

MODÉLOS PARA ANÁLISE DE PROGRAMAS DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE

ROBERTO MAX HERMANN Ph.D.*

Este artigo apresenta e discute os méritos relativos de modelos matemáticos para solução de problemas de expansão de capacidade. Se bem que todos os exemplos de Aplicação sejam extraídos da área de Recursos Hídricos, os modelos discutidos são de caráter geral e podem ser utilizados em outros setores econômicos.

I — INTRODUÇÃO

O tempo desempenha papel importante na análise de programas de investimento. Custos e benefícios devem ser medidos a partir de uma origem comum para que sejam comparáveis.

Sejam C_t e B_t custos incorridos e benefícios realizados no ano t ; tomando o ano zero como origem para contagem do tempo e r como a taxa de desconto anual, o valor presente desses custos e benefícios é, respectivamente:

$$C_0 = \frac{C_t}{(1+r)^t} \quad B_0 = \frac{B_t}{(1+r)^t} \quad (I-1)$$

Como $r > 0$, com o crescer de t , o valor presente desses custos e benefícios decrescem. Quanto maior o valor de r mais rápido é esse decréscimo. Define-se o fator de desconto D_t como sendo

$$D_t = \frac{1}{(1+r)^t} \quad (I-2)$$

Do ponto de vista da teoria da decisão são esses fatores de desconto que permitem reduzir o problema de investimentos intertemporal com uma função utilidade multidimensional, a um problema consideravelmente mais simples com

um só índice de utilidade — o valor presente. (1) e (2) **

A Equação I-2 pode ser colocada em função da taxa de desconto instantâneo. Suponha-se que, ao contrário da discussão acima, o tempo é tratado como uma variável contínua. Define-se a taxa de desconto instantânea h como sendo:

$$h = \ln(1+r) \quad (I-3)$$

E o fator de desconto instantâneo será

$$D_t = e^{-ht} \quad (I-4)$$

Os valores de h e r são praticamente iguais; por exemplo para $r = .05000$, $h = .04879$.

A determinação do valor da taxa de desconto não será discutida; este parâmetro é assumido como sendo conhecido. Entretanto, no caso de investimentos governamentais, essa determinação é difícil e o leitor interessado é enviado à literatura especializada (1) e (3).

As obras de engenharia geralmente exibem acentuadas economias de escala; tal fato traduz-se matematicamente por equações relacionando custos e capacidades de forma exponencial,

$$C(x) = a x^b \quad \begin{matrix} 0 < b < 1 \\ 0 < a \end{matrix} \quad (I-5)$$

onde $C(x)$ é o custo associado à capacidade x , a e b são parâmetros. O parâmetro b é chamado fator de escala; caso $b = 1$ o custo é diretamente proporcional à capacidade e, para essa obra, não existem economias de escala. Quanto menor o valor de b mais acentuado o efeito de escala; tipicamente o valor de b oscila entre 0.5 e 0.8 podendo ser da ordem de 0.3 para alguns tipos de barragens e canais e da ordem

* Departamento de Engenharia Hidráulica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

** Os números entre parêntesis referem-se à bibliografia listada no fim do artigo.

de 0.9 para estações de tratamento de esgotos (4).

A seguinte situação será aqui analisada: a demanda para um certo serviço é suposta conhecida e crescente ao longo do tempo; procura-se qual o programa de investimentos em capacidade para satisfazer essa demanda de maneira tal que o valor presente dos custos totais seja mínimo.

É importante ressaltar que este é um problema onde o tempo desempenha fator importante. O que se procura é minimizar o valor presente dos custos globais e não localizar uma sucessão de mínimos em diferentes pontos do eixo do tempo. Os economistas costumam classificar análises efetuadas de acordo com os dois critérios, respectivamente, de dinâmica e estática.

Dois modelos básicos serão discutidos. O primeiro deles se concentra na análise de um componente isolado e determina o intervalo de tempo ótimo (e conseqüentemente a capacidade ótima) a ser acrescida para satisfação da demanda. O segundo, a custa de esforço computacional adicional, analisa o sistema a ser expandido de maneira integrada tomando em conta todos os vínculos físicos existentes. Obviamente, essa última análise é muito mais completa e realista do que a precedente.

