

SISTEMA ADUTOR METROPOLITANO

ANÁLISE DE REDES HIDRÁULICAS

ENG.º TUFI M. ASSY
Junta Técnica da COMASP

1. SUMÁRIO

Sugere-se um método de cálculo que permite a análise de uma rede hidráulica para diversas hipóteses de funcionamento.

Considera-se o traçado da rede em forma de malhas, contendo, no caso geral, condutos, válvulas, bombas e reservatórios com curvas características conhecidas. As incógnitas podem ser combinações de vazões nos tramos, e/ou vazões nos nós e/ou coeficientes de resistência. O grupo de incógnitas depende da hipótese de funcionamento adotada. O método, então, é particularmente recomendável para o estudo de operação de uma rede, já executada ou por executar, especialmente redes de grande porte.

2. POSSIBILIDADES DO MÉTODO

Tem aumentado, ultimamente, a necessidade de redes hidráulicas de grandes extensões, diâmetros e vazões, circundando cidades de municípios vizinhos e alimentando grandes reservatórios de acumulação de água potável que têm por finalidade suprir as redes de distribuição setorial. As redes de grande porte precisam ser altamente flexíveis, sobretudo do ponto de vista operacional.

Alguns dos critérios de projeto e de operação que normalmente podem ser exigidos são os seguintes:

- Garantias de suprimento de água na eventualidade de ocorrerem flutuações horárias excepcionais, arrebentamentos de linha e paradas de bombeamento devidas, p.ex., a interrupções de energia elétrica.
- Teste do traçado da rede para avaliar corretamente o seu desempenho do ponto de vista hidráulico, em condições normais e excepcionais de funcionamento.
- Seleção racional das variáveis hidráulicas a serem medidas e localização dos instrumentos de medida correspondentes, para fins propriamente operacionais da rede.

Outras questões podem evidentemente ser aduzidas de maneira a extrair o máximo de funcionalidade da rede. O método que a seguir se expõe poderá dar indicações seguras quanto ao comportamento da rede em face de cada hipótese de funcionamento obtida por detalhamento de cada uma das questões acima enunciadas.

3. FUNDAMENTOS TEÓRICOS E CONVENÇÕES

A rede hidráulica compreende L condutos de diâmetros dados, M malhas independentes, N nós e sua geometria é conhecida. Q_{ij} e $\Delta H_{i,j}$ indicam respectivamente a vazão e o gradiente de energia referentes ao elemento hidráulico comum à malha de n.º i e à malha de n.º j . Se entre i e j não há elemento hidráulico que lhes seja comum, então $Q_{ij} = 0$ ou $\Delta H_{i,j} = 0$. (V. n.º 7).

O equacionamento das redes hidráulicas pressupõe um sentido de percurso a ser atribuído às malhas, igual para todas. O usual é considerar esse sentido coincidente com o dado pela marcha dos ponteiros do relógio. Convencionam-se positivas as vazões (e não necessariamente os gradientes de energia), nos tramos ij (comuns às malhas i e j) quando o sentido de circulação do líquido nesse tramo é coincidente com o sentido de percurso para a malha a que pertence o referido tramo. Se Q_{ij} é a vazão vista da malha i e Q_{ji} a vazão vista da malha j , ambas estabelecidas nas mesmas seções do tramo ij , tem-se evidentemente $Q_{ij} = -Q_{ji}$.

Em decorrência desta convenção as vazões nas seções de entrada e saída dos nós passam a ser precedidas de sinais algébricos apropriados. Cercando o nó por uma superfície de controle que secciona todos os condutos que nele concorrem, ver-se-á que as vazões são positivas se, vistas da malha i , e saindo do nó $s = 1, 2, \dots, N$, o líquido circula no sentido do percurso adotado para a referida malha i . Ao contrário, são negativas se, vistas da malha i , e entrando no nó, o líquido circula no sentido do percurso adotado para a referida malha i .

Pela mesma razão as vazões externas que concorrem no nó são positivas se saem do nó e negativas em caso contrário. Respeitadas estas convenções de sinais o problema das redes hidráulicas pode ser enunciado como segue: determinar uma distribuição de vazões Q_{ij} e C_s que, satisfazendo à equação da continuidade em todos os nós, os gradientes de energia resultantes para todos os elementos hidráulicos intervinientes (condutos, bombas, válvulas, reservatórios) devem ser tais que:

$$(1) \quad \sum_{j=1}^{\bar{M}} \Delta H_{i,j} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M$$

onde $\Delta H_{i,j}$ representa uma perda de carga h_{fij} ; se o elemento hidráulico é um conduto ou uma válvula e representa um ganho de energia se o elemento hidráulico é uma bomba.

