

CONTRIBUIÇÃO PARA O CÁLCULO DIRETO DE SISTEMAS COMPLEXOS DE CONDUTOS

por

ALFREDO BANDINI

Professor da Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas (SP) e da Escola Federal de Engenharia de Itajubá (MG). Consultor Técnico do Departamento de Águas e Energia Elétrica do Estado de São Paulo — Brasil.

RESUMO

O problema da fixação dos diâmetros de condutos constituindo um sistema complexo, é *hidráulicamente indeterminado*. Com efeito a solução envolve o cálculo: das cotas piezométricas Y dos N nós; dos diâmetros dos r condutos que convergem ou, respectivamente, divergem dos mesmos nós.

Entretanto, as equações disponíveis — expressando as perdas de carga em função de diâmetro e vazão — totalizam apenas o número r dos condutos.

Elimina-se a indeterminação impondo-se a condição de *mínimo custo*, uma vez que sejam satisfeitas as exigências de serviço previstas.

Em casos práticos de modesta importância (vazões pequenas e condutos de limitado comprimento) é lícito proceder à simples comparação econômica dos resultados obtidos atribuindo às cargas Y , séries diferentes de valores, oportunamente escolhidos.

Porém, quando de sistemas constantes de condutos compridos que veiculam grandes vazões, cabe equacionar o problema de *mínimo sob condição*, em forma analiticamente exata.

Os processos matemáticos aplicáveis são válidos em quanto seja possível verificar a *convexidade conveniente* da função a se tornar mínima.

São tratados, na presente memória, dois casos em que a referida convexidade pode ser rigorosamente comprovada, isto é, sistema com 1 nó e sistema com 2 nós; propõem-se, outrossim, processos gráficos para resolver os sistemas de equações obtidos.

CONTRIBUTION TO THE STRAIGHT CALCULATION OF COMPLEX PIPING SYSTEMS

by

ALFREDO BANDINI

Professor, Faculty of Engineering of Campinas, State University of Campinas (SP) and Federal School of Engineering of Itajubá (MG) — Technical Adviser to the Water and Electric Power Board of the State of São Paulo — Brasil.

SYNOPSIS

The problem relevant to calculation of diameters of pipings constituting a complex system, is *indetermined* under the *hydraulic standpoint*. As a matter of fact the solution involves the determination of: the head elevations Y (see II.1) on the take-off points of the system; the diameters of the r pipes which converge to or, respectively, diverge from the same points.

However we dispose only of r equations, giving head losses as a function of diameter and discharge.

The indetermination is eliminated, introducing the *minimum cost* condition, all other service exigencies being satisfied.

In practical cases of modest importance (small discharges and limited length pipes), it is allowed to make simply the economic comparison among the results obtained giving different series of suitable values to the head elevations Y .

But in case of systems consisting of long pipings conveying big discharges, the problem of minimum under condition ought to be put in equation in a form analytically exact.

The mathematical proceedings usually applied are valid as long as the *suitable convexity* of the function is verified.

In this note two cases, for which said convexity can be rigorously proved are considered, namely single take-off point system and two take-off points system.

Moreover graphic proceedings to resolve the obtained equations, are proposed.

Aos esquemas estudados, podem ser praticamente assemelhados sistemas complexos de transporte de água, de notável extensão e importância.

I — FÓRMULAS FUNDAMENTAIS

I.1 — A vazão Q , o diâmetro D e a declividade piezométrica I , são equacionadas pela fórmula monômica:

$$\frac{I}{Q^m} = b \cdot D^{-\mu} = \gamma(D) \quad (1)$$

No que diz respeito ao termo m, b, μ , limitar-nos-emos a dar as seguintes indicações.

Para tubos usados de ferro fundido e de aço, com diâmetro D variável entre os limites:

$$0,5 \leq D \leq 1,50$$

CONTI [I] [II] dá:

$$m = 2 \quad (2)$$

$$b = 0,0023 \quad (3)$$

$$\mu = 5,3 \quad (4)$$

Segundo WILLIAM-HAZEN [II], para tubos com diâmetros $D \leq 1,50$ m, pode-se por:

$$m = 1,85 \quad (5)$$

$$b = \frac{10,89}{C_1^{1,85}} \quad (6)$$

$$\mu = 4,87 \quad (7)$$

Atribuindo a C_1 valores correspondentes a diferentes rugosidades, foram obtidos [II] para b os valores consubstanciados no QUADRO N.º 1.

Complex water conveyance systems of remarkable extension and importance, may be assimilated to such models as these.

I — FUNDAMENTAL FORMULAE

I.1 — Discharge Q , diameter D and pressure gradient I are put in equation by monomial formula

As far as the coefficients m, b, μ are concerned, we will confine ourselves to give the next information.

For normal roughness cast-iron or steel pipes and with diameters included between the limits

For pipes with diameters $D \leq 1,50$ m, according to WILLIAM-HAZEN [II] it may be taken

The values b shown in PROSPECT N. 1 were obtained [II] assigning to C_1 values corresponding to different roughness.

QUADRO N. 1 (PROSPECT N. 1)

Categoria de Conduto	b	Classes
Aço rebitado (usados)	0,002869	Riveted steel Pipes; normal age
Aço soldado (usados)	0,002581	Soldered steel Pipes; normal age
Ferro Fundido (usados)	0,002581	Cast iron Pipes; normal age
Ferro fundido revestido de cimento	0,001781	Cement-lined cast iron pipes
Concreto com acabamento comum	0,001516	Concrete Pipes, washed inside with cement mortar
Aço galvanizado	0,001406	Galvanized steel Pipes
Aço soldado com revestimento especial	0,001307	Smooth lining soldered steel Pipes
Eternit	0,001219	Eternit

Para diâmetros $D > 0,50 m$ — sem limite superior — sugerimos o uso da fórmula de BANDINI [II] [III] em virtude da qual resulta:

$$m = 2 \quad (8)$$

$$b = \left(\frac{n}{0,1317} \right)^2 = 10,33 n^2 \quad (9)$$

$$\mu = 5,33 \quad (10)$$

Recordamos que $0,3117$ é o coeficiente de forma da secção circular completa, enquanto n é o coeficiente de GANGULLET e KUTTER, que deverá ser convenientemente escolhido consultando as tabelas publicadas em livros e manuais [IV] ou se fôr preciso, calculando o número índice de resistência por experiências diretas. Limitar-nos-emos a fornecer (QUADRO N.º 2) alguns valores orientativos do coeficiente α , pelo qual devem ser multiplicados os algarismos referidos no QUADRO N. 1, para obter os valores b correspondentes à fórmula (9). Esses valores variam com o diâmetro D e a velocidade V , nos intervalos ($0,5 \leq D \leq 1,5$) e, respectivamente ($1 \leq V \leq 3$). Valores intermediários podem ser calculados pela interpolação numérica ou gráfica, construindo os diagramas correspondentes a função $f(D, V_0)$ ou $f(D_0, V)$, isto é fazendo variar D ou V , e mantendo constante a outra magnitude.

For diameters $D > 0,50 m$ without upper limit — BANDINI's formula [II] [III] use is suggested, by virtue of which

It should be recalled that $0,3117$ is the coefficient of form of the full circular cross section, while n is GANGULLET & KUTTER's coefficient, which shall be suitably selected from tables published in books or hand-books [IV] or — if necessary — by calculating the friction coefficient through specific experiences. We will confine ourselves to give (PROSPECT N. 2) some orientation values of coefficient α , by which the figures contained in TABLE N. 1 have to be multiplied, in order to obtain the values b corresponding to eq (9). These values vary between the limits ($0,5 \leq D \leq 1,5 m$) for diameters and respectively the limits ($1 \leq V \leq 3 m/s$) for speeds. Intermediate values may be easily calculated through numerical or graphic interpolation, plotting the function $f(D, V_0)$ or the function $f(D_0, V)$ namely letting D or V be varied and the other magnitude be maintained constant.

QUADRO (PROSPECT) N. 2 — Valores do coeficiente α (Values of coefficient α)

Diâmetro D (Diameter) (m)	Velocidade (Speed) V em (in) m/s		
	1,00	2,00	3,00
0,500	0,901	0,838	0,788
1,000	1,007	0,936	0,880
1,500	1,074	1,000	0,939

I.2 — CUSTO DE UM CONDUTO. É função do peso w por $m.l$ do mesmo. Indicando por D o diâmetro e p a pressão hidráulica, ter-se-á:

$$w = f(D, p) \quad (11)$$

Contudo, nos casos que interessam o nosso estudo — transporte de água potável — as variações de pressão ao longo do eixo longitudinal

I.2 — COST OF THE PIPE. The cost is a function of pipe weight w per lineal meter. Calling, respectively, D and p diameter and hydraulic pressure, it will be:

However, in the events considered in this note — drinkable water conveyance — pressure variations along longitudinal pipe axis are ne-

de um conduto são muito limitadas e as condições de estabilidade no ponto onde p é máximo, são garantidas pelas espessuras padrões dos tubos da série comercial escolhida.

O peso w torna-se, portanto:

$$w = f(D, p_0) \quad (12)$$

onde o valor p_0 — que depende do tipo de material e da classe do tubo — é dado nos catálogos das fábricas.

