CAMPO CENTRAL

Engº EDUARDO GOMES DOS REIS (*)

Chama-se Campo Central aquele em que a resultante de todas as forças externas aplicadas ao conjunto de corpos que constitui o sistema, passa constantemente por um ponto fixo, denominado foco.

Assim sendo, a trajetória descrita pelo centro de gravidade dos corpos em movimento, é sempre uma curva plana, porque o momento resultante das forças externas em relação ao foco é sempre nulo.

Como se sabe, num campo central, a velocidade areolar é constante, isto é, o raio vetor varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Baseando-nos nessas premissas, faremos o estudo da trajetória de um único corpo em movimento, sujeito a um campo central atrativo que passa pelo foco F, como mostra a figura 1.

Vamos ainda denominar os diversos elementos da figura 1, como seja:

- V_0 — velocidade do corpo no vértice da trajetória
- ρ_0 — distância mínima do corpo ao foco F
- V — velocidade do corpo num ponto qualquer P_1 da trajetória
- ρ — distância do ponto qualquer P_1 ao foco F
- φ — ângulo formado entre os raios vetores ρ_0 e ρ. Esse ângulo será contado positivamente no sentido horário.

(*) Diretor Técnico de Serviço do QE-SSOP à disposição da SABESP.

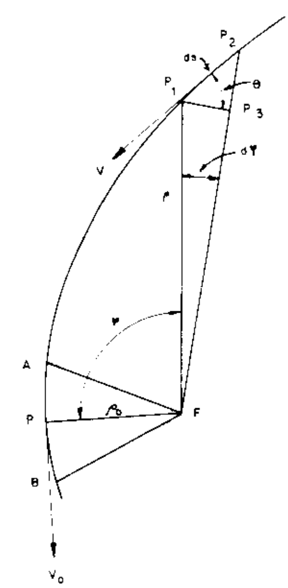

Fig. 1

Se considerarmos um intervalo de tempo infinitesimal dt, os raios vetores ρ_0 e ρ varrerão áreas iguais, e assim poderemos escrever:

$$\frac{\rho_0 V_0 \, dt}{2} = \frac{\rho V \cos\theta \, dt}{2}$$

ou

$$\rho_0 V_0 \, dt = \rho V \, dt \cos\theta$$

Mas

$$V = \frac{ds}{dt} \quad \text{e} \quad \cos\theta = \frac{\rho \, d\psi}{ds}$$

Levando esses valores à fórmula (1), temos

$$\rho_o V_o \, dt = \rho^2 d\psi$$

e a fórmula genérica do tempo será:

$$t = \int \frac{\rho^2 \, d\psi}{\rho_o V_o}$$

Como se vê, essa fórmula dará o intervalo de tempo decorrido entre dois pontos quaisquer da trajetória, admitindo-se ρ_o e V_o como elementos conhecidos.

Por outro lado a fórmula (1) permitirá conhecer a velocidade em qualquer ponto da trajetória, uma vez conhecidos V_o e ρ_o. Assim:

$$\rho_o V_o = \rho V \cos \theta$$

mas a figura n.° 1 nos diz que:

$$\cos \theta = \frac{P_1 P_3}{P_1 P_2} = \frac{\rho \, d\psi}{ds}$$

Mas

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{d\psi}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2} d\psi} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2}}$$

Finalmente, a velocidade em um ponto qualquer da trajetória, uma vez conhecidos ρ_o e V_o, será:

$$V = \rho_o V_o \frac{\sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2}}{\rho^2}$$

A figura n.° 2 mostra quatro das trajetórias que o corpo poderá percorrer em torno do foco F. Dessas quatro trajetórias, apenas duas são constantes, isto é, a parábola e a circunferência. Haverá, portanto, um número ilimitado de hipérboles e elipses.

