dt^2}$.



acima calculado, para determinar se os pontos extremantes de D são máximos ou mínimos.

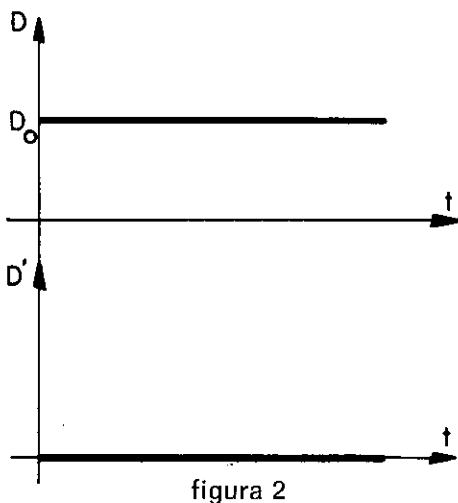
Teremos quatro subdivisões, segundo os valores de α e β sejam diferentes ou iguais a zero:

2.1.1 — Subdivisão com $\alpha = 0$ e $\beta = 0$

Nesse caso, temos: $D' = 0$, e portanto $D = D_0$.

t_{cr} não é definido.

D e D' estão representados na figura 2, para $D_0 > 0$.



2.1.2 — Subdivisão com $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$

Nesse caso, temos:

$$D' = \beta e^{-K_2 t} \quad e$$

$$D = \frac{1}{K_2} \left(\frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A \right) (1 - e^{-K_2 t}) + D_0 e^{-K_2 t}$$

t_{cr} não é definido

Como D' é uma exponencial, D' será sempre positivo ou sempre negativo e, portanto, D será sempre crescente ou sempre decrescente.

D e D' estão representados na figura 3, para $D_0 > 0$

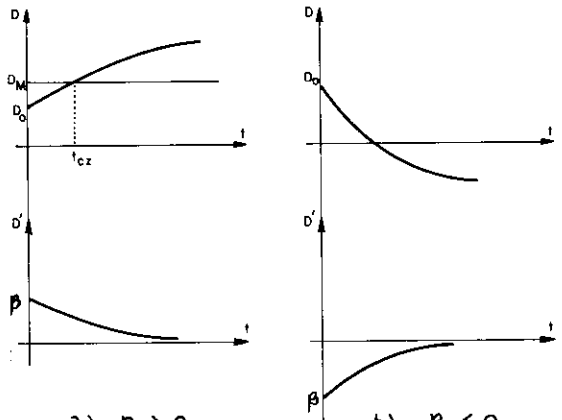


figura 3

Estas equações são válidas até t_{cz} (tempo de cruzamento), onde $D = D_m$

Se $Y > D_m \geq D_0$,

$$\text{com } Y = \frac{1}{K_2} \left(\frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A \right),$$

então t_{cz} é dado por

$$t_{cz} = \frac{1}{K_2} \ln \frac{Y - D_0}{Y - D_m} \geq 0$$

2.1.3 — Subdivisão com $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$

Nesse caso, temos:

$$D' = \alpha e^{-(K_1 + K_3)t} \quad e$$

$$D = \frac{K_1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \left(\frac{P}{K_1 + K_3} - L_0 \right) (1 - e^{-(K_1 + K_3)t}) + D_0$$

t_{cr} não é definido.

D e D' estão representados na figura 4, para $D_0 > 0$.

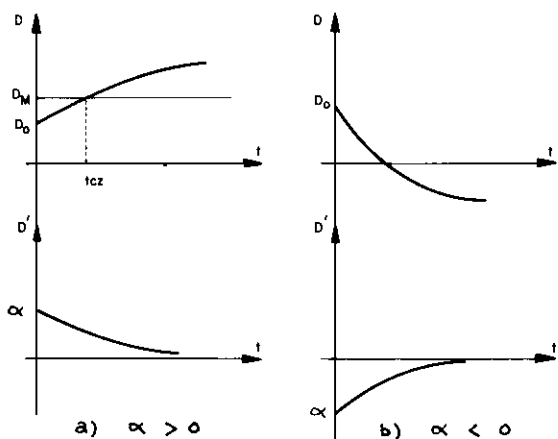


figura 4

Estas equações são válidas até o tempo de cruzamento t_{cz} , onde

$$D = D_m$$

$$\text{Se } Z + D_0 > D_m \geq D_0$$

$$\text{com } Z = \frac{K_1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \left(\frac{P}{K_1 + K_3} - L_0 \right),$$

então t_{cz} é dado por

$$t_{cz} = \frac{1}{K_1 + K_3} \ln \frac{Z}{Z + D_0 - D_m} \geq 0$$

2.1.4 — Subdivisão com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$

Nesse caso temos as expressões vistas em 2.1. Conforme os sinais de α e β , vem:

2.1.4.1 — α e β com mesmos sinais ($\alpha \cdot \beta > 0$)

Como

$$D' = \alpha e^{-(K_1 + K_3)t} + \beta e^{-K_2 t}, \text{ para } t \geq 0,$$

é só positivo ou só negativo, então D será só crescente ou só decrescente.

t_{cr} não é definido.

D e D' estão representados na figura 5, para $D_0 > 0$.

Neste caso t_{cz} , se existir, deve ser cal-

culado iterativamente.

2.1.4.2 — α e β com sinais contrários ($\alpha \cdot \beta < 0$)

Como α e β têm sinais contrários, então

$D' = \alpha e^{-(K_1 + K_3)t} + \beta e^{-K_2 t}$ sempre apresentará um tempo crítico $t = t_{cr}$ no qual $D' = 0$, que é

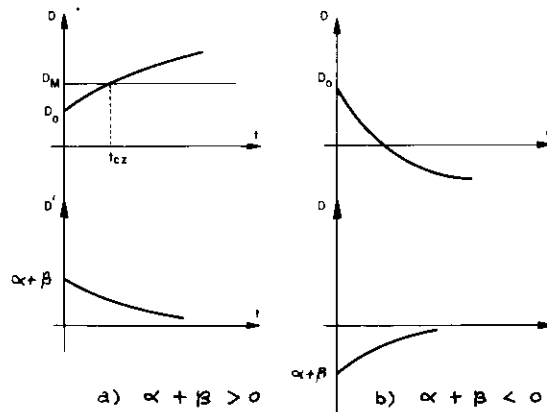


figura 5

$$t_{cr} = \frac{1}{K_2 - (K_1 + K_3)} \ln \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right)$$

Como vemos, $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$, e t_{cr} poderá ser > 0 , $= 0$ ou < 0 .

Introduzindo o valor de t_{cr} em

$$D'' = -\alpha (K_1 + K_3) e^{-(K_1 + K_3)t} - \beta K_2 e^{-K_2 t},$$

obtemos o valor de D'' no ponto t_{cr} :

$$D''(t_{cr}) = \alpha \left\{ K_2 - (K_1 + K_3) \right\} \cdot \left[-\frac{\beta}{\alpha} \right]^{-\frac{K_1 + K_3}{K_2 - (K_1 + K_3)}}$$

Estudando $D''(t_{cr})$ concluímos:

$$\text{Como } \alpha \neq 0, K_2 - (K_1 + K_3) \neq 0, -\frac{\beta}{\alpha} > 0$$

$$\text{e } \frac{K_1 + K_3}{K_2 - (K_1 + K_3)} \neq 0, \text{ não infinito, então}$$

$D''(t_{cr}) \neq 0$; ou seja, dependendo dos sinais de α , β e de K_1 , K_2 , K_3 , teremos:

se $D''(t_{cr}) > 0$, D apresenta um mínimo em $t = t_{cr}$;

se $D''(t_{cr}) < 0$, D apresenta um máximo em $t = t_{cr}$.

D, D', D'' (t_{cr}) estão representados na figura 6, para $t_{cr} > 0$ e $D_0 > 0$.