A perda de carga está ligada à vazão por fórmulas do tipo, que preservam o mesmo sinal a ambas as variáveis

$$h_{f,ij} = K_{ij} |Q_{ij}|^{n-1} Q_{ij}$$

onde n é um número dado e K_{ij} é o coeficiente de resistência. No caso de um conduto e empregando a fórmula universal de perda de carga, tem-se $n = 2$ e

$$K = f \frac{8}{g\pi^2} \frac{L_0}{D^5}$$

onde L_0 é o comprimento do conduto, D o diâmetro e f é dado pela fórmula de Colebrook e White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1,74 - 2,0 \log_{10} \left[\frac{2K_0}{D} + \frac{18,7}{R \sqrt{f}} \right]$$

onde K_0 é a rugosidade uniforme equivalente e R é o n° de Reynolds.

No caso de uma bomba, incorporada à rede entre as seções extremas do conduto ij , o gradiente de energia é dado pela carga manométrica da bomba. Supõe-se que a bomba é um conduto fictício cujas seções extremas são as seções de entrada e saída da bomba e cuja curva característica é a curva característica da bomba que se pode pôr sob a forma:

$$H_{ij} = \begin{cases} H_0 & \text{Para } Q_{ij} = 0 \\ H_0 + m Q_{ij}^n & \text{para } Q_{ij} > 0 \end{cases}$$

H_0 , m , n são constantes a determinar a partir da curva característica da bomba. Se são M malhas engendradas pelo sistema de transporte para adução ou distribuição, então M equações simultâneas não lineares podem ser escritas e portanto M incógnitas podem ser determinadas. Parte destas incógnitas são auxiliares, introduzidas para gerar um maior número de incógnitas principais como as vazões nos nós e nos tramos.

Para a rede a ser resolvida, a combinação das incógnitas principais deve atender a determinadas condições, examinadas mais adiante. Como as equações simultâneas não são lineares, a solução pode ser obtida por iterações sucessivas, usando, como se expõe a seguir, um método adequado que conduz à convergência.

4. O MÉTODO *

Construa-se a seguinte função, associada à malha i ,

$$H_i = \sum_{j=1}^M \Delta H_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (2)$$

que reúne sob o sinal da soma os gradientes de energia, ligadas aos tramos que cercam a

referida malha. Quando as malhas i e j não possuem tramos em comum, pomos

$$\Delta H_{ij} = 0$$

Como o número de incógnitas que compõem no sistema de equações (1), em termos de K_{ij} e Q_{ij} é excessivamente grande em relação ao número de equações, que por sua vez é o número de malhas engendradas pela rede, recorremos a um artifício que é o de operar uma mudança de incógnitas de maneira que as novas variáveis, ditas agora incógnitas auxiliares, sendo de número reduzido ao mínimo é capaz de gerar o maior número possível de incógnitas principais a serem estabelecidas para a rede. A mudança de incógnitas é mais indicada para as vazões Q_{ij} . Sejam Q_j , $i = 1, 2, \dots, M$, vazões fictícias associadas às malhas i , que desempenham o papel de incógnitas auxiliares, e C_{ij} , constantes a determinar, dadas pela relação $Q_{ij} = Q_i - Q_j + C_{ij}$ e sujeitas às mesmas convenções de sinais dos Q_{ij} . As propriedades características desta relação e o significado dos C_{ij} serão adiante precisados. Sejam agora Q_i e \bar{Q} e K_{ij} e \bar{K} o grupo de incógnitas selecionadas para uma dada rede hidráulica. H_i é uma função dessas variáveis. Para linearizar o sistema de equações (2) desenvolvemos H_i , pela fórmula de Taylor adstrita à derivada de 1.ª ordem. Sendo $Q_j^{(\alpha)}$ e \bar{Q}

e $K_{ij}^{(\alpha)}$ e \bar{K} os valores das incógnitas decorrentes da iteração de ordem (α) e pondo:

$$H_i^{(\alpha)} = H_i \left(Q_j^{(\alpha)}, K_{ij}^{(\alpha)} \right) \neq 0$$

resulta:

$$H_i^{(\alpha+1)} = H_i^{(\alpha)} + \sum_{K_{ij} \in \bar{K}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial K_{ij}} \right)^{(\alpha)} \Delta K_{ij} + \sum_{Q_j \in \bar{Q}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} \right)^{(\alpha)} \Delta Q_j$$