II — ANÁLISE POR COMPONENTES ISOLADOS

O primeiro modelo a ser discutido é devido originalmente a Chenery (5) e foi formulado como um problema de expansão de capacidade de equipamento destinado ao transporte de gás natural, isto é, estações de bombeamento e tubulações. O mesmo modelo foi explorado por Manne (6) e (7), Thomas (4) e Muhich (8). A formulação apresentada pelo último autor é no contexto de expansão de capacidade para estações de tratamento de água e o seu modelo mais simples será aqui transcrito.

A explosão demográfica que se observa presentemente associada à sempre crescente tendência de concentração populacional em núcleos urbanos e ao constante aumento dos níveis de conforto exigidos contribuem para tornar o fornecimento urbano de água, em quantidade e qualidade adequadas, objeto de grandes investimentos. Se bem que sistemas de abastecimento urbano constem de vários componentes, o modelo é concentrado na análise de somente um deles — a estação de tratamento. Talvez seja essa a sua deficiência fundamental. Todos os componentes de tais sistemas devem funcionar

integradamente e suas capacidades devem ser tais que esse funcionamento seja possível. Orientar a expansão do sistema otimizando somente a agregação de capacidade relativa a um dos componentes pode conduzir a resultados grosseiros e desviar consideravelmente do ótimo global.

Estações de tratamento de água exibem consideráveis economias de escala; Orlob e Lindorf (9) analisaram dados de custo de várias obras deste gênero, construídas na Califórnia, e concluíram que o fator de escala adequado para representação de curva custo x capacidade é da ordem de .67.

O objetivo do modelo é determinar a capacidade ótima das novas estações a serem agregadas ao sistema. A questão básica a ser examinada é se convém, do ponto de vista econômico, construir poucas unidades de grande capacidade que não serão inteiramente utilizadas até alguns anos após a sua construção ou uma sucessão de pequenas instalações cujas capacidades sejam utilizadas inteiramente em curto lapso de tempo. A favor de poucas e grandes unidades existe o efeito de economia de escalas; dobrando a capacidade de uma estação de tratamento, com fator de escala .67, o custo fica multiplicado por 1.59. Isto quer dizer que o custo unitário da vazão tratada decresce. Por outro lado, a capacidade total não é utilizada rapidamente e o custo de oportunidade da capacidade ociosa pode ser maior que o efeito de escala. O modelo a seguir discutido procura balancear esses dois fatores conflitantes e avaliar a capacidade ótima.

As hipóteses básicas a serem utilizadas na construção do modelo são:

- 1) no início da contagem do tempo a capacidade disponível é igual à demanda de água;
- 2) a futura demanda é inelástica e deve ser uma satisfeita, não existindo fontes alternativas disponíveis;
- 3) os intervalos de tempo entre a construção de novas estações é constante;
- 4) define-se o período de maturação de um projeto como o tempo gasto entre a decisão da sua construção e sua efetiva entrada em serviço; o período de maturação compreende o tempo gasto em atividades de projeto, providências administrativas e construção. Neste modelo simplificado esses tempos são supostos iguais a zero e o custo total é incorrido instantaneamente na data de entrada em serviço.

Essas hipóteses são equivalentes a exigir que uma estação deve ser construída imediata-

mente e que toda vez que a demanda de água iguale a capacidade instalada nova adição deve ser feita. O modelo requer a adoção de uma curva de demanda; neste artigo a demanda será admitida como função linear do tempo,

$$D(t) = D(0) + d \cdot t$$

onde

$D(t)$ = demanda no tempo t

$D(0)$ = demanda inicial

d = acréscimo de demanda na unidade de tempo.

A Figura 1 ilustra a relação entre a curva de demanda adotada e os sucessivos acréscimos na capacidade instalada.