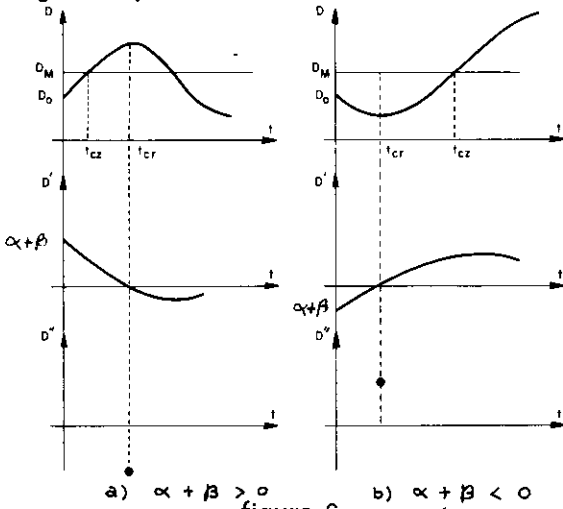


figura 6

Neste caso t_{cz} , se existir, deve ser calculado iterativamente.

2.2 — Caso em que $K_2 > 0$ e $K_1 + K_3 = 0$

As equações são:

$$L = L_0 + Pt$$

$$D = (D_0 + \frac{A}{K_2}) e^{-K_2 t} - \frac{A}{K_2}$$

$$D' = -(A + K_2 D_0) e^{-K_2 t}$$

t_{cr} não é definido.

Na figura 7 vemos a representação de L.

Conforme o valor de $A + K_2 D_0$ seja diferente ou igual a zero, teremos duas subdivisões:

2.2.1 — Subdivisão com $A + K_2 D_0 = 0$

Temos: $D' = 0$ e $D = D_0$.

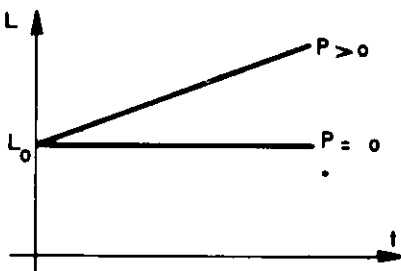


figura 7

2.2.2 — Subdivisão com $A + K_2 D_0 \neq 0$

Nesse caso, como D' é uma exponencial, D' será sempre positivo ou sempre negativo, e portanto D será sempre crescente ou sempre decrescente.

As curvas respectivas são vistas na figura 8, para $D_0 > 0$.

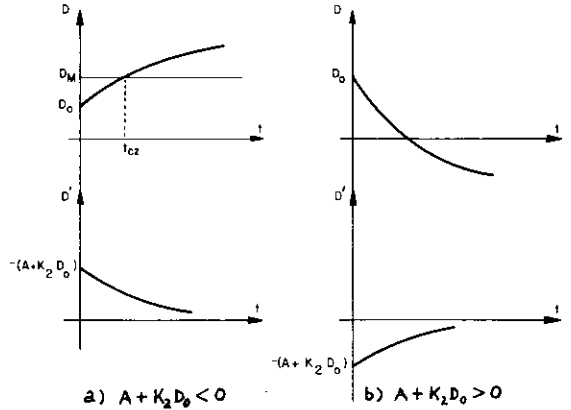


figura 8

As equações são validas até t_{cz} , onde $D = D_m$

Se $(-\frac{A}{K_2}) > D_m \geq D_0$, então t_{cz} é

dado por

$$t_{cz} = \frac{1}{K_2} \ln \frac{(-\frac{A}{K_2}) - D_0}{(-\frac{A}{K_2}) - D_m} \geq 0$$

2.3 — Caso em que $K_2 = 0$ e $K_1 + K_3 > 0$

As equações são:

$$L = (L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3}) e^{-(K_1 + K_3)t} + \frac{P}{K_1 + K_3}$$

$$D = D_0 + \frac{K_1}{K_1 + K_3} (L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3}) \cdot$$

$$\cdot (1 - e^{-(K_1 + K_3)t}) + (\frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A) t$$

$$D' = \gamma e^{-(K_1 + K_3)t} + \delta$$

$$\gamma = K_1 (L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3})$$

$$\delta = (\frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A)$$

$$t_{cr} = \frac{1}{K_1 + K_3} \ln \left(- \frac{\delta}{\delta} \right)$$

$$D'' = K_1 [P - (K_1 + K_3) L_0] e^{-(K_1 - K_3)t}$$

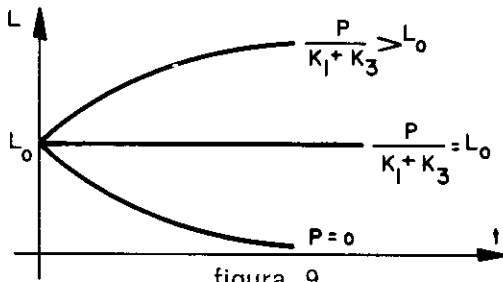


figura 9

Na figura 9 vemos a representação de L.

Conforme os valores de δ e δ sejam diferentes ou iguais a zero, teremos quatro subdivisões:

2.3.1 — Subdivisão com $\delta = 0$ e $\delta = 0$

Nesse caso:

$$D' = 0$$

$$D = D_0$$

t_{cr} não é definido.

2.3.2 — Subdivisão com $\delta = 0$ e $\delta \neq 0$

Nesse caso:

$$D' = \delta$$

$$D = D_0 + \left(\frac{K_1 P}{K_1 + K_3} - A \right) t$$

Como D' é sempre $\neq 0$, t_{cr} não é definido.

As curvas respectivas são vistas na figura 10, para $D_0 > 0$.

Estas equações são válidas até t_{cz} (onde $D = D_m$).

Se $\delta > 0$, então:

$$t_{cz} = \frac{D_m - D_0}{\delta} \geq 0$$

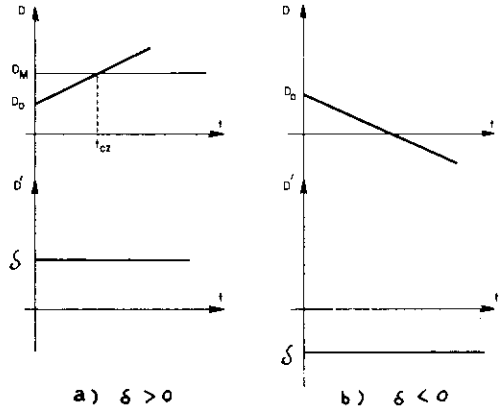


figura 10

2.3.3 — Subdivisão com $\delta \neq 0$ e $\delta = 0$

Nesse caso:

$$D' = \delta e^{-(K_1 + K_3)t}$$

$$D = D_0 + \frac{K_1}{K_1 + K_3} \left(L_0 - \frac{P}{K_1 + K_3} \right) \cdot (1 - e^{-(K_1 + K_3)t})$$

Como D' é uma exponencial, D' será sempre positivo ou sempre negativo, e portanto D será sempre crescente ou sempre decrescente.

t_{cr} não é definido.

As curvas respectivas são vistas na figura 11, para $D_0 > 0$.

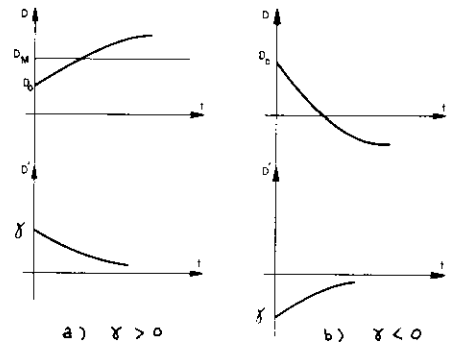


figura 11

Estas equações são válidas até t_{cz} (onde $D = D_m$).

Se $\frac{\delta}{K_1 + K_3} + D_0 > D_m \geq D_0$, então

$$t_{cz} = \frac{1}{K_1 + K_3} \ln \frac{\frac{\delta}{K_1 + K_3} + D_0 - D_m}{\frac{\delta}{K_1 + K_3} + D_0 - D_m} \geq 0$$

AUTODEPURAÇÃO DAS ÁGUAS

2.3.4 — Subdivisão com $\gamma \neq 0$ e $\delta \neq 0$

Nesse caso temos as expressões vistas em 2.3.