A função (12), como é conhecido, pode ser equacionada na forma exponencial:

$$w = a \cdot D^\nu \quad (13)$$

onde a e ν variam com o diâmetro, porém se mantém constantes em largos intervalos do mesmo.

Os valores de a e ν encontram-se em manuais ou volumes de hidráulica.

Limitar-nos-emos a mencionar as tabelas de CONTI [I] e [II] para tubos de ferro fundido e de aço e as tabelas de CUOMO-VILLELA [V] para numerosas classes de tubos das séries brasileiras.

Cabe também salientar que, na falta de outros dados, será fácil obter, para cada caso, os valores de a e ν , utilizando os elementos substanciados nos catálogos de fábrica e plotando-os no plano logarítimo: $\log w$ e $\log D$.

Se c é o custo por Kg, e m um coeficiente que inclui todos os onus — confecção de juntas, peças especiais e aparelhos, colocação em obra, taxa de amortização, etc. — o custo de um trecho de comprimento l será igual a:

$$C = c m a D^\nu l \quad (14)$$

II — SISTEMA COM (UM) 1 NÓ

II.1 — Indiquemos, respectivamente (FIGURA N. 1) por: Q_i, h_i, l_i ($i = 1, 2 \dots p$) as vazões, as cotas piezométricas, conhecidas nas extremidades iniciais, os comprimentos dos condutos *adutores*, isto é, com fluxo dirigido para o nó N ; Q_j, h_j, l_j ($j = p+1 \dots n$) as vazões, as cotas piezométricas, — também conhecidas — nas extremidades finais, os comprimentos dos *distribuidores*, com deflúvio divergente do nó N .

gligible and stability conditions, in the point where p is maximum, are warranted by standard thicknesses fixed by the factories for several classes of pipe.

Thus eq (11) becomes

$$w = f(D, p_0) \quad (12)$$

where the value p_0 , depending on material type and pipe class, is given in factory catalogs.

It is known that the function (12) may be expressed by the exponential equation

$$w = a \cdot D^\nu \quad (13)$$

where a and ν are depending upon pipe diameter although keeping constant within wide range of variation.

Values of a and ν are found in hydraulics handbooks and volumes.

We will confine ourselves to mention CONTI's table [I] [II] for cast-iron and steel pipes and CUOMO & VILLELA's tables [V] for several pipe classes of brazilian series.

It should be emphasized that, for lack of other data, values of a and ν are easily obtained plotting on logarithmic plane values of $\log w$ and $\log D$, drawn from factory catalogs.

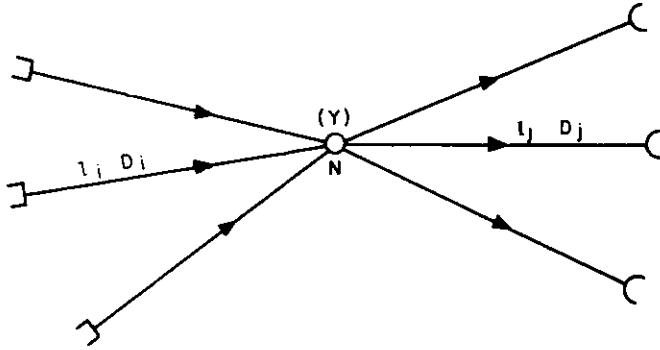
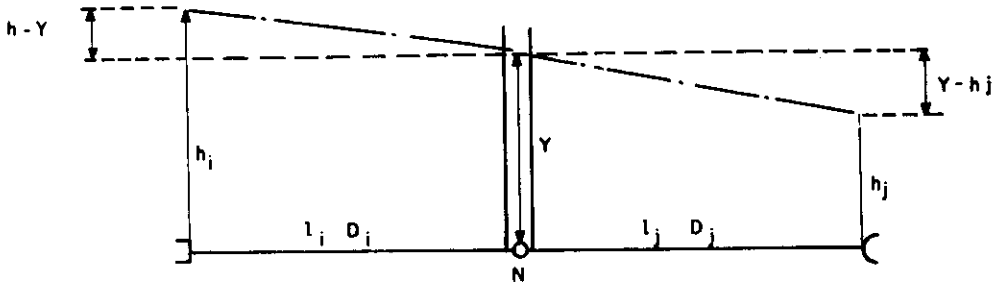
If c is the pipe cost per Kg and m is a coefficient allowing for all other onus — joint confection, special works and devices, placement, amortization rate and so on — the cost of a pipeline having length l will be

$$C = c m a D^\nu l \quad (14)$$

II — ONE TAKE-OFF SYSTEM

II.1 — Respectively define (FIGURE N. 1) Q_i, h_i, l_i ($i = 1, 2 \dots p$) discharges, lengths and fixed start-point elevations of pressure head of *supply* pipes, namely conveying water to the take-off point N ; Q_j, h_j, l_j ($j = p+1 \dots n$), discharges, lengths and end-point elevations of pressure head — also fixed — of *distribution* pipes, conveying water from the take-off point N .

Elevations of pressure head h will be next called concisely *head elevations* (or *piezometric elevations*).



Sendo Y a cota piezométrica do nó N , aplicando a equação (1), obter-se-ão as n equações:

Head elevations on take-off point N being Y , the application of eq (1) yields n equations

$$D_i = b^{\frac{1}{\mu}} (l_i Q_i^m)^{\frac{1}{\mu}} (h_i - Y)^{-\frac{1}{\mu}} \quad (15)$$

$$D_j = b^{\frac{1}{\mu}} (l_j Q_j^m)^{\frac{1}{\mu}} (Y - h_j)^{-\frac{1}{\mu}} \quad (16)$$

Por outra parte, o custo global do sistema, será em virtude da (14);

On the other hand, the total cost of the systems will be, by virtue of eq (14)

$$C = c m a \left[\sum_i^p l_i D_i^{\nu} + \sum_j^n l_j D_j^{\nu} \right] \quad (17)$$

tendo-se admitido um único valor de a e ν para todos os condutos; hipóteses, aliás, bem razoável, considerando uma distribuição de vazões da mesma ordem de grandeza nos vários trechos e comprimentos não muito diversos dos mesmos; condições, estas em geral realizadas.

since a single value both for a and ν was assumed for all the pipes. Such a hypothesis is reasonable if either flow values or length values of the different elements of the system are comparable to each other.

Veremos, mais adiante, as verificações a serem feitas e as correções a serem eventualmente introduzidas.

Controls to be made and rectifications to be eventually introduced, will be examined below.

Substituindo-se na (17) as expressões de D_i e D_j dadas pelas (15) e (16) teremos:

Substitution into eq (17) of D_i and D_j given by eqs (15) and (16) yields

$$C = c m a b^{-\frac{\nu}{\mu}} \left[\sum_1^p l_i (l_i Q_i^m)^{\frac{\nu}{\mu}} (h_i - Y)^{-\frac{\nu}{\mu}} + \sum_{p+1}^n l_j (l_j Q_j^m)^{\frac{\nu}{\mu}} (Y - h_j)^{-\frac{\nu}{\mu}} \right]$$

ou melhor posto:

or better, taking

$$l_i (l_i Q_i^m)^{\frac{\nu}{\mu}} = A_i \quad (18)$$

$$l_j (l_j Q_j^m)^{\frac{\nu}{\mu}} = A_j \quad (19)$$

poderemos escrever:

it may be written

$$C = c m a b^{-\frac{\nu}{\mu}} \left[\sum_1^p A_i (h_i - Y)^{-\frac{\nu}{\mu}} + \sum_{p+1}^n A_j (Y - h_j)^{-\frac{\nu}{\mu}} \right] \quad (20)$$

II.2 — O valor de Y que torna mínima a função (20), deve satisfazer a equação:

II.2 — The value of Y for which function (20) becomes minimum, ought to satisfy the equation

$$\frac{dC}{dY} = 0$$

isto é:

that is to say

$$\sum_1^p A_i (h_i - Y)^{-z} - \sum_{p+1}^n A_j (Y - h_j)^{-z} = 0 \quad (21)$$

sendo:

where

$$z = \frac{\nu + \mu}{\mu} \quad (22)$$

Enquanto, resulta satisfeita a condição de convexidade conveniente (ponto de mínimo) por ser:

Meanwhile the condition of suitable convexity (point of minimum) is satisfied since

$$\frac{d^2 C}{dY^2} = \frac{c m a \nu}{\mu} \cdot b^{-\frac{\nu}{\mu}} z \left[\sum_1^p A_i (h_i - Y)^{-(z+1)} + \sum_{p+1}^n A_j (Y - h_j)^{-(z+1)} \right] > 0 \quad (23)$$

II.3 — SOLUÇÃO DE EQUAÇÃO (21) —
Posto:

II.3 — SOLUTION OF EQUATION (21).
Define

$$f(y) = \sum_1^p \frac{A_i}{(h_i - Y)^z} \quad (24)$$

$$\varphi(y) = \sum_{p+1}^n \frac{A_j}{(Y - h_j)^z} \quad (25)$$

a equação (21), torna-se:

Eq (21) becomes

$$f(Y) = \varphi(Y) \quad (26)$$

Chamando, respectivamente de h_{im} e h_{jM} , o valor mínimo de h_i e o valor máximo de h_j , vemos que o campo possível de variação de Y , é definido pelo intervalo:

Then, if h_{im} and h_{jM} are respectively the minimum value of h_i and the maximum value of h_j , the possible variation field of Y will be

$$h_{im} > Y > h_{jM} \quad (27)$$

Por outra parte:

On the other hand

$$\frac{df}{dY} = z \sum \frac{p}{l} A_i (h_i - Y)^{-(z+1)} > 0$$

$$\frac{d^2 f}{dY^2} = z(z+1) \sum \frac{p}{l} h_i (h_i - Y)^{-(z+2)} > 0$$

$$\frac{d\varphi}{dY} = -z \sum \frac{n}{p+1} A_j (Y - h_j)^{-(z+1)} < 0$$

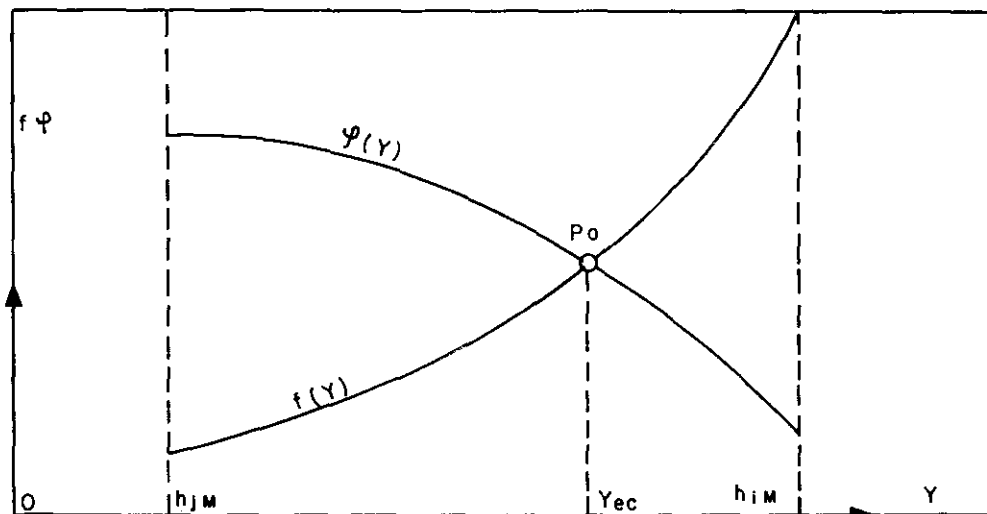
$$\frac{d^2 \varphi}{dY^2} = z(z+1) \sum \frac{n}{p+1} A_j (Y - h_j)^{-(z+2)} > 0$$

Portanto, a curva $f(Y)$, tem ordenadas crescentes com Y e a concavidade dirigida para cima, enquanto a curva $\varphi(Y)$ tem ordenadas decrescentes ao aumentar Y e a concavidade dirigida para baixo.

Thus the curved line $f(Y)$ has increasing ordinates and convexity directed upwards as the curved line $\varphi(Y)$ has decreasing ordinates and convexity directed downwards.

Para solucionar a (26), traçar-se-ão (FIGURA N. 2) as curvas f e φ , por pontos, dando a Y uma série de valores oportunamente escolhidos, no intervalo (27). A abscissa Y_{ec} correspondente ao ponto p_0 , dá a solução correta do problema.

In order to solve eq (26), the curves f and φ will be plotted, giving Y series of values suitably selected between h_{im} and h_{jM} (27). The abscisse Y corresponding to the point P_0 will give the correct problem solution.



II.4 — Introduzindo-se o valor Y_{ec} nas equações (15) e (16), obter-se-ão os diâmetros D_i e D_j dos diferentes ramos.

Na realidade os cálculos simplificam-se pelo auxílio das TABELAS que fornecem diretamente os valores dos diâmetros em função de:

$$\frac{I}{Q^m} = \gamma(D) \quad (1)$$

expressão, esta, que pode ser identificada com a fórmula de CONTI [II], de WILLIAMS-HAZEN [II] ou de BANDINI [III].

Uma vez conhecidos os D_i e D_j , será fácil controlar se os valores de a e ν foram corretamente escolhidos e — se for preciso — fazer as oportunas correções nos diagramas de $f(Y)$ e de $\varphi(Y)$.

III — SISTEMA COM 2 (DOIS) NÓS

III.1 — Indiquemos, respectivamente, (FIGURA N. 3), por:

$Q_i, h_i, l_i, (i = 1, 2 \dots p)$, as vazões, as cotas piezométricas — conhecidas — nas extremidades iniciais, os comprimentos, dos *adutores*, afluentes para o nó 1.

$Q_g, h_g, l_g, (g = q+1 \dots r)$, os mesmos elementos dos *adutores*, afluentes para o nó 2.

$Q_j, h_j, l_j, (j = p+1 \dots q)$, as vazões, as cotas piezométricas — conhecidas — nas extremidades finais, os comprimentos, dos condutos que *divergem* do nó 1.

$Q_k, h_k, l_k, (k = r+1 \dots n)$, os mesmos elementos, dos condutos que *divergem* do nó 2.

Sendo Y_1 e Y_2 as cotas piezométricas dos nós 1 e 2, Q a vazão e l o comprimento do trecho 1-2, aplicando a equação (1), teremos as $(n+1)$ equações seguintes:

$$D_i = b \frac{1}{\mu} (l_i Q_i^m)^{\frac{1}{\mu}} (h_i - Y_1)^{-\frac{1}{\mu}} \quad (28)$$

$$D_j = b \frac{1}{\mu} (l_j Q_j^m)^{\frac{1}{\mu}} (Y_1 - h_j)^{-\frac{1}{\mu}} \quad (29)$$

$$D = b \frac{1}{\mu} (l Q)^{\frac{1}{\mu}} (Y_1 - Y_2)^{-\frac{1}{\mu}} \quad (30)$$

$$D_g = b \frac{1}{\mu} (l_g Q_g)^{\frac{1}{\mu}} (h_g - Y_2)^{-\frac{1}{\mu}} \quad (31)$$

$$D_k = b \frac{1}{\mu} (l_k Q_k)^{\frac{1}{\mu}} (Y_2 - h_k)^{-\frac{1}{\mu}} \quad (32)$$

II.4 — Diameters D_i and D_j of the various pipes are calculated taking $Y = Y_{ec}$ in eqs (15) and (16). As a matter of fact calculations are simplified using TABLES which give straightly values of diameters as a function of

eq (1) being identified to CONTI's formula [II] or to WILLIAMS-HAZEN's formula [II] or to BANDINI's formula [III].

Control about the correct selection of coefficients a and ν can be easily achieved once D_i and D_j are known; if necessary, suitably corrections on $f(Y)$ and $\varphi(Y)$ diagrams will be made.

III — TWO (2) TAKE OFF SYSTEM

III.1 — Respectively define (FIGURE N. 3)

$Q_i, h_i, l_i (i = 1, 2 \dots p)$, discharges, lengths and start point head elevations — fixed — of the mains supplying the take-off point N. 1;

$Q_g, h_g, l_g (g = q+1 \dots r)$, same elements for the mains supplying the take-off point N. 2;

$Q_j, h_j, l_j (j = p+1 \dots q)$, discharges, lengths and end point head elevations — fixed — of distribution mains, conveying water from the take-off point N. 1;

$Q_k, h_k, l_k (k = r+1 \dots n)$, same elements for distributions mains conveying water from the take-off point N. 2.

Moreover respectively define Y_1 and Y_2 head elevations at the take-off points 1 and 2 and respectively Q, l pipe 1-2 flow and length. Applying eq (1), the set of following $(n+1)$ equations is obtained.