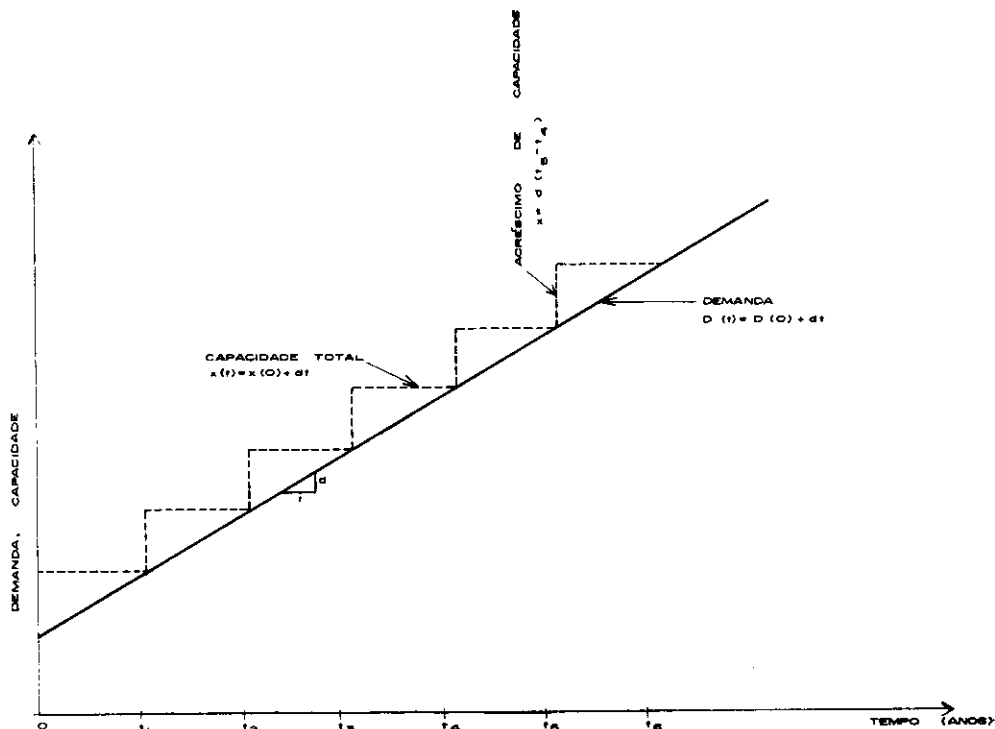


FIGURA 1 - DEMANDA E CAPACIDADE, ANÁLISE POR COMPONENTES ISOLADOS

O problema essencial é escolher a capacidade ótima x^* a ser agregada ao sistema; como capacidade ótima é entendida aquela que minimiza o valor presente dos custos totais para satisfação da demanda. Como a capacidade a ser instalada no tempo t_i é determinada pela diferença em demanda entre t_i e t_{i-1} resulta:

$$\begin{aligned} x &= D(t_i) - D(t_{i-1}) = \\ &= d(t_i - t_{i-1}) \end{aligned} \quad (II-2)$$

a última expressão mostra que,

$$x = d \Delta t, \quad \Delta t = t_i - t_{i-1} \quad (II-3)$$

O problema pode ser posto também em termos de escolha de um intervalo ótimo para agregação de nova capacidade ao sistema. O custo associado a essa agregação pode ser escrito como,

$$C(x) = a x^b = a d^b \Delta t^b \quad (II-4)$$

O valor presente deste custo, se incorrido no tempo t_i , será:

$$P(x, T_i) = a d^b \Delta t^b e^{-h t_i} \quad (II-5)$$

utilizando-se o fator instantâneo de desconto definido em I-4.

O horizonte de planejamento, isto é, o período coberto pela análise pode ser escrito como,

$$T = n \Delta t \quad (II-6)$$

Admitindo-se que a vida útil das estruturas seja superior ao horizonte de planejamento, o valor presente do custo total para atendimento da demanda ao longo do horizonte de planejamento será:

$$\begin{aligned} S &= a d^b \Delta t^b [1 + e^{-h \Delta t} + e^{-h^2 \Delta t} + \\ &+ e^{-h(n-1) \Delta t}] \end{aligned} \quad (II-7)$$

O termo entre parêntesis constitui uma progressão geométrica de razão $e^{-h \Delta t}$; a soma dos termos dessa progressão é:

$$\frac{e^{-h n \Delta t} - 1}{e^{-h \Delta t} - 1} \quad (\text{II-8})$$

Substituindo II-8 e II-6 em II-7 vem:

$$S = a d^b \Delta t^b \frac{e^{-bT} - 1}{e^{-h \Delta t} - 1} \quad (\text{II-9})$$

A próxima etapa consiste em determinar Δt^* , isto é, o intervalo de tempo entre adições de capacidade que minimize o valor presente do custo total.

Para tanto é necessário derivar II-9 em relação a Δt e igualar essa derivada a zero; o resultado é uma função implícita de Δt^* ,

$$h \Delta t^* - b e^{h \Delta t^*} + b = 0 \quad (\text{II-10})$$

Os detalhes algébricos necessários para a obtenção de II-10 estão mostrados em (6) e (8).

A solução da equação acima pode ser feita iterativamente utilizando a técnica de Newton-

Raphson; alternativamente, (6) e (8) apresentam gráficos de Δt^* em função de h e b ; as Figuras 2, 3 e 4 reproduzem três desses gráficos e servem para mostrar, em caráter indicativo, o andamento dessas curvas.