Conforme os sinais de γ e δ , vem:

2.3.4.1 — γ e δ com mesmos sinais ($\gamma, \delta > 0$)

Como $D' = \gamma e^{-(K_1+K_3)t} + \delta$, para $t \geq 0$, é só > 0 ou só < 0 , então D será só crescente ou só decrescente.

t_{cr} não é definido.

D e D' estão representados na figura 12, para $D_0 > 0$.

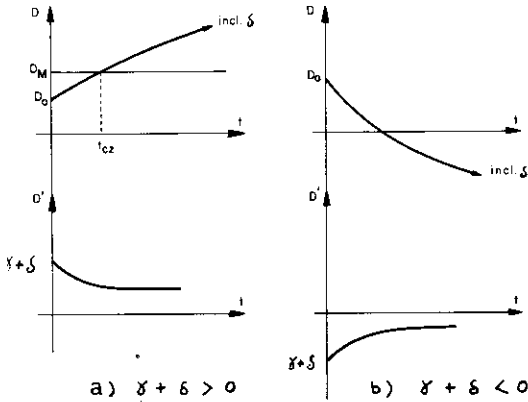


figura 12

Neste caso t_{cz} , se existir, deve ser calculado iterativamente

2.3.4.2 — γ e δ com sinais contrários ($\gamma, \delta < 0$)

Como γ e δ tem sinais contrários, então $D' = \gamma e^{-(K_1+K_3)t} + \delta$ sempre apresentará um tempo crítico $t = t_{cr}$ no qual $D' = 0$, que é:

$$t_{cr} = \frac{1}{K_1+K_3} \ln \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right)$$

Como vemos, $-\frac{\delta}{\gamma} > 0$, e t_{cr} poderá

ser

> 0 , $= 0$ ou < 0 .

Introduzindo o valor de t_{cr} em

$$D'' = K_1 [P - (K_1+K_3) L_0] e^{-(K_1+K_3)t}$$

obtemos o valor de D'' no ponto t_{cr} :

$$D''(t_{cr}) = (K_1+K_3) \delta = K_1 P - (K_1+K_3) A$$

Concluimos:

Como $K_1+K_3 > 0$ e $\delta \neq 0$, então

$D''(t_{cr}) \neq 0$, e:

se $D''(t_{cr}) = \delta > 0$, D apresenta um mínimo em $t = t_{cr}$;

se $D''(t_{cr}) = \delta < 0$, D apresenta um máximo em $t = t_{cr}$.

D, D' e $D''(t_{cr})$ estão representados na figura 13, para $t_{cr} > 0$ e $D_0 > 0$.

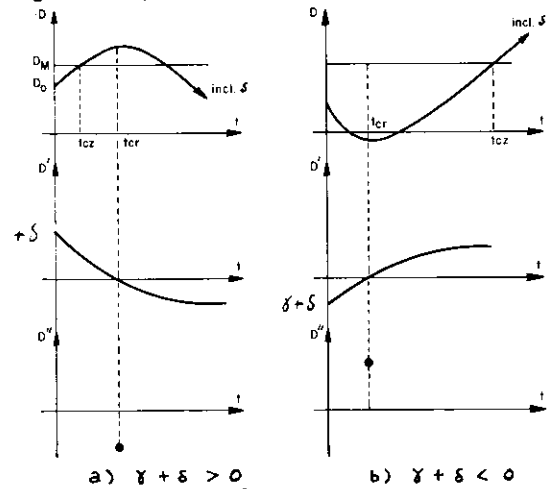


figura 13

Neste caso t_{cz} , se existir, deve ser calculado iterativamente.

2.4 — Caso em que $K_2 = 0$ e $K_1+K_3 = 0$

As equações são:

$$L = L_0 + Pt$$

$$D = D_0 - At$$

$$D' = -A$$

t_{cr} não é definido.

Na figura 14 vemos a representação de L.

Conforme o valor de A seja nulo ou diferente de zero, teremos duas subdivisões:

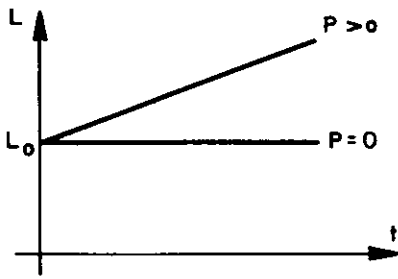


figura 14

2.4.1 — Subdivisão com $A = 0$

Nesse caso:

$$D' = 0$$

$$D = D_0$$

2.4.2 — Subdivisão com $A \neq 0$

$$D = D_0 - At$$

$$D' = -A$$

As curvas respectivas estão representadas na figura 15, para $D_0 > 0$.

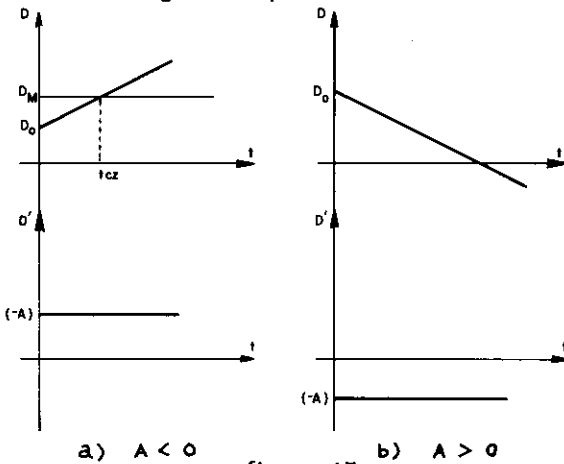


figura 15

Estas equações são válidas até t_{cz} (onde $D = D_m$).

Se $(-A) > 0$, então

$$t_{cz} = \frac{D_m - D_0}{(-A)} \geq 0$$

2.5 — Caso em que $K_2 > 0$, $K_1 + K_3 > 0$ e $K_2 = K_1 + K_3$

As equações são:

$$L = \left(L_0 - \frac{P}{K_2}\right) e^{-K_2 t} + \frac{P}{K_2}$$

$$D = K_1 \left(L_0 - \frac{P}{K_2}\right) t e^{-K_2 t} + \frac{1}{K_2} \cdot \left(\frac{K_1 P}{K_2} - A\right) (1 - e^{-K_2 t}) + D_0 e^{-K_2 t}$$

$$D' = (\theta + \phi t) e^{-K_2 t}$$

$$\theta = K_1 L_0 - A - K_2 D_0$$

$$\phi = K_1 \left(P - L_0 K_2\right)$$

$$t_{cr} = -\frac{\phi}{\theta}$$

$$D'' = \left[\phi (1 - K_2 t) - K_2 \theta\right] e^{-K_2 t}$$

$$D''(t_{cr}) = \phi e^{\left(\frac{K_2 \theta}{\phi}\right)}$$

Na figura 16 vemos a representação de L.

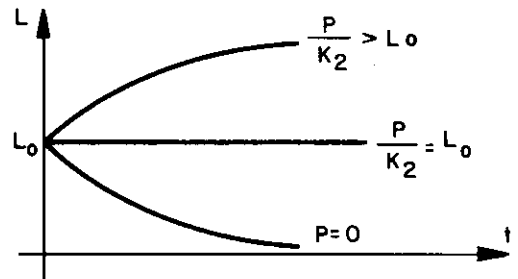


figura 16

Conforme os valores de θ e ϕ sejam diferentes ou iguais a zero, teremos quatro subdivisões:

2.5.1 — Subdivisão com $\theta = 0$ e $\phi = 0$

Neste caso:

$$D' = 0$$

$$D = D_0$$

t_{cr} não é definido.