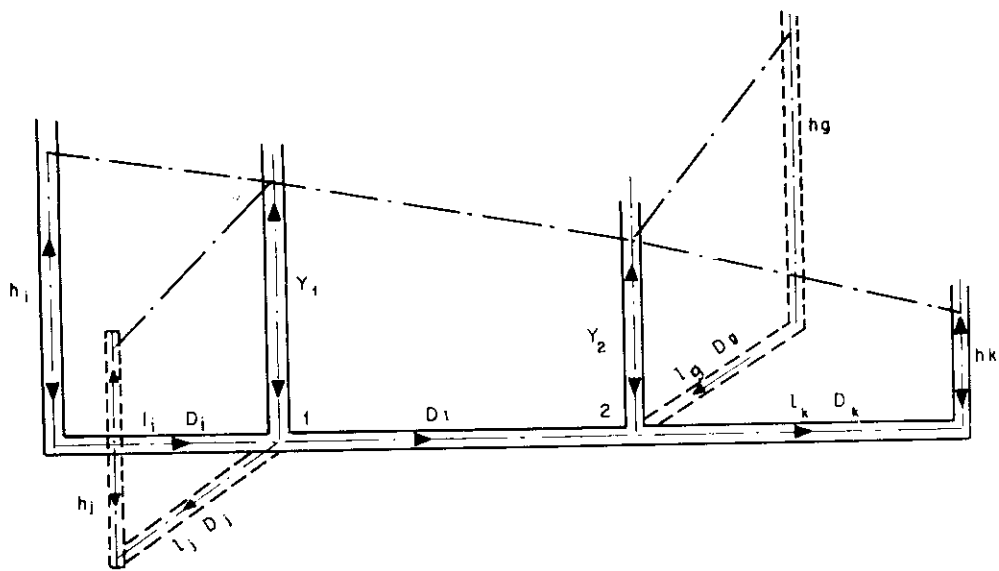
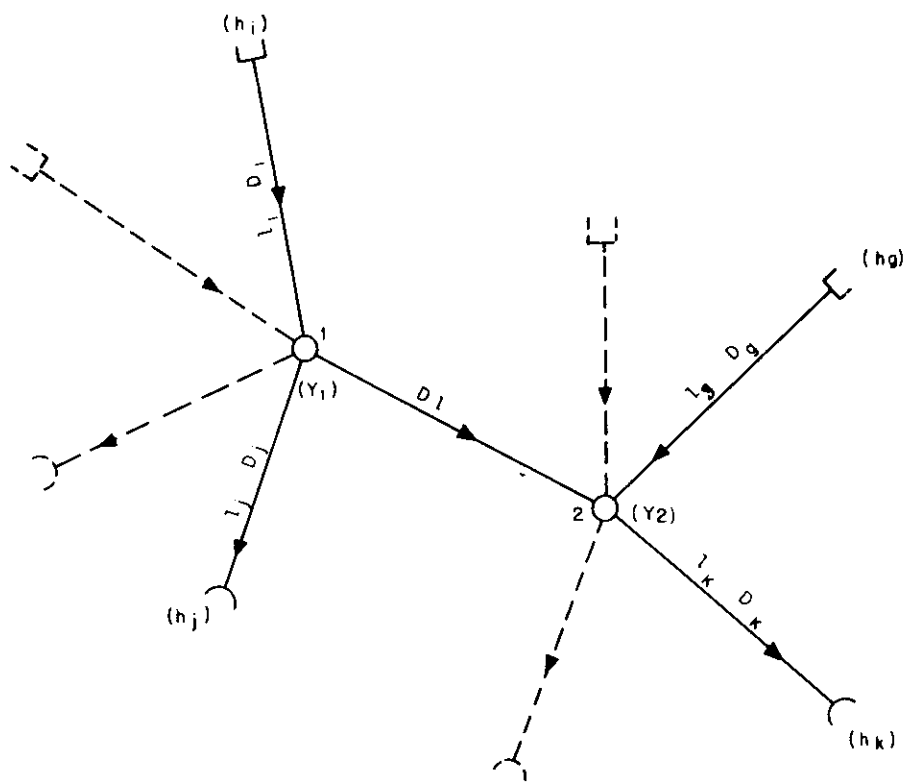


FIGURA (FIGURE) N. 3

O custo total do sistema será, pela (14):

The total cost of the system, will be by virtue of eq (14)

$$C = c m a \left[\sum_{l=1}^p l_i D_i^r + \sum_{p+1}^q l_j D_j^r + (l D^r) + \sum_{q+1}^r l_g D_g^r + \sum_{r+1}^n l_k D_k^r \right] \quad (33)$$

valendo, no que diz respeito a ν e a , as mesmas considerações feitas no ITEM II.1.

the same considerations about ν and a , shown in ITEM II.1, being valid in this case.

Se agora substituimos na (33), os valores de D_i , D_j , D , D_g , e D_k dados pelas expressões (28), (29), (30), (31), (32), e pomos:

Substitute into eq (33) the expressions of D_i , D_j , D , D_g , and D_k given by eqs (28), (29), (30), (31), (32), and take

$$l_x (l_x Q_x^m)^{\frac{\nu}{\mu}} = A_x \quad (x = i, j, g, k) \quad (34)$$

$$l (l Q^m)^{\frac{\nu}{\mu}} = A \quad (35)$$

obteremos:

It will be obtained

$$C = c m a b^{\frac{\nu}{\mu}} \left[\sum_{l=1}^p A_i (h_i - Y_1)^{-\frac{\nu}{\mu}} + \sum_{p+1}^q A_j (Y_1 - h_j)^{-\frac{\nu}{\mu}} + A (Y_1 - Y_2)^{-\frac{\nu}{\mu}} + \sum_{q+1}^r A_g (h_g - Y_2)^{-\frac{\nu}{\mu}} + \sum_{r+1}^n A_k (Y_2 - h_k)^{-\frac{\nu}{\mu}} \right] \quad (36)$$

III.2 — O valor mínimo de C , verifica-se para os valores Y_1 e Y_2 que satisfazem as equações:

III.2 — The minimum value of C occurs for the values Y_1 and Y_2 which satisfy the equations

$$\frac{\partial C}{\partial Y_1} = 0 \quad \frac{\partial C}{\partial Y_2} = 0 \quad (37)$$

sob a condição de que o determinante HESSIANO seja positivo, a saber:

under condition that HESSE's function be positive, namely

$$\left[\frac{\partial^2 C}{\partial Y_1^2} \quad \frac{\partial C}{\partial Y_2^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial Y_1 \partial Y_2} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial Y_2 \partial Y_1} \right] > 0 \quad (38)$$

Calculando as (37) e recordando a (22), ter-se-á, respectivamente:

Calculate the derivatives (37) and recall (22). It will respectively be

$$\sum_{l=1}^p A_i (h_i - Y_1)^{-z} - \sum_{p+1}^q A_j (Y_1 - h_j)^{-z} - A (Y_1 - Y_2)^{-z} = 0 \quad (39)$$

$$\sum_{q+1}^r A_g (h_g - Y_2) + \sum_{r+1}^n A_k (Y_2 - h_k)^{-z} + A (Y_1 - Y_2)^{-z} = 0 \quad (40)$$

Por outra parte, a condição (38) está satisfeita. Com efeito as derivativas segundas, divididas pela constante positiva:

On the other hand, the condition (38) is satisfied. In fact the second order derivatives, divided by the positive constant

$$\frac{c m a \nu}{\mu} b^{\frac{\nu}{\mu}}$$

resultam respectivamente iguais a: are respectively equal to :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial Y_1^2} = z \sum_I^p A_i (h_i - Y_1)^{-(z+1)} + z \sum_{p+1}^q A_j (Y_1 - h_j)^{-(z+1)} + z A (Y_1 - Y_2)^{-(z+1)} > 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial Y_2^2} = z \sum_{q+1}^r A_g (h_g - Y_2)^{-(z+1)} + z \sum_{r+1}^n A_k (Y_2 - h_k)^{-(z+1)} + z A (Y_1 - Y_2)^{-(z+1)} > 0 \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial Y_1 \partial Y_2} = - \frac{\partial^2 C}{\partial Y_2 \partial Y_1} = - z A (Y_1 - Y_2)^{-(z+1)} > 0 \quad (43)$$

e por consequência:

and consequently

$$H = \left[\frac{\partial^2 C}{\partial Y_1^2} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial Y_2^2} - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial Y_1 \partial Y_2} \right)^2 \right] > 0 \quad (44)$$

III.3 — SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES (39), (40).

III.3 — EQS (39), (40) SET SOLUTION.

Adding both sides of eqs (39) and (40) to

Somando, membro a membro, as equações (39) e (40) e pondo-se:

each other and writing

$$F(Y_1) = \sum_I^p A_i (h_i - Y_1)^{-z} - \sum_{p+1}^q A_j (Y_1 - h_j)^{-z} \quad (45)$$

$$\Phi(Y_2) = \sum_{q+1}^r A_g (h_g - Y_2)^{-z} + \sum_{z+1}^n A_k (Y_2 - h_k)^{-z} \quad (46)$$

chegamos à expressão:

yields the expression

$$F_1(Y_1) = \Phi(Y_2) \quad (47)$$

Os limites dos campos de variação de Y_1 e Y_2 são os seguintes

Boundaries of Y_1 and Y_2 variation ranges are

$$\min h_i > Y_1 > \begin{cases} \max h_j (> \max h_k) \\ \max h_k (> \max h_j) \end{cases} \quad (48)$$

$$\left. \begin{matrix} (\min h_g >) \min h_i \\ (\min h_i >) \min h_g \end{matrix} \right\} > Y_2 > \max h_k \quad (49)$$

Por outra parte considere-se que

On the other hand consider that

$$\frac{\partial F}{\partial Y_1} = z \sum_I^p A_i (h_i - Y_1)^{-(z+1)} + z \sum_{p+1}^q A_j (Y_1 - h_j)^{-(z+1)} > 0 \quad (50)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y_2} = - z \sum_{q+1}^r A_g (h_g - Y_2)^{-(z+1)} - z \sum_{r+1}^n A_k (Y_2 - h_k)^{-(z+1)} < 0 \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Y_1^2} = z(z+1) \sum_1^p A_i (h_i - Y_1)^{-(z+2)} - z(z+1) \sum_{p+1}^q A_j (Y_1 - h_j)^{-(z+2)} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad (52)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y_2^2} = -z(z+1) \sum_{q+1}^r A_g (h_g - Y_2)^{-(z+2)} - z(z+1) \sum_{q+1}^n A_k (Y_2 - h_k)^{-(z+2)} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad (53)$$

As (50) e (51) mostram que F é função crescente de Y_1 , enquanto Φ é função decrescente de Y_2 ; as (52) e (53), outrossim, indicam que as curvas que consubstanciam as referidas funções, apresentam um trecho com a concavidade para cima e outro com a concavidade dirigida para baixo. Finalmente o campo de variação das funções (45) e (46) recordando as condições dos limites (48) e (49), fica assim limitado:

$$F(Y_1) = \infty \quad \text{para} \quad Y_1 = \min h_i \quad (54)$$

$$F(Y_1) = -\infty \quad \text{para} \quad Y_1 = \max h_j \quad (\text{ou} \quad \max h_k)$$

$$\Phi(Y_2) = -\infty \quad \text{para} \quad Y_2 = \min h_g \quad (\text{ou} \quad \min h_l) \quad (55)$$

$$\Phi(Y_2) = \infty \quad \text{para} \quad Y_2 = \max h_k$$

Resultam definidos, assim, a configuração e os asintotos das funções F e Φ , da qual oferece-se uma representação gráfica qualitativa na FIGURA N. 4, que salienta, também, a característica que a cada aumento de Y_2 corresponde um decréscimo de Y_1 e vice-versa. O ponto M , para o qual $Y_1 = Y_2$ objetiva uma limitação física do sistema, pois não haverá mais possibilidade de escoamento no trecho 1-2. Os ramos de F e Φ localizados abaixo de M dão, portanto, soluções não reais.