Thomas (4) sugere, como solução aproximada de II-10 a expressão abaixo

$$\Delta t^* \cong \frac{6}{h} (1 - b^{1/3}) \quad (\text{II-11})$$

Muhich investigou também a condição de segunda ordem que assegura que Δt^* é realmente uma condição de mínimo; para que a derivada segunda seja positiva é necessário e suficiente que

$$b > e^{-h \Delta t^*} \quad (\text{II-12})$$

Uma vez obtido Δt^* , a capacidade ótima a ser instalada x^* pode ser obtida a partir de II-3 e será

$$x^* = d \Delta t^* \quad (\text{II-13})$$

As Figuras 2, 3 e 4 e a expressão aproximada II-11 permitem as seguintes conclusões:

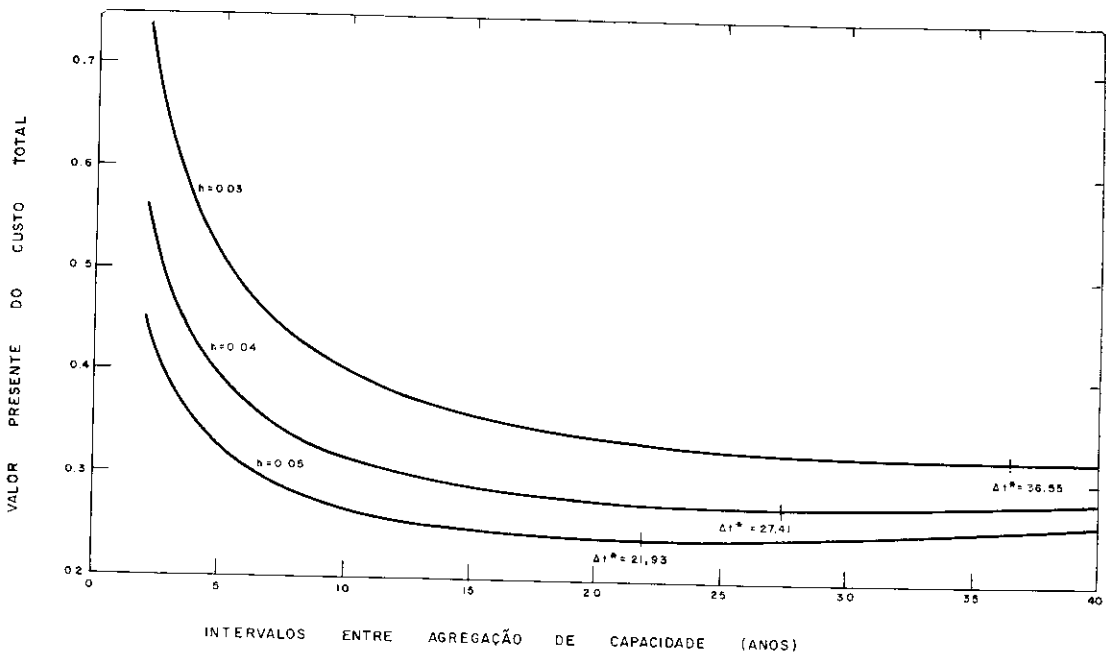


FIGURA 2 - EFEITO DO INTERVALO DE TEMPO ENTRE AGREGAÇÕES DE CAPACIDADE NO VALOR PRESENTE DO PROGRAMA DE INVESTIMENTOS; FATOR DE ESCALA $b = 0,55$