2.5.2 — Subdivisão com $\theta = 0$ e $\phi \neq 0$

Nesse caso:

$$D' = \phi t e^{-K_2 t}$$

$$D = K_1 \left(L_0 - \frac{P}{K_2}\right) t e^{-K_2 t} + \frac{K_1}{K_2}$$

AUTODEPURAÇÃO DAS ÁGUAS

$$P \left\{ \frac{1}{K_2} - L_0 \right\} (1 - e^{-K_2 t}) + D_0$$

$$t_{cr} = 0$$

$$D'' = \phi (1 - K_2 t) e^{-K_2 t}$$

Introduzindo o valor de t_{cr} em D'' , obtemos

$$D''(t_{cr}) = \phi = K_1(P - L_0 K_2)$$

Concluimos:

Como $\phi \neq 0$, então $D''(t_{cr}) \neq 0$, e:
 se $D''(t_{cr}) = \phi > 0$, apresenta um mínimo em $t = 0$;

se $D''(t_{cr}) = \phi < 0$, apresenta um máximo em $t = 0$.

D , D' e $D''(t_{cr})$ estão representados na figura 17, para $D_0 > 0$.

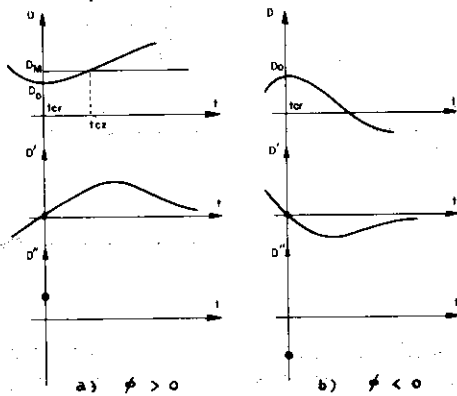


figura 17

Neste caso t_{cz} , se existir, deve ser calculado iterativamente.

2.5.3 — Subdivisão com $\theta \neq 0$ e $\phi = 0$

Nesse caso

$$D' = \theta e^{-K_2 t}$$

$$D = \frac{1}{K_2} (K_1 L_0 - A) (1 - e^{-K_2 t}) + D_0 e^{-K_2 t}$$

Como D' é uma exponencial, D' será sempre positivo ou sempre negativo, e portanto D será sempre crescente ou sempre decrescente.

t_{cr} não é definido.

As curvas respectivas são vistas na figura 18, para $D_0 > 0$.

Estas equações são válidas até t_{cz} (onde $D = D_m$).

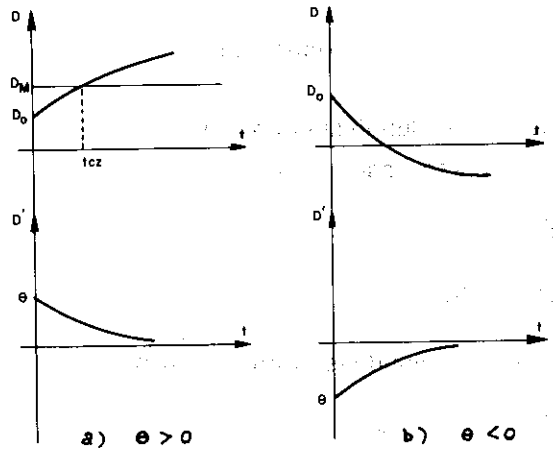


figura 18

Se $\frac{\theta}{K_2} + D_0 > D_m \geq D_0$, então

$$t_{cz} = \frac{1}{K_2} \ln \frac{\frac{\theta}{K_2} + D_0 - D_m}{\frac{\theta}{K_2} + D_0} \geq 0$$

2.5.4 — Subdivisão com $\theta \neq 0$ e $\phi = 0$

Nesse caso temos as expressões vistas em 2.5.

Conforme os sinais de θ e ϕ , vem:

2.5.4.1 — $\theta > 0$ e $\phi > 0$

Portanto: $t_{cr} = - \frac{\theta}{\phi} < 0$

$$D''(t_{cr}) = \phi e^{\frac{K_2 \theta}{\phi}} > 0$$

Portanto temos um mínimo de D no ponto $t = t_{cr} < 0$

As curvas respectivas são vistas na figura 19, para $D_0 > 0$.

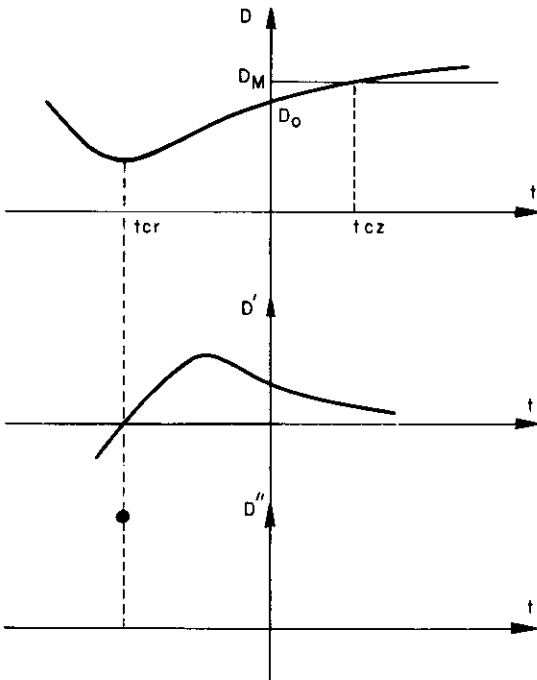


figura 19

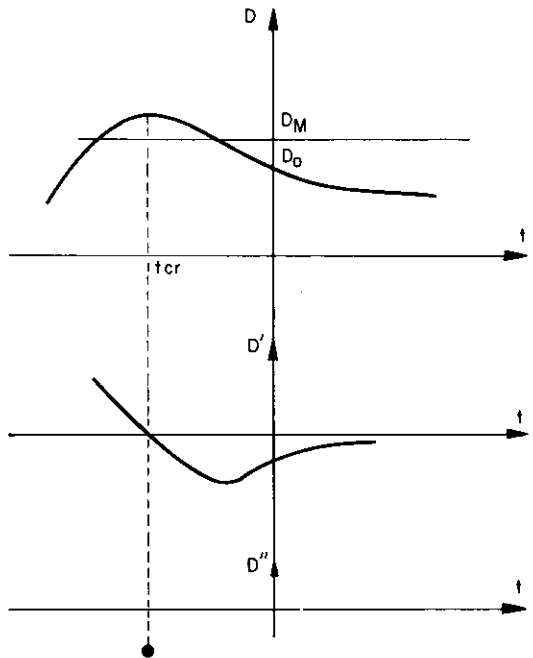


figura 20

2.5.4.2 — $\theta < 0$ e $\phi < 0$

$$\text{Portanto: } t_{cr} = -\frac{\theta}{\phi} < 0$$

$$D''(t_{cr}) = \phi e^{\left(\frac{K_2\theta}{\phi}\right)} < 0$$

Portanto temos um máximo de D no ponto $t = t_{cr} < 0$.

As curvas respectivas são vistas na figura 20, para $D_0 > 0$.

2.5.4.3 — $\theta > 0$ e $\phi < 0$

$$\text{Portanto: } t_{cr} = -\frac{\theta}{\phi} > 0$$

$$D''(t_{cr}) = \phi e^{\left(\frac{K_2\theta}{\phi}\right)} < 0$$

Portanto temos um máximo de D no ponto $t = t_{cr} > 0$.

As curvas respectivas são vistas na figura 21, para $D_0 > 0$.

2.5.4.4 — $\theta < 0$ e $\phi > 0$

$$\text{Portanto: } t_{cr} = -\frac{\theta}{\phi} > 0$$

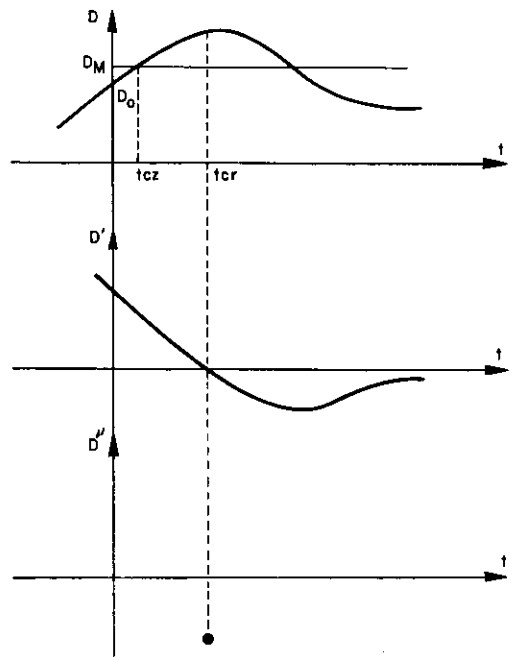


figura 21

$$D''(t_{cr}) = \phi e^{\left(\frac{K_2\theta}{\phi}\right)} > 0$$

Portanto temos um mínimo de D no ponto $t = t_{cr} > 0$.