Obtêm-se novas correções ΔQ_j e ΔK_{ij} impondo a condição $H_i^{(\alpha+1)} = 0$, donde o sistema de equações lineares nas incógnitas ΔQ_j e ΔK_{ij} :

$$\sum_{K_{ij} \in \bar{K}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial K_{ij}} \right)^{(\alpha)} \Delta K_{ij} + \sum_{Q_j \in \bar{Q}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} \right)^{(\alpha)} \Delta Q_j = - H_i^{(\alpha)}, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3)$$

onde:

$$\frac{\partial H_i}{\partial K_{ij}} = \frac{h_{f,ij}}{K_{ij}} \quad (4)$$

(*) O método a ser apresentado supõe as equações escritas para as malhas. O mesmo procedimento é válido se as equações são escritas para os nós.

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial H_i}{\partial Q_{ij}} - \frac{\partial Q_{ij}}{\partial Q_j} = -n \frac{hf_{ij}}{Q_{ij}} \quad j \neq i \quad (5)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} = - \frac{\partial(\Delta H_{ij})}{\partial Q_{ij}} \quad j = J \quad (6)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_i} = \frac{\partial H_i}{\partial Q_{ij}} - \frac{\partial Q_{ij}}{\partial Q_i} = - \sum_{j=1}^{\bar{M}} \frac{\partial H_i}{\partial Q_i} \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial H_i}{\partial Q_i} \quad (8)$$

As equações (5) e (6) procedem quando no tramo ij está instalado um elemento hidráulico, de curva característica especial (bomba, p.ex.) função contínua, porém com derivada descontínua. Tais pontos de descontinuidade das derivadas devem ser examinados em cada iteração para ajustar cuidadosamente os coeficientes que intervêm no sistema de equações (3). Ao fazer

$$Q_{ij} = Q_i - Q_j + C_{ij} \quad (9)$$

está-se implicitamente admitindo que os C_{ij} satisfazem à equação da continuidade nos nós. As seguintes propriedades são então decorrentes:

a) Se a vazão Q_{ij} em um tramo ij é considerada um dado do problema, tem-se da relação (9):

$$\Delta C_{ij} = \Delta Q_j - \Delta Q_i$$

Portanto, as vazões nos nós extremos do tramo ij consideram-se incógnitas se no decorrer das iterações for sempre admitido que $Q_i \neq Q_j$ e consideram-se dados do problema se for sempre admitido que $Q_i = Q_j$.

b) Se a vazão C_{ij} num tramo ij é considerada um dado do problema, tem-se da mesma relação (9):

$$\Delta Q_{ij} = \Delta Q_i - \Delta Q_j$$

à qual se aplicam as considerações anteriores. Conclui-se ainda que a vazão fictícia a ser associada a cada região exterior às malhas de rede é uma constante arbitrária.

Estimada uma hipótese de funcionamento da rede, determinam-se as incógnitas principais que devem figurar como intervenientes e em correspondência se esboçam as incógnitas auxiliares que juntamente com algumas incógnitas principais devem perfazer o total de M incógnitas (pois são M malhas e portanto M equações), para se escrever em seguida o sistema de equações (3). A matriz dos coeficientes deverá ter característica igual a M para que a solução exista e seja única em relação às referidas incógnitas.

A solução do sistema de equações (3) fornece uma nova distribuição das incógnitas, segundo as relações

$$Q_{ij}^{(\alpha+1)} = Q_{ij}^{(\alpha)} - \Delta Q_{ij}, C_s^{(\alpha+1)} = C_s^{(\alpha)} + \Delta C_s, K_{ij}^{(\alpha+1)} = K_{ij}^{(\alpha)} + \Delta K_{ij},$$

que será uma solução aceitável para a rede se, para qualquer malha i , se verificar $|H_i^{(\alpha)}| < \epsilon_0$, onde ϵ_0 é um erro previamente fixado. Em caso contrário, será preciso passar à iteração seguinte, recalculando sucessivamente os coeficientes o sistema (3), os acréscimos ΔK_{ij} , ΔQ_{ij} , a nova estimativa das incógnitas principais e os valores $H_{ij}^{(\alpha+1)}$ para cotejá-los com o erro permitido ϵ_0 .