É evidente que, uma vez traçados os diagramas de F e Φ , teremos infinitos pares de valores homólogos, Y_1 e Y_2 que satisfazem a equação (47). A solução correta e unívoca, corresponde ao par Y_1^* e Y_2^* que satisfaz também a (39) ou a (40), isto é, quando:

$$F(Y_1^*) = \Phi(Y_2^*) = \frac{A}{(Y_1^* - Y_2^*)^z} \quad (56)$$

Para calcular Y_1^* e Y_2^* , sugerimos o seguinte processo. Determinem-se os valores da função:

$$f(Y_1, Y_2) = \frac{A}{(Y_1 - Y_2)^z} \quad (57)$$

Eqs (50) and (51) show that F is an increasing function of Y_1 whereas Φ is a decreasing function of Y_2 ; moreover eqs (52) and (53) show that curved lines representing those functions, have a part with upwards concavity and another part with downward concavity. At last, recalling the boundary conditions (45) and (46) the variation range of functions (45) and (46) is included between the values referred below.

Thus form and asymptotes of functions F and Φ are quite settled; FIGURE N. 4 gives a qualitative graphical representation and emphasizes the characteristics that the increase of Y_2 produces a decrease of Y_1 and vice versa. The point M , where $Y_1 = Y_2$ individualizes a physical limitation of the system, since flow in the pipe 1-2, would be impossible. Therefore the hatched parts above point M give no real solutions.

An infinity of couples of homologous values Y_1 and Y_2 satisfying eq (47) can be deduced from F and Φ diagrams. The single correct solution will be given by the couple Y_1^* and Y_2^* which solves also eq (39) or eq (40), that is to say, when

In order to obtain Y_1^* and Y_2^* the next proceeding is suggested. Calculate values of function

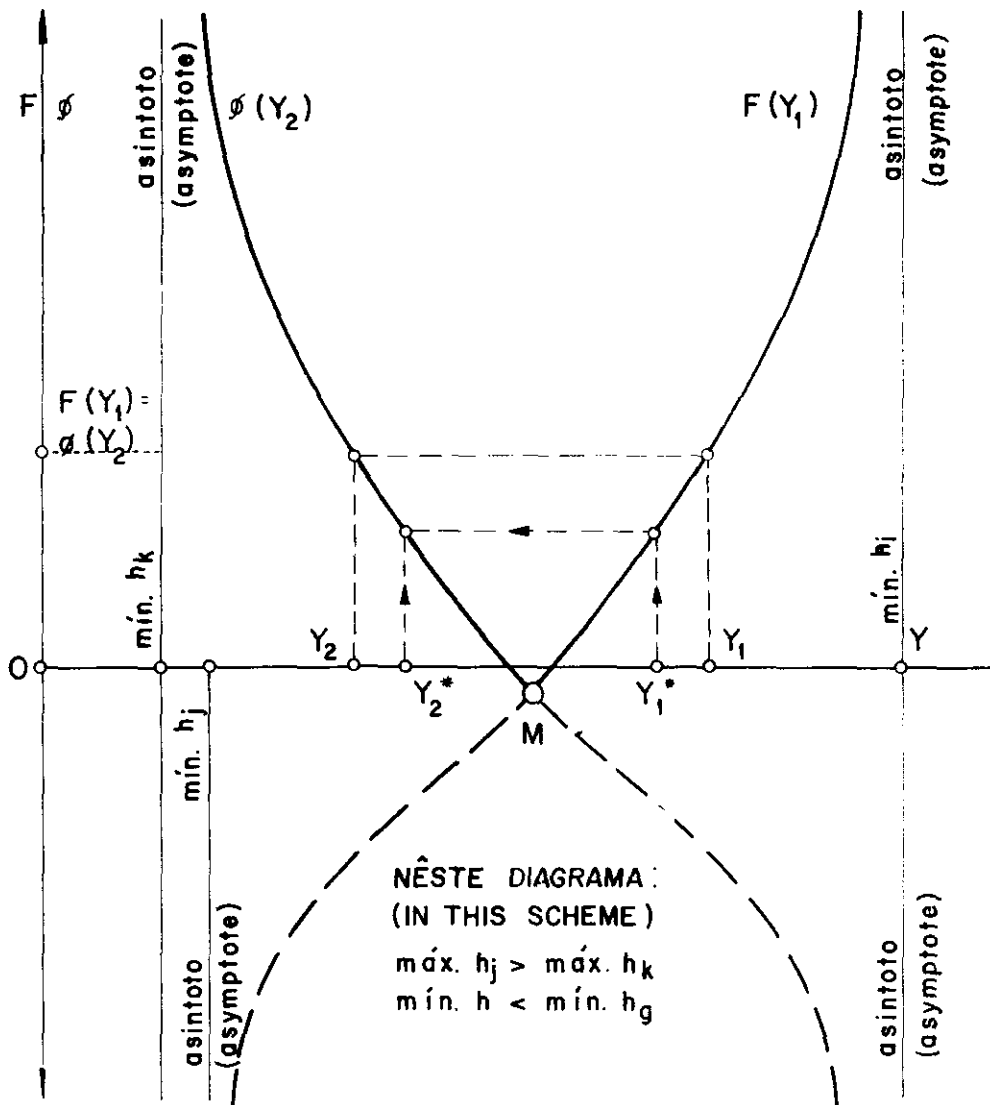


FIGURA (FIGURE) N. 4

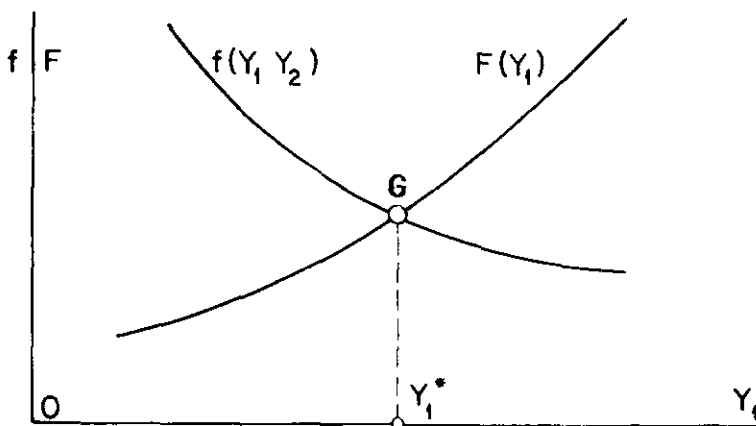


FIGURA (FIGURE) N. 5

para um certo número de pares Y_1 e Y_2 , tirados do diagrama da FIGURA N. 4 e plotem-se os pontos correspondentes em um plano cartesiano, tendo como eixo das abscissas, por exemplo, o eixo Y_1 . Evidentemente a curva f que une os pontos, tem ordenadas decrescentes na direção positiva de Y_1 (FIGURA N. 5).

Tracemos agora, o diagrama da função $F(Y_1)$; no ponto G em que F e f cruzam-se, teremos, evidentemente:

$$Y_1 = Y_1^*$$

e o diagrama da FIGURA N. 4, permitirá determinar em seguida o valor homólogo Y_2^*

III.4 — Introduzindo os valores de Y_1 e Y_2 nas equações (28), (29), (30), (31), (32), obter-se-ão os diâmetros D_x ($x = i, j, g, k$) e o diâmetro D do conduto que une os dois nós; sendo válidas considerações análogas às expostas no ITEM II.4.

IV — OBSERVAÇÃO — Os diâmetros D obtidos para os diferentes condutos, em ambos os casos tratados, podem ser chamados *teóricos*, pois, em geral, não coincidirão com os diâmetros dos tubos das séries comerciais.

O comprimento l de cada conduto deverá portanto, ser dividido em dois trechos, de comprimento l_1 e l_2 e com os diâmetros comerciais D_1 e D_2 , de modo a realizar, a mesma perda de carga Δh , correspondente ao diâmetro único D .

O diâmetro D_1 é o maior — da série comercial — inferior a D e D_2 é o menor — da mesma série — superior a D .