As curvas respectivas são vistas na figura 22, para $D_0 > 0$.

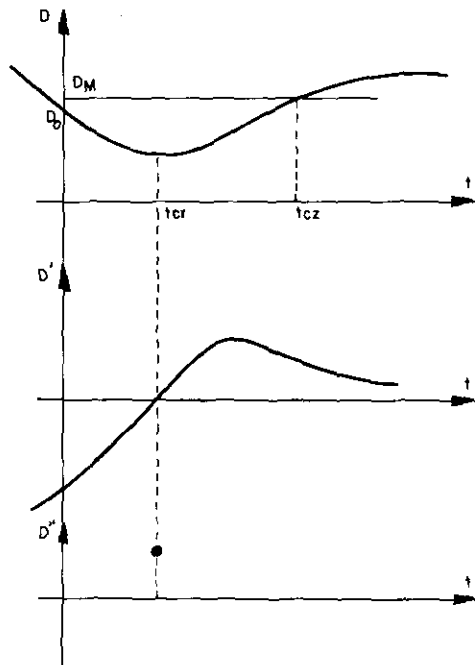


figura 22

Em todos os casos do item 2.5.4, t_{cz} , se existir, deve ser calculado iterativamente.

PARTE 3 — MODELO PARA CONDIÇÕES ANAERÓBICAS E CASOS LIMITES.

Em condições de falta de oxigênio as equações apresentadas na Parte 1 não são válidas, pois elas admitem que existe oxigênio dissolvido, o qual é consumido pelas bactérias na velocidade K_1L (mg/l/dia). Por "falta de oxigênio" entendemos que a concentração de oxigênio dissolvido é nula (deficit de oxigênio = deficit máximo) ou que existem substâncias redutoras na água (demanda imediata de oxigênio), caso em que o deficit de oxigênio será assumido como superior ao deficit máximo.

Para estabelecer as equações para o caso de falta de oxigênio, as seguintes hipóteses foram admitidas:

- a) Em condições de ausência de oxigênio, se o deficit for igual ao deficit máximo e houver introdução de oxigênio na massa líquida em velocidade menor que K_1L , o oxigênio que entra na massa líquida é consumido aerobicamente na redução da DBO na mesma velocidade em que ele (oxigênio) é introduzido. Uma hipótese alternativa, a de que seria necessária uma concentração de oxigênio mínima na água

para que as bactérias aeróbicas atuassem, não modificaria sensivelmente os resultados, pois essa concentração mínima necessária seria pequena.

- b) Em condições de ausência de oxigênio, se o deficit for maior que o deficit máximo (pois existe concentração de redutores na água), o oxigênio que entra na massa líquida é todo consumido por esses redutores, na mesma velocidade em que ele é introduzido, até que a concentração de redutores se torne nula.
- c) Os efeitos da transformação anaeróbica da matéria orgânica podem ser desprezados, devido ao fato dos processos anaeróbicos serem bem mais lentos do que os processos aeróbicos. Os efeitos da transformação anaeróbica existente no fundo (lodo) podem ser levados em conta através dos coeficientes P_n (acréscimo de DBO resultante da anaerobiose do lodo) e B (redução de oxigênio devido aos redutores produzidos pela anaerobiose do lodo), vistos anteriormente.
- d) As outras hipóteses feitas para o caso aeróbico, como mistura homogênea, coeficientes constantes, etc., continuam admitidas válidas.

As hipóteses a) e b) subentendem a hipótese de que o oxigênio que penetra pela superfície na velocidade K_2D_m atinge as camadas inferiores devido à turbulência do curso d'água.

As hipóteses acima são concordantes com as apresentadas em [7], hipóteses estas que foram utilizadas para a proposta de um modelo para condições anaeróbicas. Os dois desenvolvimentos foram feitos independentemente um do outro, e a proposta citada, embora menos elaborada e contendo alguns pontos discutíveis, leva a resultados compatíveis com os nossos.

Nestas condições podemos escrever:

3.1 — Casos em que a concentração de oxigênio é nula ($D_n = D_m$)

A velocidade de "produção" de oxigênio é $K_2D_m + A_n$, que pode ser positiva, negativa ou nula (pois A_n pode ser maior, menor ou igual a zero).

A_n é o mesmo A do caso aeróbico, modificado pelo fato da respiração das plantas

ser nula, e a produção de oxigênio por fotossíntese ser normalmente nula, em condições de ausência de oxigênio.

Sendo P o coeficiente de acréscimo de DBO ao longo do trecho, o oxigênio que sobra para consumir L, para $K_2 D_m + A_n > 0$, é:

$$K_2 D_m + A_n - P \text{ ("oxigênio disponível")}$$

Conforme os sinais de $K_2 D_m + A_n$ e $K_2 D_m + A_n - P$ teremos três diferentes subcasos quando a concentração de oxigênio é nula ($D_o = D_m$):

3.1.1 — Subcaso em que $K_2 D_m + A_n > 0$ e $K_2 D_m + A_n - P > 0$

Neste caso há produção de oxigênio e sobra oxigênio para consumir L.

3.1.1.1 — Subcaso em que $K_3 > 0$ e $K_1 > 0$

Podemos escrever:

$$\frac{dL}{dt} = - (K_2 D_m + A_n - P) - K_3 L \quad (1)$$

$$D = D_m$$

pois L é consumido na mesma velocidade em que o oxigênio disponível é produzido; o termo $K_3 L$ leva em conta a sedimentação da matéria orgânica.

A resolução de (1) fornece:

$$L = \left(L_o + \frac{G}{K_3} \right) e^{-K_3 t} - \frac{G}{K_3} \quad (2)$$

$$\text{com } G = K_2 D_m + A_n - P > 0$$

Admitindo $K_1 L_o > G$, esta equação é válida enquanto $K_1 L > G$ (a demanda de oxigênio pelas bactérias é superior à oferta de oxigênio disponível).

Pela equação (2), vemos que L decresce com o tempo, e aquela equação será válida até $K_1 L = G$ (condição de equilíbrio).

Introduzindo esta expressão em (2) obtemos o instante t_e em que a condição de equilíbrio é satisfeita:

$$t_e = \frac{1}{K_3} \ln \frac{K_3 L_o + G}{G \left(1 + \frac{K_3}{K_1} \right)}$$

Observemos que se $K_1 L_o > G$, então t_e resulta positivo, pois temos $K_3 > 0$, $K_1 > 0$, $K_3 L_o \geq 0$, $G > 0$ e portanto:

$$K_3 L_o + G > 0 \text{ e } G \left(1 + \frac{K_3}{K_1} \right) > 0,$$

não infinito.

Então vem:

$$K_1 L_o > G$$

$$L_o K_3 > \frac{G}{K_1} K_3$$

$$K_3 L_o + G > G \left(1 + \frac{K_3}{K_1} \right)$$

$$\text{Portanto: } M = \frac{K_3 L_o + G}{G \left(1 + \frac{K_3}{K_1} \right)} > 1, \text{ e}$$

$$t_e = \frac{1}{K_3} \ln M > 0$$

De $t = 0$ até $t = t_e$ temos condição anaeróbica e (2) é válida; após $t = t_e$, a demanda de oxigênio é inferior à oferta ($K_1 L < G$) e caímos novamente no caso aeróbico.

Se $K_1 L_o \leq G$, também caímos imediatamente no caso aeróbico, pois então a oferta de oxigênio será superior à demanda.

L e D estão representados na figura 23, para $K_1 L_o > G$.