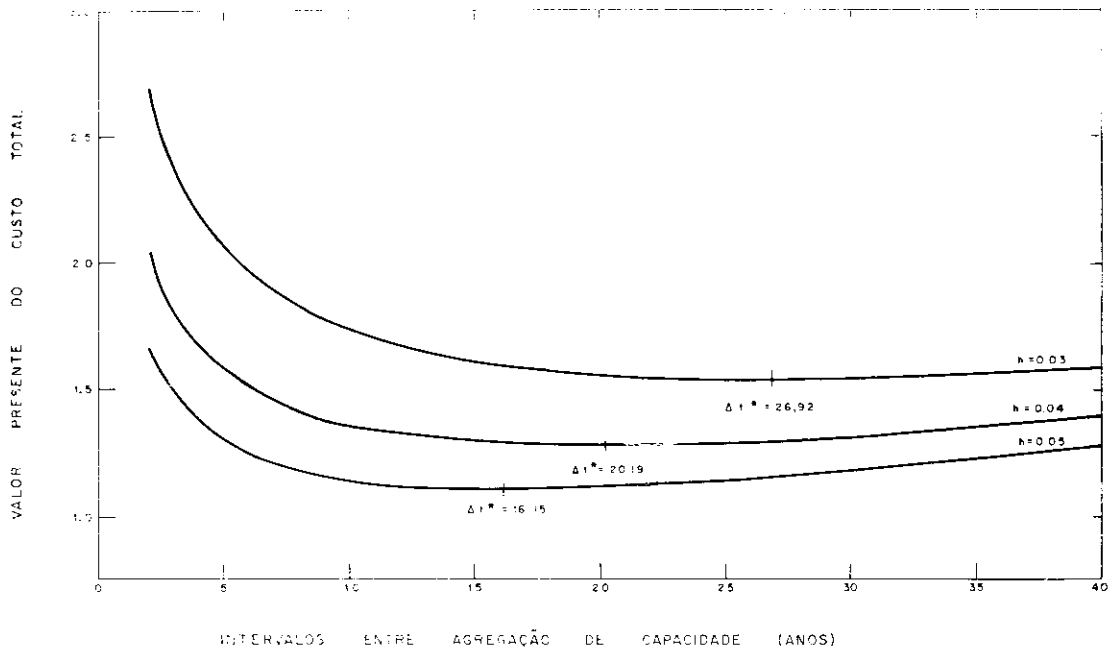


FIGURA 3- EFEITO DO INTERVALO DE TEMPO ENTRE AGREGAÇÕES DE CAPACIDADE NO VALOR PRESENTE DO PROGRAMA DE INVESTIMENTOS, FATOR DE ESCALA $b = 0,65$

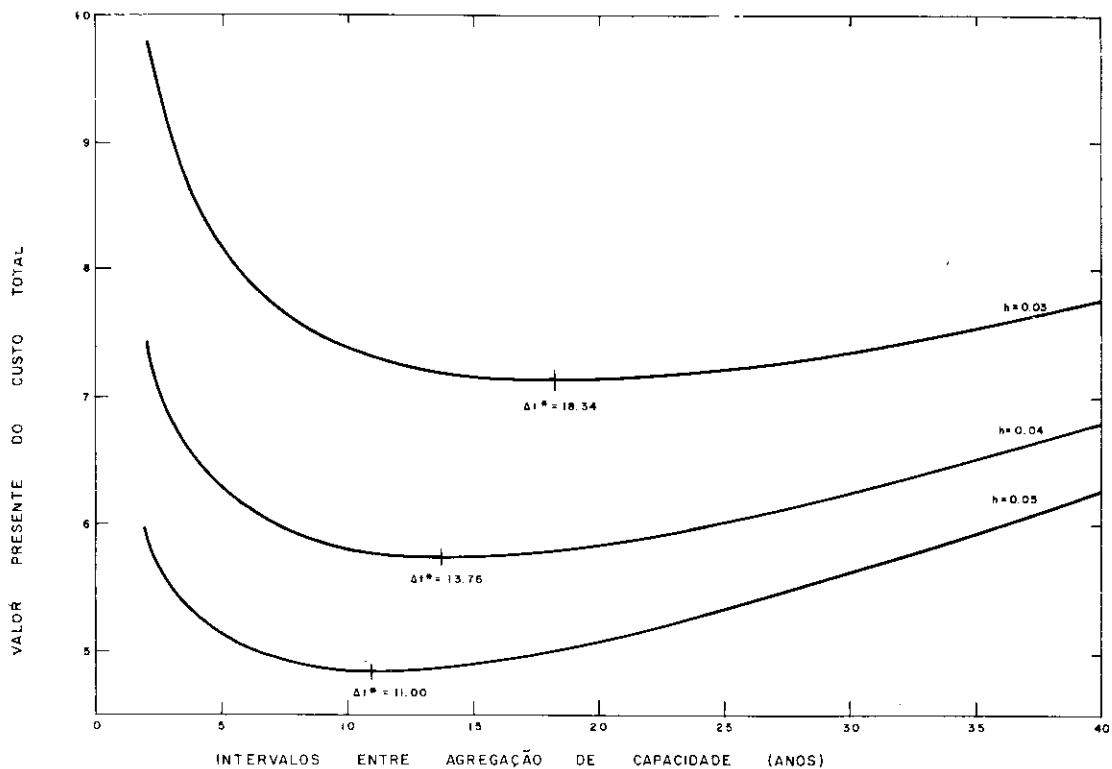


FIGURA 4- EFEITO DO INTERVALO DE TEMPO ENTRE AGREGAÇÕES DE CAPACIDADE NO VALOR PRESENTE DO PROGRAMA DE INVESTIMENTOS, FATOR DE ESCALA $b = 0,75$