Se I_1 e I_2 são as declividades piezométricas correspondentes a D_1 e D_2 , para calcular l_1 e l_2 , teremos disponíveis as duas equações:

$$\Delta h = I_1 l_1 + I_2 l_2 \quad (58)$$

$$l = l_1 + l_2$$

onde I_1 e I_2 são calculáveis pela (1).

Resolvendo obtemos:

$$l_2 = l - l_1$$

$$l_1 = \frac{\Delta h - I_2 l}{I_1 - I_2}$$

Poderá, assim, ser completado o projeto executivo do sistema estudado.

for a certain number of couples Y_1 and Y_2 deduced from the diagram of FIGURE N. 4 and plot the corresponding points on a cartesian plane, taking as abscissa axis, for instance, the Y_1 axis. Curved line f joining said points, has ordinates decreasing as Y_1 increases (FIGURE N. 5). Plot now the curved line representing $F(Y_1)$; it will intersect the line f , in the point G , for which

From diagram of FIGURE N. 4, the homologous value Y_2^* is to be deduced.

III.4 -- Substituting the values Y_1 and Y_2 into eqs (28), (29), (30), (31), (32), either diameters D_x ($x = i, j, g, k$) or diameter D of the pipe joining points 1 and 2, are obtained; analogous considerations to those shown in ITEM II.4 are valid also in the present case.

IV — OBSERVATION — Diameters D calculated for the different pipes, in both problems considered in this study, are called *theoretical* diameters since they generally differ from diameters of commercial series.

Therefore the length l of each pipe should be divided in two parts having lengths l_1 and l_2 and commercial diameters D_1 and D_2 , so that the same head loss achieved for a single diameter D be obtained.

The value D_1 is the highest value of commercial series lesser than D , whereas D_2 is the lowest value of the same series larger than D .

Define I_1 and I_2 the pressure gradients corresponding to diameters D_1 and D_2 ; in order to calculate l_1 and l_2 , two equations will be available, namely

where I_1 and I_2 are to be calculated by eq (1).

Solving the set of eqs (58), yields:

In this way, the executive project of the system, can be accomplished.

V — EXEMPLO

V — NUMERICAL EXAMPLE

V.1 — Aplicaremos o método proposto, ao sistema representado pela FIGURA N. 6; as vazões estão referidas na TABELA N. 1.

V.1 — The proposed method will be applied to the system represented in FIGURE N. 6; flows are reported in TABLE N. 1.

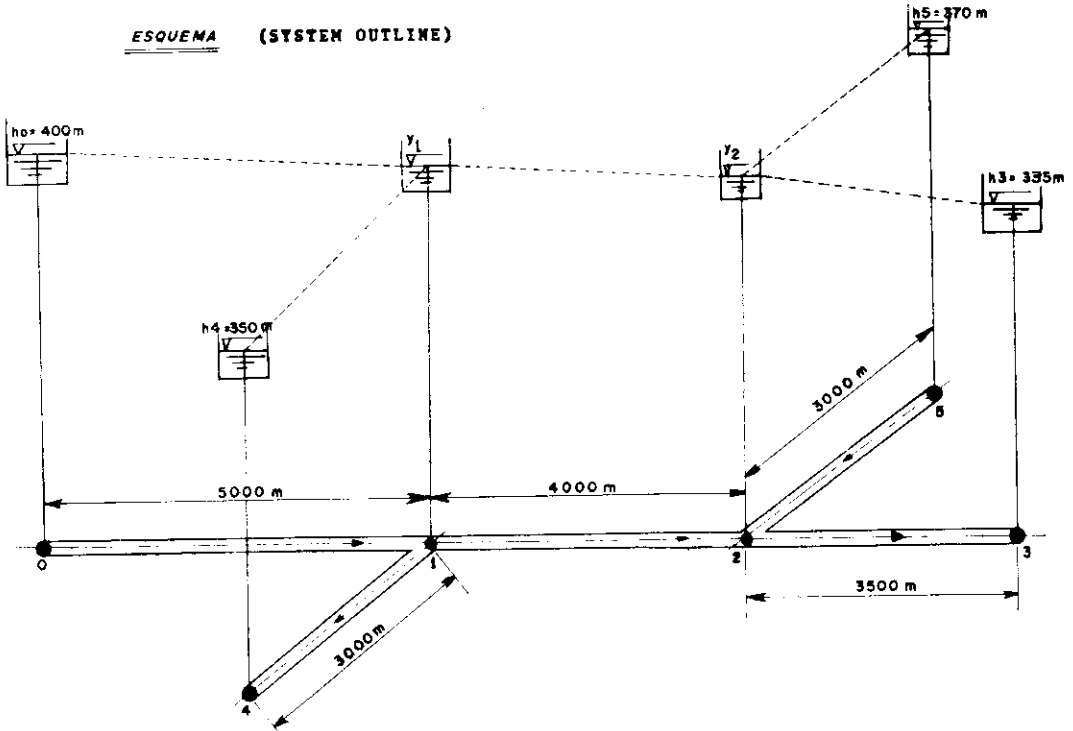


FIGURA (FIGURE) N. 6

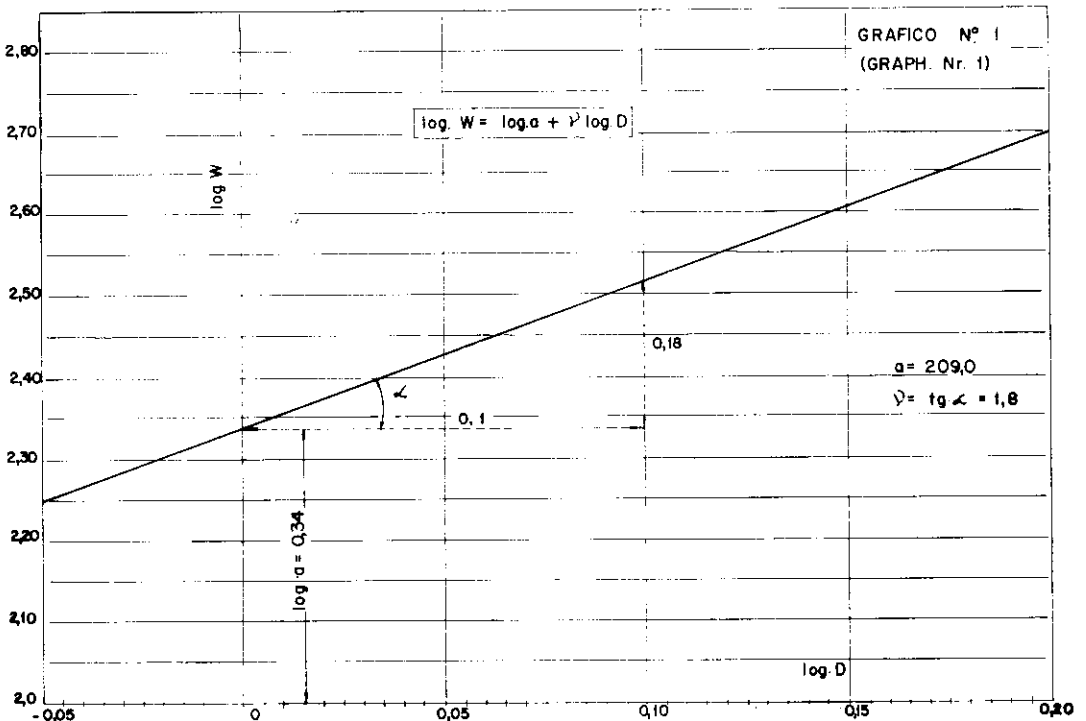


GRAFICO (GRAPH) N. 1

Os cálculos foram organizados pelo Eng.^o ADERBAL S. STUCHI assistente do AUTOR, na cátedra de Mecânica dos Fluidos da Faculdade de Engenharia de Campinas da Universidade Estadual.

The calculations were organized by Eng. ADERBAL S. STUCHI, AUTOR's assistant, at chair of Mechanics of Fluids, of the Faculty of Engineering of Campinas, State University of Campinas.