3.1.1.2 — Subcaso limite em que $K_3 = 0$ e $K_1 > 0$

As equações (1) se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = - (K_2 D_m + A_n - P)$$

$$D = D_m$$

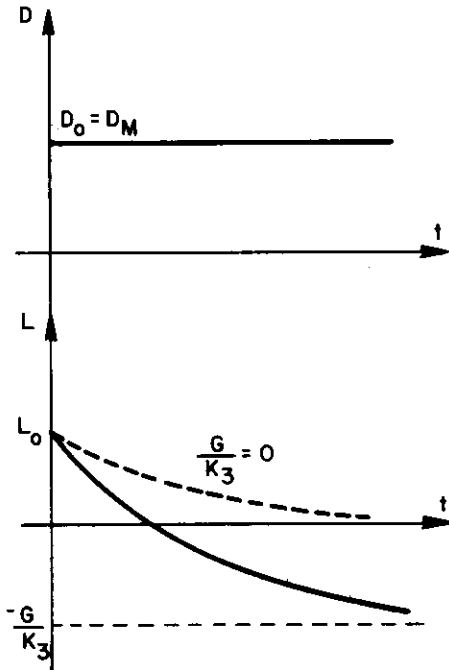


figura 23

Sua resolução fornece:

$$L = L_0 - Gt \tag{3}$$

com $G = K_2 D_m + A_n - P > 0$

A condição de validade de (3) é a mesma do subcaso anterior. Introduzindo a condição de equilíbrio em (3) obtemos:

$$t_e = \frac{L_0}{G} - \frac{1}{K_1}$$

Portanto, para $K_1 L_0 > G$, a equação (3) é válida até t_e .

Observemos que se $K_1 L_0 > G$, t_e resulta positivo, pois aí

$$\frac{L_0}{G} > \frac{1}{K_1}$$

Após t_e caímos novamente no caso aeróbico.

Se $K_1 L_0 \leq G$, também caímos imediatamente no caso aeróbico, pois então a oferta de oxigênio será superior à demanda.

L e D estão representados na figura 24, para $K_1 L_0 > G$.

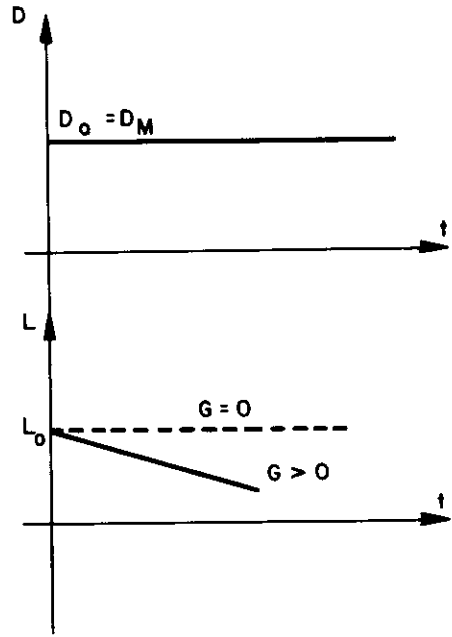


figura 24

Nos dois casos anteriores, se $K_1 = 0$, a condição $K_1 L < G$ sempre será obedecida; portanto caímos no caso aeróbico, não tendo sentido calcular t_e com as fórmulas vistas.

3.1.2 — Subcaso em que $K_2 D_m + A_n > 0$ e $K_2 D_m + A_n - P \leq 0$

Neste caso há produção de oxigênio e sobra DBO distribuído, o qual é adicionado a L.

3.1.2.1 — Subcaso em que $K_3 > 0$

Podemos escrever:

$$\frac{dL}{dt} = P - (K_2 D_m + A_n) - K_3 L \tag{4}$$

$$D = D_m$$

pois L cresce na mesma velocidade em que sobra DBO distribuído; o termo $K_3 L$ leva em conta a sedimentação da matéria orgânica.

As equações (4) são as mesmas equações (1) vistas anteriormente, e sua resolução fornece:

$$L = \left(L_0 + \frac{G}{K_3} \right) e^{-K_3 t} - \frac{G}{K_3}$$

onde: $G = K_2 D_m + A_n - P \leq 0$

Estas equações são válidas até o fim do trecho considerado.

L e D estão representados na figura 25.

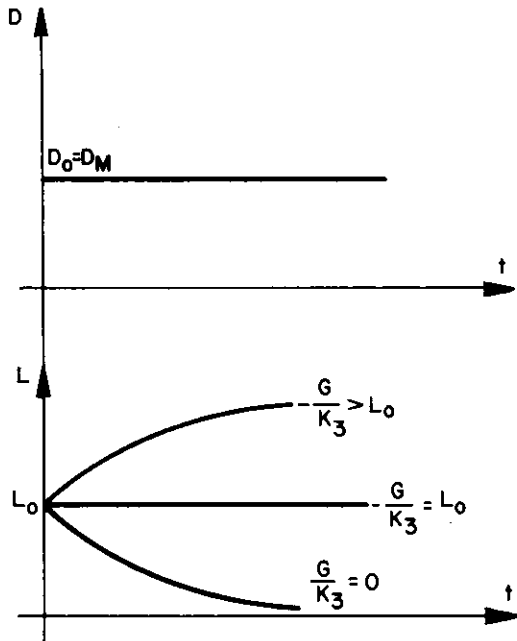


figura 25

3.1.2.2 — Subcaso em que $K_3 = 0$

As equações (4) se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = P - (K_2 D_m + A_n)$$

$$D = D_m$$

já vistas anteriormente.

Sua resolução fornece:

$$L = L_0 - Gt$$

com $G = K_2 D_m + A_n - P \leq 0$

Estas equações são válidas até o fim do trecho considerado. L e D estão representados na figura 26.

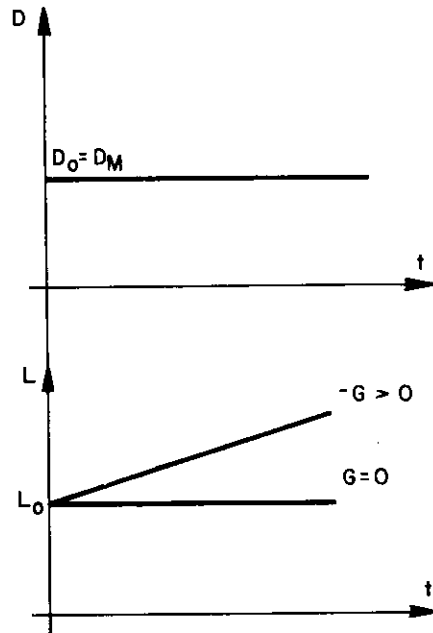


figura 26

3.1.3 — Subcaso em que $K_2 D_m + A_n \leq 0$

Neste caso, a produção de redutores é maior que a produção de oxigênio.

3.1.3.1 — Subcaso em que $K_3 > 0$

Podemos escrever:

$$\frac{dL}{dt} = P - K_3 L \tag{5}$$

$$\frac{dD}{dt} = - (K_2 D_m + A_n)$$

pois L cresce devido ao DBO distribuído, e D cresce na velocidade em que sobram redutores.

A resolução dessas equações fornece:

$$L = \left(L_0 - \frac{P}{K_3} \right) e^{-K_3 t} + \frac{P}{K_3}$$

$$D = D_m - (K_2 D_m + A_n) t$$

Estas equações são válidas até o fim do trecho considerado. L e D estão representados na figura 27.