Como se sabe, a equação de cada uma dessas trajetórias referida ao foco será:

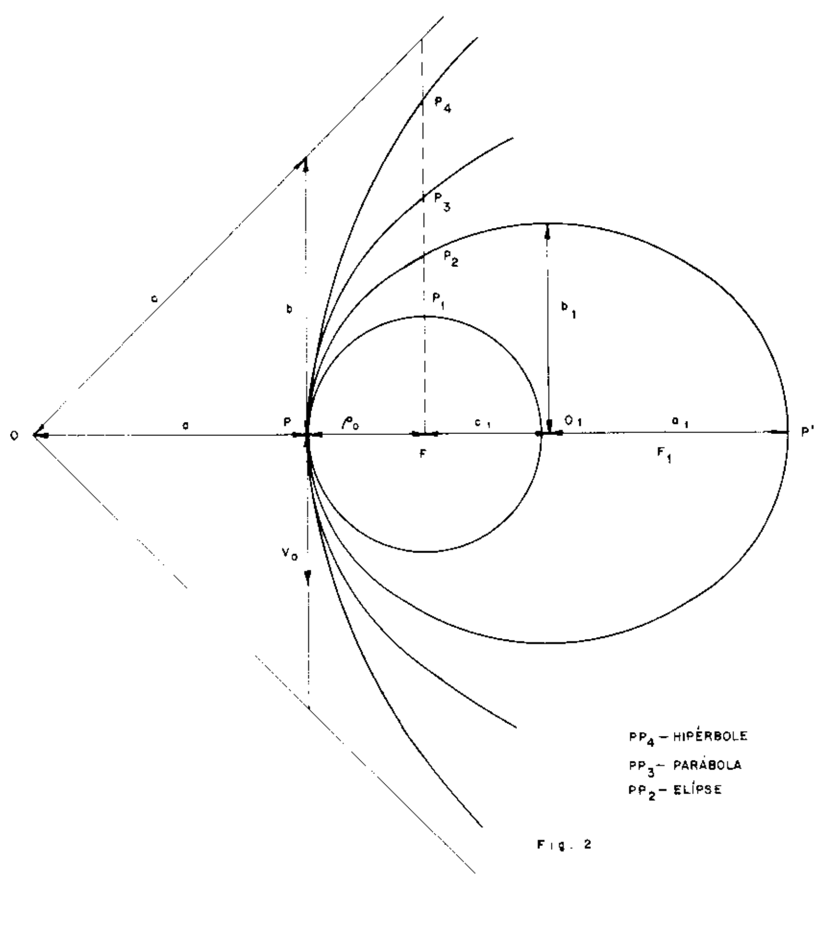

Fig. 2

Hipérbole

$$\rho = \frac{b^2}{a + c\cos\psi}$$

Parábola

$$\rho = \frac{2\rho_o}{1 + \cos\psi}$$

Elipse

$$\rho = \frac{b_1^2}{a_1 + c_1\cos\psi}$$

Circunferência

$$\rho = \rho_o$$

Portanto, conhecida a equação da trajetória, a velocidade máxima V_o do corpo no vértice da curva, e a sua distância mínima ρ_o ao foco, a velocidade em um ponto qualquer da trajetória será obtida das equações (5), (6), (7), (8) e (9), como segue:

Hipérbole

$$V = \rho_o V_o \frac{\sqrt{a^2 + c^2 + 2ac\cos\psi}}{b^2}$$

sendo

$$\rho_o = c - a \qquad b^2 = c^2 - a^2 \qquad c > a$$

Parábola

$$V = V_o \cos\frac{\psi}{2}$$

onde

$$c = a$$

Elipse

$$V = \rho_o V_o \frac{\sqrt{a_1^2 + c_1^2 + 2a_1c_1\cos\psi}}{b_1^2}$$

sendo

$$\rho_o = a_1 - c_1 \qquad b_1^2 = a_1^2 - c_1^2 \qquad c_1 < a_1$$

Circunferência

$$V = V_o$$

e

$$c = 0$$

O intervalo de tempo decorrido entre dois pontos quaisquer da trajetória poderá ser obtido na equação (3), substituindo-se o valor de ρ dado nas aquações (6), (7), (8) e (9).