Nota: Quando as vazões nos nós e os coeficientes de resistência intervêm como dados para uma fixada análise da rede, e as vazões nos tramos se constituem em incógnitas para essa análise, o sistema de equações (3) assume a forma particular dada por

$$\sum_{j=1}^{\bar{M}} n \frac{hf_{ij}}{Q_{ij}} \cdot \Delta Q_j - \left(\sum_{j=1}^{\bar{M}} n \frac{hf_{ij}}{Q_{ij}} \right) \Delta Q_i = H_i \quad (10)$$

onde os coeficientes são os dados pelas fórmulas (5) e (7). O sistema de equações (10) é precisamente o obtido anteriormente pelo Autor (*).

Exemplo: Para realçar as possibilidades do método, consideramos, como exemplo, uma rede muito simples, formada por duas malhas como ilustrada na fig. 1. Os seguintes casos podem ser propostos:

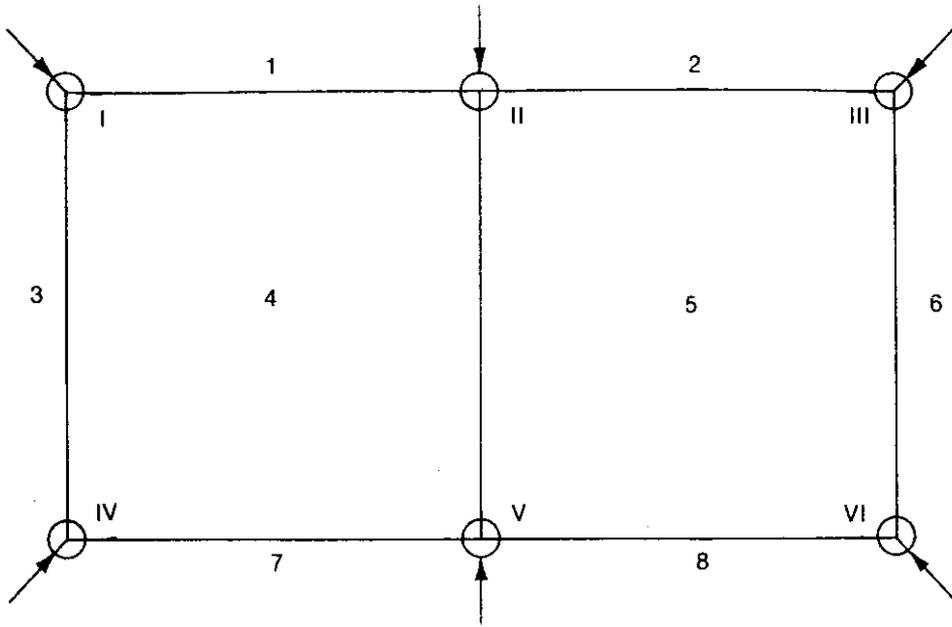
a) As vazões nos nós e os coeficientes de resistência são fixos e as vazões nos tramos são incógnitas. Neste caso as correções serão dada por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_4}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_4}{\partial Q_5} \\ \frac{\partial H_5}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_5}{\partial Q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_4 \\ \Delta Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_4 \\ -H_5 \end{bmatrix}$$

V. Fórmulas (3) a (8) ou (10).

b) Os coeficientes de resistência e a vazão Q_{34} são fixos porém C_{IV} , e as vazões nos tramos (excluindo naturalmente Q_{34}) são incógnitas.

(*) Cfr. Assy, T. M. — Redes de Distribuição de Água — Cálculo Numérico e Analógico — EPUSP — 1959 e Métodos de Cálculos das Redes Hidráulicas. DAE — Ano XXVIII — N.º 70 — Dez. 1968.



Neste caso as correções serão dadas pelo sistema de equações anterior, com $\partial H_i / \partial Q_4$ desfalcado do termo relativo a Q_{43} .

As vazões Q_{43} e nos nós são fixos, as demais vazões nos tramos e o coeficiente de resistência K_{43} são incógnitas: Neste caso fazemos $Q_4 = Q_5$, donde:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_4}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_4}{\partial K_{43}} \\ 0 & \frac{\partial H_5}{\partial Q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Q_4 \\ \Delta K_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_4 \\ -H_5 \end{bmatrix}$$

com $\frac{\partial H_4}{\partial Q_4}$ e $\frac{\partial H_5}{\partial Q_5}$ desfalcados do termo referente a Q_{43} .

— Teste de sensibilidade

O processo acima descrito permite avaliar o comportamento hidráulico da rede para M variáveis, previamente selecionadas e suscetíveis de mudanças simultaneamente. O problema que ora se apresenta consiste em, sendo conhecida uma solução hidráulica $H_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, M$ para uma dada hipótese de funcionamento da rede, determinar as variações sofridas por um conjunto previamente selecionado de variáveis em função da variação sofrida por uma única variável não pertencente ao conjunto antes mencionado, e reciprocamente. A solução deste problema tem interesse, inclusive, para estabelecer regras operacionais para a rede.