V.2 — Conforme a simbologia adotada, ter-se-á:

V.2 — According to the established symbology, it will be

$$l_i = l_{01} = 5000 \text{ m}$$

$$h_i = h_0 = 400 \text{ m}$$

$$l_j = l_{14} = 3000 \text{ m}$$

$$h_j = h_4 = 350 \text{ m}$$

$$l = l_{12} = 4000 \text{ m}$$

$$h_g = h_5 = 370 \text{ m}$$

$$l_g = l_{25} = 3000 \text{ m}$$

$$h_k = h_3 = 335 \text{ m}$$

$$l_k = l_{23} = 3500 \text{ m}$$

O GRÁFICO N. 1, foi construído para tubos de aço de ponta e bolsa, de fabricação inglesa, tendo resultado:

GRAPH N. 1 was drawn for bell-and-spigot steel pipes of english manufacturing. It as obtained

$$a = 209,0$$

$$\nu = 1,8$$

Foram adotados os valores de m e μ , dados pela fórmula de CONTI (2), (3), isto é:

As for m and μ , the values (2) (4) of CONTI's formula were taken, namely

TABELA (TABLE) N. 1 — Cálculo dos Coeficientes A (Coefficient A Calculation)

Conduitos Pipes Elements	$(x = i)$	$(x = j)$	1-2	$(x = g)$	$(x = k)$
	0-1	1-4		5-2	2-3
$l_x \text{ (m)}$	5.000,—	3.000,00	4.000,00	3.000,00	3.500,00
$Q_x \text{ (m/s)}$	2,5	1,00	1,5	1,00	2,5
$\left(l_x Q_x^m \right)^{\frac{\nu}{\mu}}$	33,4	15,09	21,9	15,09	29,59
A	16.700,—	45.200,00	87.600,00	45.200,00	10.350,00

TABELA (TABLE) N. 2 — Cálculo de (Calculation of) $F(Y_1)$ e (and) $\Phi(Y_2)$

Y_1 (m)	350	360	370	380	390	400
$(h_0 - Y_1)$ (m)	50	40	30	20	10	0
$10^3 \times (h_0 - Y_1)^{-z}$	5.309	7.158	10.522	18.11	45.81	0
$A_{01} (h_0 - Y_1)^{-z}$	886.6	1195.0	1757.0	3024.0	7650.2	0
$(Y_1 - h_4)$ (m)	0	10	20	30	40	50
$10^2 \times (Y_1 - h_4)^{-z}$	∞	4.581	1.811	1.052	0.715	0.5309
$A_{14} (Y_1 - h_4)^{-z}$	∞	2070.6	818.6	475.6	323.5	240.0
Y_2 (m)	340	345	350	355	360	365
$(h_5 - Y_2)$ (m)	30	25	20	15	10	5
$10^2 \times (h_5 - Y_2)^{-z}$	1.049	1.339	1.806	2.655	4.58	11.571
$A_{52} (h_5 - Y_2)^{-z}$	474.20	605.22	816.3	1197.8	2070.2	5230.0
$(Y_2 - h_3)$ (m)	5	10	15	20	25	30
$10^2 \times (Y_2 - h_3)^{-z}$	11.571	4.581	2.655	1.806	1.339	1.049
$A_{23} (Y_2 - h_3)^{-z}$	11.975,98	4741.3	2747.9	1869.2	1385.9	1085.7
$F(Y_1)$	Ind.	-875.3	938.7	2548.8	7327.4	Ind.
$\Phi(Y_2)$	11519.9	4134.6	1936.6	671.2	680.5	4149.5

$$m = 2$$

$$\mu = 5,3$$

Portanto

Thus

$$z = \frac{\mu}{\mu + v} = \frac{7,1}{5,3} = 1,34$$

V.3 — MARCHA DE CÁLCULO E RESULTADOS

V.3 — SEQUENCE OF CALCULATIONS AND RESULTS

a) Cálculo dos coeficientes A_x ($x = i, j, g, k$) e A pelas fórmulas (34) e (35). Os valores figuram na última linha da TABELA N. 1.

a) Coefficient A_x ($x = i, j, g, k$) and A calculations by eqs (34) and (35). The values appear in the last line of TABLE N. 1

b) Cálculo das funções $F(Y_1)$ e $\Phi(Y_2)$, pelas fórmulas (45) e (46), entre os limites (48) e (49):

b) Function $F(Y_1)$ and $\Phi(Y_2)$ calculation by eqs (45) and (46), between the boundaries (48) and (49)

$$350 \leq Y_1 \leq 400 \text{ m}$$

$$340 \leq Y_2 \leq 365 \text{ m}$$

Os resultados parciais e finais, estão consubstanciados na TABELA N. 2.

Partial and final results, are shown in TABLE N. 2

c) Construção das curvas $F(Y_1)$ e $\Phi(Y_2)$, utilizando os resultados da TABELA N. 2 (ver GRAFICO N. 2).

c) Curved line $F(Y_1)$ and $\Phi(Y_2)$ construction, utilizing the results from TABLE N. 2 (see GRAPH N. 2)

$10 \times F^2$
 $10 \times \phi^2$

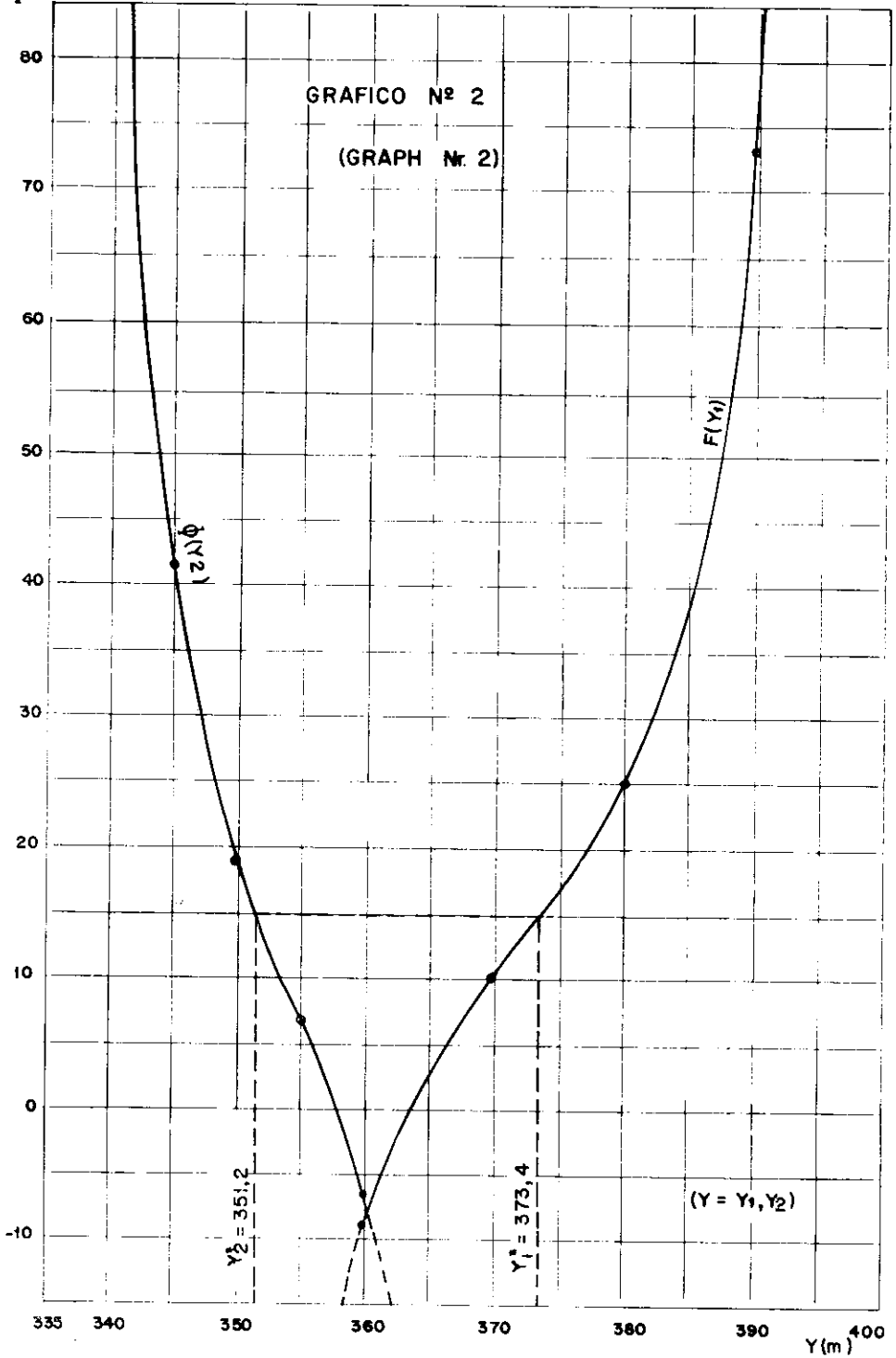


GRÁFICO (GRAPH) N. 2

d) Cálculo da função $f(Y_1 Y_2)$ dada pela fórmula (57). Os valores homólogos de Y_1 e Y_2 , foram tirados do GRÁFICO N. 2. Os resultados estão reunidos na TABELA N. 3

d) Calculation of function $f(Y_1 Y_2)$ from eq (57); the homologous values of Y_1 and Y_2 , were deduced from GRAPH N. 2. The results were assembled in TABLE N. 3

e) Construção no GRÁFICO N. 3 das curvas $F(Y_1)$ e $f(Y_1 Y_2)$, com os valores (TABELA N. 3):

e) Construction (GRAPH N. 3) of curved lines $F(Y_1)$, $f(Y_1 Y_2)$, for the values (TABLE N. 3)

$$Y_1 = 370, 375, 380, 385, 390 \text{ m}$$

Para o ponto de cruzamento dos dois diagramas, resulta

The crossing point of two diagrams yields

$$Y_1^* = 373,4 \text{ m}$$

TABELA (TABLE) N. 3 — Cálculo da Função (Calculation of Function) $f(Y_1 Y_2)$

Y_1	370	375	380	385	390
Y_2	353.2	350.4	348.0	345.4	341.4
$(Y_1 - Y_2)$	16.8	24.6	32.0	39.6	48.6
$(Y_1 - Y_2)^{-2}$	43.72	72.84	103.61	137.82	181.30
$f(Y_1 Y_2)$	2003.66	1202.55	845.48	635.61	483.17