Para a hipérbole teremos:

$$t = \frac{b^4}{\rho_o V_o} \int \frac{d\psi}{(a + c\cos\psi)^2}$$

Para a parábola:

$$t = \frac{4\rho_o}{V_o} \int \frac{d\psi}{(1 + \cos\psi)^2}$$

Para a elipse:

$$t = \frac{b_1^4}{\rho_o V_o} \int \frac{d\psi}{(a_1 + c_1\cos\psi)^2}$$

Para a circunferência:

$$t = \frac{\rho_o}{V_o} \int d\psi$$

A integração da fórmula (14) é fácil, e a da fórmula (16) é imediata. Mas a integração das fórmulas (13) e (15) referentes à hipérbole e à elipse é muito penosa, necessitando várias mudanças da variável. Por isto daremos apenas os resultados finais já devidamente simplificadas.

Para a hipérbole, segundo a fórmula (13) teremos:

$$t = \frac{a}{V_o}\left(\frac{2\frac{c}{a}\,tg\frac{\psi}{2}}{1 - \frac{c-a}{c+a}\,tg^2\frac{\psi}{2}} - \sqrt{\frac{c+a}{c-a}}\,\ell n\,\frac{1 + \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}\,tg\frac{\psi}{2}}{1 - \sqrt{\frac{c-a}{c+a}}\,tg\frac{\psi}{2}}\right) + C$$

Para a parábola, segundo a fórmula (14) teremos:

$$t = \frac{2\rho_o}{3V_o}\cdot tg\frac{\psi}{2}\left(tg^2\frac{\psi}{2} + 3\right) + C$$

Para a elipse, segundo a fórmula (15) teremos:

$$t = \frac{a_1+c_1}{V_o}\sqrt{\frac{a_1+c_1}{a_1-c_1}}\left(\frac{2a_1}{a_1+c_1}\,arc\;tg\sqrt{\frac{a_1-c_1}{a_1+c_1}}\,tg\frac{\psi}{2} - \frac{c_1\,sen\,\psi}{a_1+c_1\cos\psi}\right) + C$$

Para a circunferência, segundo a fórmula (16) teremos:

$$t = \frac{\rho_0 \varphi}{V_0} + C$$

Uma vez estabelecidas as equações fundamentais da velocidade e do tempo de percurso em cada trajetória, vamos aplicá-las a um caso concreto. Supunhamos um bólide de massa desprezível, descrevendo em relação ao planeta Terra, uma das órbitas indicadas na figura 2. Vamos ainda admitir o ponto P distando do ponto F (centro da Terra) de uma grandeza igual a 2 raios médios terrestres, ou seja, 12.735.300 m. Nessas condições o bólide estará totalmente fora da atmosfera terrestre.

A trajetória descrita pelo corpo dependerá da sua velocidade máxima V_o no ponto P ou perigeu. Como foi dito anteriormente, haverá apenas duas trajetórias constantes, a parábola e a circunferência. Vamos então determinar a velocidade em cada uma, em função dos dados estabelecidos anteriormente, como seja

$$\rho_o = PF = 2\,R_o = 12.735.300 \text{ m}$$

Sendo g_o a aceleração da gravidade na superfície da terra, na intersecção da linha PF; a uma altura x acima desse ponto será:

$$g_x = g_o \frac{R^2}{(R+x)^2}$$

O trabalho elementar realizado pela queda vertical de uma massa m colocada nesse ponto, será:

$$dE = m g_o \frac{R^2}{(R+x)^2}\, dx$$

Se essa massa cair de uma altura infinita até à altura do ponto P, isto é, quando x for igual a R, o trabalho realizado em valor absoluto será:

$$E = \int_R^{\infty} m g_o \frac{R^2}{(R+x)^2}\, dx = \frac{1}{2}\, m g_o R$$

Sendo v a velocidade de chegada no ponto P, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}\, m\, V^2 = \frac{1}{2}\, m g_o R$$