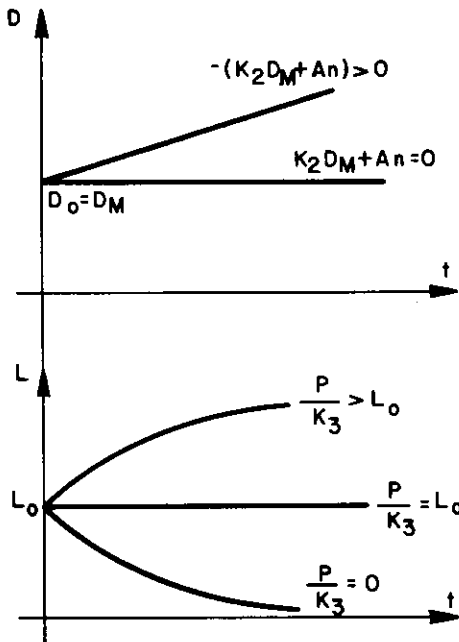


figura 27

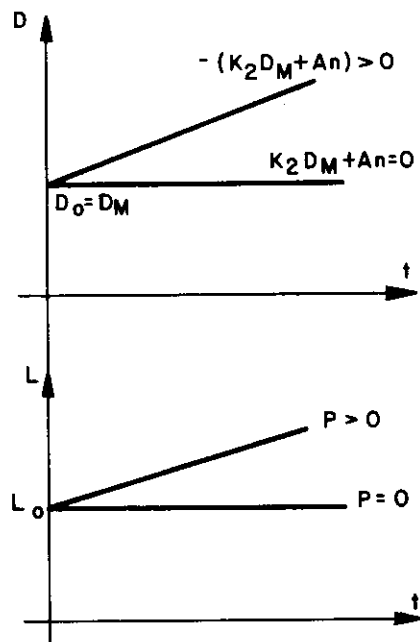


figura 28

3.1.3.2 — Subcaso em que $K_3 = 0$

As equações (5) se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = P$$

$$\frac{dD}{dt} = - (K_2 D_m + A_n)$$

Sua resolução fornece:

$$L = L_0 + Pt$$

$$D = D_m - (K_2 D_m + A_n) t$$

Estas equações são válidas até o fim do trecho considerado.

L e D estão representados na figura 28.

3.2 — Caso em que a concentração de oxigênio é negativa ($D_0 > D_m$).

Aqui temos inicialmente uma concentração de redutores na água.

3.2.1 — Subcaso em que $K_2 D_m + A_n > 0$

Neste caso há produção de oxigênio, a qual consome os redutores.

3.2.1.1 — Subcaso em que $K_3 > 0$

Podemos escrever:

$$\frac{dL}{dt} = P - K_3 L \tag{6}$$

$$\frac{dD}{dt} = - (K_2 D_m + A_n)$$

Sua resolução fornece:

$$L = \left(L_0 - \frac{P}{K_3} \right) e^{-K_3 t} + \frac{P}{K_3}$$

$$D = D_0 - (K_2 D_m + A_n) t \tag{7}$$

Estas equações são válidas até $D = D_m$; o instante em que ocorrer essa condição será chamado de tempo de cruzamento (t_{cz}).

Introduzindo essa condição em (7) obtemos t_{cz} :

$$t_{cz} = \frac{D_0 - D_m}{K_2 D_m + A_n}$$

Após $t = t_{cz}$, caímos em um dos casos anteriores, conforme os valores de $K_1 L$, A_n , $K_2 D_m$, P .

L e D estão representados na figura 29.

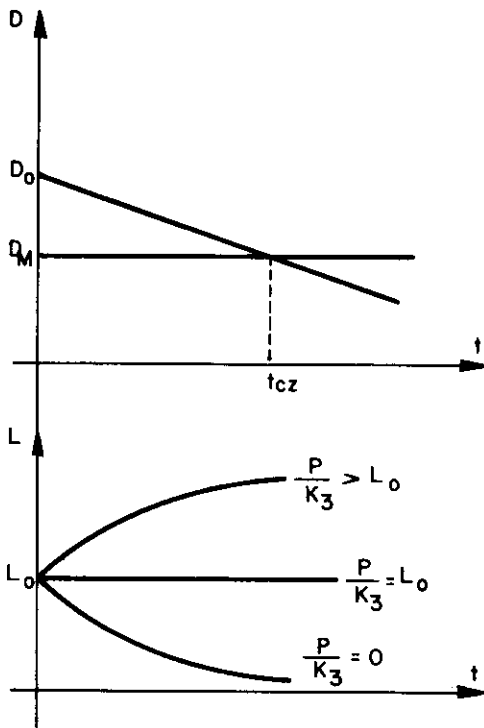


figura 29

3.2.1.2 — Subcaso em que $K_3 = 0$

As equações (6) se reduzem a:

$$\frac{dL}{dt} = P$$

$$\frac{dD}{dt} = - (K_2 D_m + A_n)$$

Sua resolução fornece:

$$L = L_0 + Pt$$

$$D = D_0 - (K_2 D_m + A_n) t$$

Estas equações são válidas até

$$t_{cz} = \frac{D_0 - D_m}{K_2 D_m + A_n}$$

(mesma equação do caso anterior).

Após t_{cz} caímos igualmente em um dos casos anteriores.

D e L estão representados na figura 30.

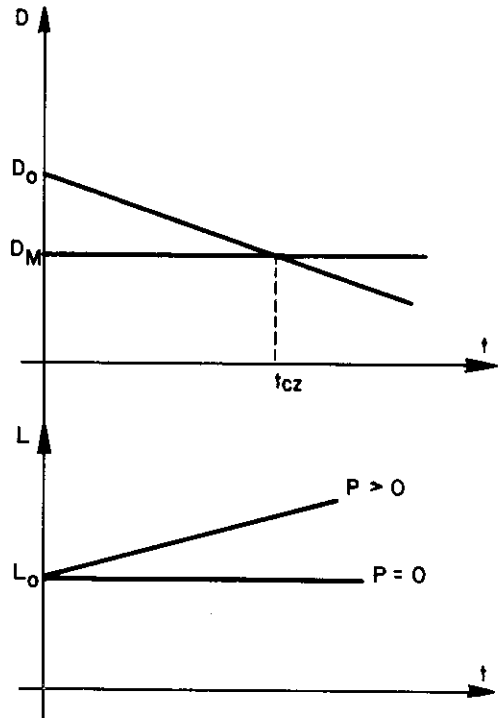


figura 30

3.2.2 — Subcaso em que $K_2 D_m + A_n \leq 0$

Neste caso a produção de redutores é maior do que a de oxigênio.

3.2.2.1 — Subcaso em que $K_3 > 0$

Temos as mesmas equações do item 3.2.1.1:

AUTODEPURAÇÃO DAS ÁGUAS

$$L = (L_0 - \frac{P}{K_3}) e^{-K_3 t} + \frac{P}{K_3}$$

$$D = D_0 - (K_2 D_m + A_n) t$$

Neste caso porém não há cruzamento com $D = D_m$, pois $D_0 > D_m$ e D é crescente ou constante. As equações são válidas até o fim do trecho considerado.

D e L estão representados na figura 31.

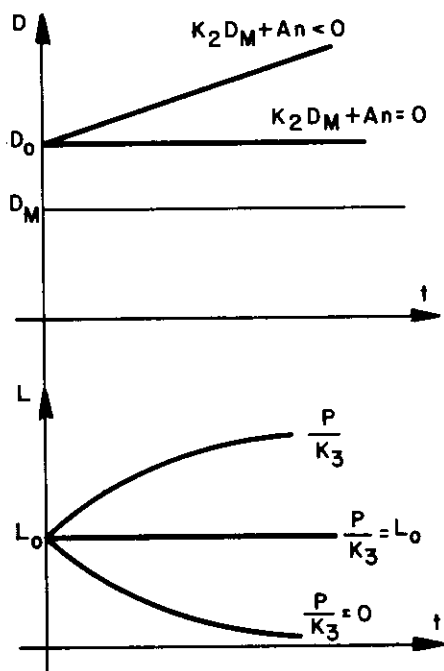


figura 31

3.2.2.2 — Subcaso em que $K_3 = 0$

As equações são as mesmas do item

3.2.1.2:

$$L = L_0 + Pt$$

$$D = D_0 - (K_2 D_m + A_n) t$$

Não temos cruzamento (D é o mesmo do caso anterior), e as equações são válidas até o fim do trecho considerado.

D e L estão representados na figura 32.