Selecioneamos então as variáveis Q_j , K_{ij} e X , genericamente designados por x_p , $p = 1, 2, \dots, M$, suscetíveis de sofrer cada uma de per

si a alteração Δx_p , em consequência de uma alteração Δy_q sofrida por uma determinada variável y_q não pertencente ao conjunto mencionado X , sendo x_p e y_q tais que: $H_i(x_1, \dots, x_m, y_q) = 0$. Estas alterações podem ser obtidas, pondo

$$\frac{dH_i}{dy_q} = 0$$

relação que conduz a

$$\sum_{x_p \in X} \frac{\partial H_i}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial y_q} = - \frac{\partial H_i}{\partial y_q} \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

Resolvendo este sistema de equações em relação às incógnitas $\partial x_p / \partial y_q$, as alterações procuradas serão dadas por $\Delta x_p = (\partial x_p / \partial y_q) \Delta y_q$. Os coeficientes $\partial H_i / \partial x_p$ e $\partial H_i / \partial y_q$ são obtidos da rede suposta balanceada. Quando x_p é uma vazão fictícia Q_p , será lícito escrever:

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_p} = \frac{\partial H_i}{\partial Q_{ip}} \cdot \frac{\partial Q_{ip}}{\partial Q_p}$$

O sistema de equações (11) adquire a seguinte forma matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial Q_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial y_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \frac{\partial H_i}{\partial y_q} \end{bmatrix} \quad (12)$$

em que o 2.º membro e o 2.º fator do 1.º membro indicam matrizes-coluna. Cabem aqui considerações idênticas às apresentadas para o sistema de equações (3).

Exemplo: Considere-se a rede ilustrada na fig. 1, suposta balanceada. A uma manobra da válvula colocada no tramo 56 as vazões Q_4 e Q_5 sofrem variações $\frac{\partial Q_4}{\partial H_{56}}$ e $\frac{\partial Q_5}{\partial K_{56}}$ dados

por :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_4}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_4}{\partial Q_5} \\ \frac{\partial H_5}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_5}{\partial Q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_4}{\partial K_{56}} \\ \frac{\partial Q_5}{\partial K_{56}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\partial H_5}{\partial K_6} \end{bmatrix}$$

onde os elementos da matriz quadrada são os configurados pelas fórmulas (3) a (8).

6. CONCLUSÃO

Desenvolveu-se um método geral de cálculo das redes hidráulicas aplicável a uma diversidade de hipóteses de funcionamento. As incógnitas podem ser reunidas em um conjunto contendo isolada ou combinadamente vazões nos nós, vazões nos tramos e coeficientes de resistência. A solução de cada problema específico é obtida por iterações sucessivas, corrigindo as incógnitas, em cada etapa, com incrementos que são raízes de um sistema de equações lineares. Como a ordem deste sistema de equações é reduzida (pois é igual ao número de malhas, engendradas pela rede), o método implica em economia de tempo se for utilizada a computação digital. Um teste de sensibilidade foi também apresentado. A técnica de computação é muito simples, consistindo, praticamente, na solução de um sistema de equações lineares.

7. CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

As malhas são enumeradas de 1 a M. Consideram-se para efeito dessa numeração as M malhas internas e as malhas externas à rede. Estas últimas são fictícias servindo apenas para individualizar um tramo comum a duas malhas contíguas.

- i — índice designativo dos números 1 a M.
- j — índice designativo dos números 1 a \bar{M} .
- ij — par de índices que caracteriza um trabalho comum às malhas i e j.
- Q_{ij} — vazão nas seções do tramo ij.
- h_{fij} — perda de carga distribuída do tramo ij.
- ΔH_{ij} — gradiente de energia no tramo ij.
- C_s — vazão no nós = 1, 2, ... N.
- Q_i — vazão fictícia associada à malha i.
- K_{ij} — coeficiente de resistência do conduto ou da válvula instalada no tramo ij.
- C_{ij} — vazão no nó s = 1, 2, ... N. contribuição do tramo ij.
- \bar{K} — conjunto das incógnitas K_{ij} .
- \bar{Q} — conjunto das incógnitas Q_i .
- ϵ_v — é um número arbitário, previamente fixado.
- ϵ — símbolo indicativo da pertinência.