TABELA (TABLE) N. 4 — Diâmetros teóricos e verificação de Δh (Theoretical diameters and Δh verification)

Elements Elementos	Condutores Pipes	0-1	1-4	1-2	5-2	2-3
	Δh (m) (1) Disponível (Available)		26.6	23.4	22.08	18.68
l (m)		5.000	3.000	4.000	3.000	3.500
Q $\left(\frac{m^3}{seg}\right)$		2.5	1.0	1.5	1.0	2.5
D (m)		1.206	0.794	0.988	0.828	1.236
Δh (m) (2) Verificados (Checked)		26.59	23.34	22.06	18.70	16.30
(1)-(2) (m)		0.01	0.06	0.02	-0.02	0.02

TABELA (TABLE) N. 5 — Comparação dos elementos característicos relativos a tubos de diâmetro teórico ou comercial (Characteristic element comparison relevant to theoretical and commercial diameter pipes)

Índices (Sub-indices)	$i = 1, t, 2$			$t = \text{teórico (theoretical)}$ $i = 1, 2 = \text{comercial (commercial)}$				
	D_i			Q (m^3/s)	Δh_i (m)	I (m/m)	l_i (m)	V_i (m/s)
Condutos (pipes)	i	"	m					
0-1	t	42	1.067	2.5	2.86	0.01020	280.46	2.797
	i	—	1.206		26.59	0.00532	5000	2.189
	2	48	1.219		23.74	0.00503	4719.54	2.153
1-4	t	30	0.762	1.0	14.64	0.00971	1507.8	2.193
	i	—	0.794		23.34	0.0078	3000	2.020
	2	33	0.838		8.72	0.00587	1492.2	1.814
1-2	t	36	0.914	1.5	13.21	0.00834	1584.6	2.287
	i	—	0.988		22.06	0.00552	4000	1.957
	2	42	1.067		8.97	0.00367	2415.4	1.678
5-2	t	30	0.762	1.0	2.35	0.00971	242.2	2.193
	i	—	0.828		18.70	0.00623	3000	1.858
	2	33	0.838		16.19	0.00587	2757.8	2.143
2-3	t	48	1.219	2.5	14.85	0.00503	2952.4	2.084
	i	—	1.236		16.30	0.00466	3500	1.692
	2	54	1.372		1.47	0.00269	547.6	1.814

Do GRÁFICO N. 2, tira-se

From GRAPH N. 2

$$Y_2^* = 351,2 \text{ m}$$

f) Cálculo dos diâmetros teóricos pelas fórmulas (28), (29), (30), (31) e (32).

Os resultados estão reunidos na TABELA N. 4. A verificação das perdas de carga Δh , executada usando as TABELAS de CONTI [I], [II] confirma a grande exatidão dos cálculos.

g) Cálculo dos comprimentos correspondentes aos diâmetros da série comercial, que substituem os diâmetros teóricos, utilizando as fórmulas (59) e (60).

Os resultados estão consubstanciados na TABELA N. 5, onde figuram também as declividades piezométricas, as perdas de carga e as velocidades de escoamento.

Observe-se que os índices ($i = 1$) e ($i = 2$) indicam para cada conduto, os trechos com diâmetros ($D_1 < D_i$) e ($D_2 > D_i$). O índice ($i = t$), refere-se ao diâmetro teórico D_t .

f) Theoretical diameter calculation by eqs (28), (29), (30), (31) and (32).

The results are assembled in TABLE N. 4. Head loss Δh effected by CONTI's tables [I], [II], confirm the great calculation accuracy.

g) Calculation from eqs (59), (60), of lengths correspondent to commercial series diameters, which substitute the theoretical diameters.

The results are assembled in TABLE N. 5, where also pressure gradients, head losses and flow speeds are shown.

Observe that sub-indices ($i = 1$) and ($i = 2$) point out, for each pipe, the parts having diameter ($D_1 < D_i$) and ($D_2 > D_i$). Subindex ($i = t$) concerns the theoretical diameter D_t .

$\frac{2}{10 \times f}$
 $\frac{2}{10 \times F}$

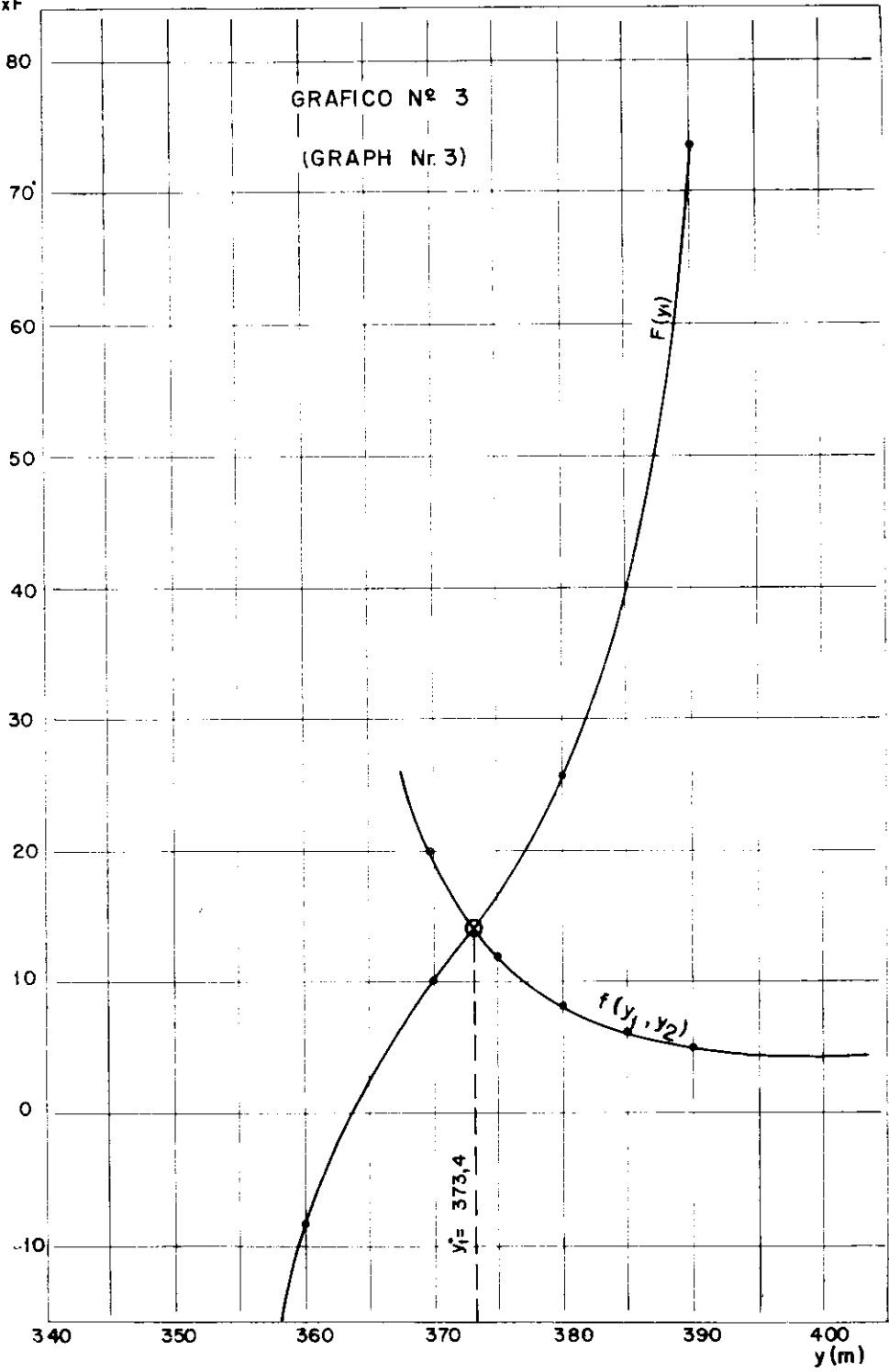


GRAFICO (GRAPH) N. 3

Salientamos que os valores das velocidades V_i , indicam uma condição satisfatória, no que diz respeito ao equilíbrio hidráulico do sistema.

Cumpro o grato dever de manifestar o meu agradecimento ao Dr. RENATO J. B. DELLA TOGNA, Superintendente do Departamento de Águas e Energia Elétrica (DAEE) de S. Paulo, que patrocinou a publicação do presente trabalho.

It should be emphasized that the speeds V_i , show a satisfactory condition, as for the hydraulic equilibrium of the system.

I accomplish the pleasant obligation to manifest my thanks to Dr. RENATO J. B. DELLA TOGNA, Superintendent of Water and Electric Power Board of S. Paulo, which sponsored the publication of this work.

BIBLIOGRAFIA (BIBLIOGRAPHY)

- [I] — L. CONTI — Costruzioni Idrauliche — Roma, 1923.
- [II] — A. BANDINI — Hidráulica — Vols I e (and) II — S. Carlos.
- [III] — A. BANDINI — Il calcolo dei Canali Coperti — Roma, 1948.
- [IV] — KING — Handbook of Hydraulics — New York.
- [V] — A. R. CUOMO — S. M. VILLELA — Dimensionamento econômico de tubulações em recalque — S. Carlos (SP), 1961.