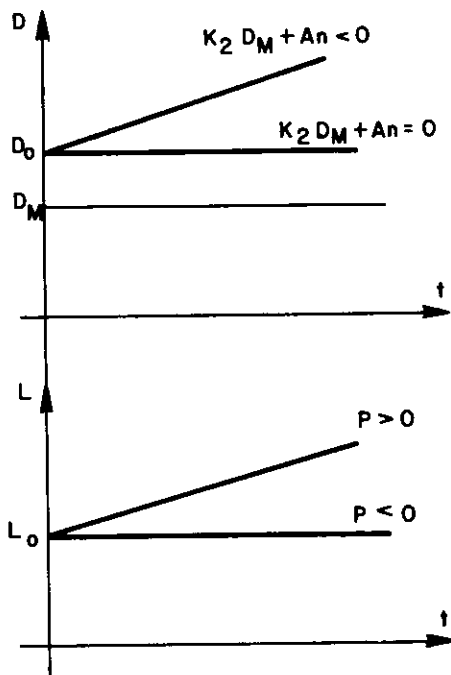


figura 32

ANEXO A

Apresentamos a seguir um resumo das situações estudadas nas partes 2 e 3 desse trabalho:

PARTE 2) Situações aeróbicas ($D_0 < D_m$)

2.1) $K_2 > 0, K_1 + K_3 > 0, K_2 \neq K_1 + K_3$

2.1.1) $\alpha = 0, \beta = 0$

2.1.2) $\alpha = 0, \beta \neq 0$

2.1.3) $\alpha \neq 0, \beta = 0$

2.1.4) $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

2.1.4.1) $\alpha \cdot \beta > 0$

2.1.4.2) $\alpha \cdot \beta < 0$

2.2) $K_2 > 0, K_1 + K_3 = 0$

2.2.1) $A + K_2 D_0 = 0$

2.2.2) $A + K_2 D_0 \neq 0$

2.3) $K_2 = 0, K_1 + K_3 > 0$

2.3.1) $\gamma = 0, \delta = 0$

- 2.3.2) $\gamma = 0, \delta \neq 0$
- 2.3.3) $\gamma \neq 0, \delta = 0$
- 2.3.4) $\gamma \neq 0, \delta \neq 0$
- 2.3.4.1) $\gamma, \delta > 0$
- 2.3.4.2) $\gamma, \delta < 0$

2.4) $K_2 = 0, K_1 + K_3 = 0$

2.4.1) $A = 0$

2.4.2) $A \neq 0$

2.5) $K_2 > 0, K_1 + K_3 > 0, K_2 = K_1 + K_3$

2.5.1) $\theta = 0, \phi = 0$

2.5.2) $\theta = 0, \phi \neq 0$

2.5.3) $\theta \neq 0, \phi = 0$

2.5.4) $\theta \neq 0, \phi \neq 0$

2.5.4.1) $\theta > 0, \phi > 0$

2.5.4.2) $\theta < 0, \phi < 0$

2.5.4.3) $\theta > 0, \phi < 0$

2.5.4.4) $\theta < 0, \phi > 0$

- 3) Aplique as equações da situação 3.2 até um eventual cruzamento com $D = D_m$; se não cruzar até o fim do trecho vá para 9.
- 4) Verifique em que caso estamos. Se no caso 3.1.1, prossiga; se no caso 3.1.2, vá para 7.; se no caso 3.1.3, vá para 8.
- 5) Teste se a situação de equilíbrio já foi atingida. Se já foi, volte para 2.
- 6) Aplique as equações da situação 3.1.1 até atingir a condição de equilíbrio, e volte para 2.
- 7) Aplique as equações 3.1.2 até o fim do trecho e vá para 9.
- 8) Aplique as equações 3.1.3 até o fim do trecho.
- 9) Fim.

PARTE 3) Situações anaeróbicas.

3.1) $D_0 = D_m$

3.1.1) $K_2 D_m + A_n > 0, K_2 D_m + A_n - P > 0$

3.1.1.1) $K_3 > 0, K_1 > 0$

3.1.1.2) $K_3 = 0, K_1 > 0$

3.1.2) $K_2 D_m + A_n > 0, K_2 D_m + A_n - P \leq 0$

3.1.2.1) $K_3 > 0$

3.1.2.2) $K_3 = 0$

3.1.3) $K_2 D_m + A_n \leq 0$

3.1.3.1) $K_3 > 0$

3.1.3.2) $K_3 = 0$

3.2) $D_0 > D_m$

3.2.1) $K_2 D_m + A_n > 0$

3.2.1.1) $K_3 > 0$

3.2.1.2) $K_3 = 0$

3.2.2) $K_2 D_m + A_n \leq 0$

3.2.2.1) $K_3 > 0$

3.2.2.2) $K_3 = 0$

ANEXO B

Para a determinação da DBO e do OD ao longo de um trecho, os casos vistos se alternam de acordo com o seguinte algoritmo:

- 1) A partir do deficit inicial, verifique em que situação estamos. Se na situação 3.1, vá para 4., se na situação 3.2, vá para 3., se na situação 2, prossiga.
- 2) Aplique as equações da situação 2 até um eventual cruzamento com $D = D_m$; se não cruzar até o fim do trecho vá para 9.

ANEXO C

Apresentamos a seguir algumas aplicações dos casos limites estudados neste trabalho:

- 1) Cálculo da concentração de sólidos em suspensão (lançamentos concentrados e/ou distribuídos).

Neste caso utilizamos as fórmulas de L dos casos 2.1 ou 2.3, fazendo:

$$K_1 = 0, K_3 > 0,$$

As fórmulas de D não são utilizadas.

- 2) Cálculo da concentração de substâncias conservativas (lançamentos concentrados e/ou distribuídos).

Neste caso utilizamos as fórmulas de L dos casos 2.2 ou 2.4, fazendo:

$$K_1 + K_3 = 0,$$

As fórmulas de D não são utilizadas.

- 3) Cálculo da concentração de bactérias segundo a lei de Chick generalizada (lançamentos concentrados e/ou distribuídos [6]).

Neste caso utilizamos as fórmulas de L dos casos 2.1 ou 2.3, fazendo:

$$K_1 = 0, K_3 = K_0$$

As fórmulas de D não são utilizadas.

- 4) Cálculo de concentrações em condições de reoxigenação nula (por exemplo, quando há uma película de óleo sobre a superfície das águas).

Neste caso utilizamos as fórmulas vistas, fazendo $K_2 = 0$.

AGRADECIMENTOS

Desejamos externar nosso reconhecimento aos seguintes especialistas que contribuíram para a realização desse trabalho: J. M. Costa Rodrigues, M. Lothar Hess, Samuel M. Branco, Celso E. Monteiro, Carai R. de A. Bastos e A. V. do Couto. Agradecimentos especiais são devidos aos engs. Camal A. Rameh, Neison L. R. Nucci e Milo R. Guazzelli pelo imprescindível apoio recebido, e ao engenheiro Augusto F. Brandão Jr., pela valiosa cooperação.

REFERÊNCIAS

1. Streeter, H. W. and Phelps, E. B., A study of the pollution and natural purification of the Ohio River, Public Health Bulletin, 146, U.S. Public Health Service, Washington, D.C., Feb. 1925.
2. Azevedo Netto, J. M., Autodepuração dos cursos d'água - curva de depressão de oxigênio, Revista D.A.E., n.º 62, setembro de 1966.
3. Camp, T. R., Water and its impurities, Reinhold Publishing Co., New York, 1963.
4. Loucks, D. P., Revelle, C. S. and Lynn, W. R., Linear programming models for water pollution control, Management Science, vol. 14, n.º 4, December 1967.
5. Dresnack, R. and Doblins, W. E., Numerical analysis of BOD and DO profiles, Journal of the Sanitary Engineering Division, Proc. of the A.S.C.E., October 1968.
6. Del Picchia, W., Aplicação da Transformada de Laplace a problemas de engenharia sanitária, Revista D.A.E., número 93, dezembro de 1973.
7. Castillo, J. G. y Gundelich, J. M., Proposición de un modelo matemático para describir el proceso de autopurificación de un curso de agua superficial em condiciones anaerobicas, XIV Congreso Interamericano de Ingenieria Sanitaria, México, Agosto de 1974.