ou

$$V = \sqrt{g_o R}$$

que, como se sabe, será a velocidade V da órbita parabólica que passa pelo ponto P. Vamos calculá-la, admitindo

$$g_o = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Assim:

$$V = \sqrt{9{,}8 \times 6367650} = 7899{,}55 \text{ m/s}$$

A velocidade da órbita circular passando pelo ponto P, é facilmente determinada pela fórmula:

$$\frac{m V^2}{2R} = m g_o \frac{R^2}{(R+R)^2}$$

ou

$$V = \sqrt{\frac{g_o R}{2}} = \sqrt{31201485} = 5585{,}83 \text{ m/s}$$

Determinadas essas duas velocidades fundamentais, poderemos estabelecer as diversas trajetórias do bólide relativamente à terra em função da sua velocidade V_o no ponto P, como mostra a figura 2. Assim, quando:

$V_o > 7.899{,}55$ m/s — trajetória hiperbólica

$V_o = 7.899{,}55$ m/s — trajetória parabólica

$V_o = 5.585{,}83$ m/s — trajetória circular

Para todos os valores de V_o compreendidos entre as trajetórias parabólica e circular, teremos trajetórias elípticas. Ainda quando

$V_o < 5.585{,}83$ m/s — trajetória de queda em espiral

e quando

$V_o = 0$ — queda vertical

Assim sendo, vamos supor inicialmente

$$V_0 = 10.000 \text{ m/s},$$

o que corresponderá a uma trajetória hiperbólica.

Quando o bólide estiver a uma distância infinita da terra, a sua velocidade residual será evidentemente a diferença entre a sua velocidade V_0 e a velocidade parabólica no ponto P. Então:

Mas quando o bólide estiver a uma distância infinita da terra, a fórmula (10) para quando $\cos \varphi = -\frac{a}{c}$, dará:

$$Vr = \frac{\rho_0 V_0}{b}$$

Sendo agora conhecidos V_0, V_r e ρ_0, obteremos facilmente o valor de b, como seja:

$$b = \frac{12735300 \times 10000}{2100{,}45} = 60631293 \text{ m}$$

Mas

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) = \rho_0 (c+a)$$

Portanto

$$c + a = \frac{b^2}{\rho_0} = 288658586 \text{ m}$$

Sendo conhecidos c + a e $\rho_0 = c - a$, obteremos facilmente os valores de c e de a. Assim:

$$c = 150.696.943 \text{ m}$$

e

$$a = 137.961.643 \text{ m}$$

Assim, a equação polar da trajetória hipérbolica do bólide referida ao centro da terra será:

$$\rho = \frac{60631293^2}{137961643 + 150696943 \cos \varphi} \text{ m}$$

Vamos agora supor que a velocidade V_0 no ponto P seja igual a 7.899,55 m/s. Nesse caso a trajetória será parabólica e a sua equação polar terá a forma:

$$\rho = \frac{25470600}{1 + \cos \varphi} \text{ m}$$

Passaremos a seguir à determinação dos elementos da trajetória elíptica. Como se sabe, num campo central, a soma das energias cinéticas de um corpo em movimento, em dois pontos diametralmente opostos de uma trajetória fechada, é igual à energia cinética correspondente à velocidade parabólica na abcissa do foco. No nosso caso, sendo V_p a velocidade parabólica no perigeu, V_0 a velocidade real no ponto P, e V_1 a velocidade no ponto P', diametralmente oposto ao ponto P, ou apogeu, teremos:

$$\frac{1}{2} m V_p^2 = \frac{1}{2} m V_0^2 + \frac{1}{2} m V_1^2$$

ou

$$V_1 = \sqrt{V_p^2 - V_0^2}$$

Vamos assim admitir uma trajetória elíptica, onde

$$V_0 = 6.500 \text{ m/s}.$$

Portanto:

$$V_1 = \sqrt{62.402.970 - 42250000} = 4489{,}22 \text{ m/s}$$

Da figura n.º 2, pela lei da velocidade areolar, obtemos:

$$V_0 \; (a_1 - c_1) = V_1 (a_1 + c_1)$$

ou

$$a_1 + c_1 = \frac{V_0 \rho_0}{V_1}$$

Mas

$$a_1 - c_1 = \rho_0$$

Portanto

$$a_1 = \frac{\rho_0}{2} \left(\frac{V_0 + V_1}{V_1} \right) = \frac{12735.300}{2} \left(\frac{6500 + 4489{,}22}{4489{,}22} \right)$$

ou

$$a_1 = 15\,587.453 \text{ m}$$

e

$$c_1 = 15.587.453 - 12735.300 = 2\,852.153 \text{ m}$$

e

$$b_1 = \sqrt{a_1^2 - c_1^2} = 15324290 \text{ m}$$

Assim, a equação da trajetória elíptica do bólide será:

$$\rho = \frac{15324290^2}{15587453 + 2852153 \cos \psi} \text{ m}$$

Quanto às trajetórias de queda em espiral e queda vertical, num campo central onde a força atrativa é função da distância ao foco, para não prolongar demasiadamente este trabalho, serão estudadas em outra ocasião.

A título de curiosidade, passaremos à determinação do tempo decorrido a partir do perigeu, até a vertical que passa pelo foco, em cada trajetória, como mostra a figura n.º 2, isto é, entre os pontos PeP_1, PeP_2, PeP_3 e PeP_4.

Para tanto, estabeleceremos de zero a $\frac{\pi}{2}$, os limites de integração das fórmulas do tempo, números (17), (18), (19) e (20), substituindo também as constantes a, b, c, ρ_0, a_1, b_1 e c_1 pelos seus valores achados anteriormente. Daremos apenas os valores numéricos achados.

Para a hipérbole —

$$t = 58 \text{ m e } 46 \text{ s.}$$

Para a parábola —

$$t = 1 \text{ h., } 11 \text{ m. e } 39 \text{ s.}$$

Para a elipse —

$$t = 56 \text{ m. e } 17 \text{ s.}$$

Para a circunferência —

$$t = 59 \text{ m. e } 41 \text{ s.}$$

O tempo de uma revolução completa na trajetória elíptica será:

$$V_0 \rho t = 2 \pi a_1 b_1$$

ou

$$t = \frac{2 \pi a_1 b_1}{V_0 \rho_0} = 5 \text{ h}, 2 \text{ m e } 11 \text{ s}$$

E o tempo de uma revolução completa na trajetória circular será:

$$t = \frac{2 \pi \rho_0}{V_0} = 3 \text{ h}, 58 \text{ m e } 45 \text{ s}$$

Do mesmo modo, pelas fórmulas (10), (11) e (12), poderemos facilmente determinar a velocidade em qualquer ponto da trajetória, o que faremos para os pontos P_2, P_3 e P_4, correspondentes à ordenada do foco. Encontramos assim os seguintes valores:

Para a hipérbole —

$$V = 7.078,00 \text{ m/s.}$$

Para a parábola —

$$V = 5.585,83 \text{ m/s.}$$

Para a elipse —

$$V = 5.585,83 \text{ m/s.}$$

A velocidade do bólide em qualquer ponto da trajetória circular é constante, e igual a

$$V = 5.585,83 \text{ m/s.}$$

Acabamos de constatar que as três últimas velocidades do bólide são iguais nos pontos estabelecidos anteriormente, isto é, na intersecção das suas trajetórias, com a vertical que passa pelo foco, o que pode também se demonstrar analiticamente. Na realidade, a variação da energia cinética do corpo em movimento, fará com que varie também a sua massa, alterando assim as trajetórias estudadas anteriormente. Entretanto, com as velocidades admitidas neste trabalho são muito pequenas em relação à velocidade da luz, a influência daquele fenômeno poderá ser considerada nula.