- 1) a sensibilidade do valor presente do custo total em relação a Δt não é grande nas vizinhanças do ótimo Δt^* ; entretanto erros consideráveis podem incorrer caso o valor escolhido t esteja bastante afastado de Δt^* ;
- 2) Δt^* cresce com o decrescer da taxa de desconto para um dado b ;
- 3) Δt^* cresce com o decrescer de b ;
- 4) Δt^* é independente do coeficiente da função custo x capacidade e da taxa de acréscimo da demanda; entretanto o valor presente do custo total II-9 depende desses parâmetros.

Como já foi mencionado esse modelo, bastante simples, é utilizado para determinação do intervalo de tempo ótimo entre agregações de capacidade. Construção de unidades pequenas em intervalos frequentes pode acarretar a não utilização do efeito de escala; por outro lado, construção de grandes unidades separadas por intervalos de tempo maiores pode resultar em uso prematuro de recursos que podem ser mais necessários em outros setores econômicos.

Muhich foi o autor que mais expandiu o modelo teórico acima apontado; ele tratou de curvas de demandas lineares e geométricas, intervalos de construção variáveis, deficiências no atendimento da demanda (com introdução de uma função de penalidade), elasticidade de demanda etc. Manne (7) usou extensivamente essa classe de modelos nos seus trabalhos de planejamento econômico da Índia. Ele tratou de problemas da indústria de alumínio, soda cáustica, cimento e fertilizantes. Algumas contribuições teóricas importantes também podem ser encontradas na mesma Referência.

O modelo apresentado, bem como suas extensões, sofrem de algumas restrições que limitam sua aplicabilidade. Especialmente em áreas com a de Recursos Hídricos onde o custo das obras depende largamente das características locais a hipótese necessária da constância dos parâmetros da curva custo x capacidade não é realista*.

Sumarizando, as principais restrições a usos de modelos dessa natureza são as seguintes:

- a) O modelo trata cada componente individualmente; por exemplo, um sistema de abastecimento de água consta de obras de captação, adução, tratamento e distribuição. Co-

mo as características de custo dessas obras são diferentes entre si os fatores de escala também o serão. Para uma mesma taxa de desconto o modelo irá indicar intervalos de tempo diferentes para expansão das capacidades. Por outro lado tal sistema deve trabalhar integradamente de nada adiantando, por exemplo, aumentar a capacidade das facilidades de tratamento sem um correspondente aumento na capacidade dos componentes de adução;

- b) como já observado, as curvas de custo x capacidade para obras construídas especificamente para atender condições locais mostram grande sensibilidade em relação a essas condições; por exemplo, as curvas de custo x capacidade de armazenamento para barragens situadas em locais distintos geralmente são totalmente diferentes. A hipótese, implícita no modelo, da existência de grande número de oportunidades de investimento com mesma curva custo x capacidade não é realista;
- c) as únicas formas da curva de demanda analisadas são a aritmética e a geométrica; formulações empíricas de curvas de demanda não seguem, geralmente, nenhuma dessas formas;
- d) em alguns casos, os custos indiretos associados aos investimentos são consideráveis limitando a validade da Equação I-5 a valores acima de um certo mínimo; caso o modelo venha indicar valores abaixo desse mínimo a solução deixa de ter caráter prático.

Apesar dessas limitações o modelo apresenta interesse para avaliação preliminar das capacidades a serem acrescidas a um sistema. E o que é mais importante, mostra claramente os fundamentos teóricos para o balanceamento entre a taxa de descontos e o fator de escala.

Uma última questão, relativa a essa classe de modelos, necessita ser mencionada. O desenvolvimento anterior presuppôs um conhecimento perfeito dos parâmetros relevantes ao problema. Tal conhecimento é raramente atingido em condições práticas; mais precisamente, três são as possíveis causas de incerteza que podem estar presentes no processo:

- a) incertezas no crescimento da demanda. Manne (6) analisa este problema descrevendo a demanda em termos de um processo de Bachelier-Wiener;
- b) incertezas nas condições econômicas resultantes durante o horizonte de planejamento.

* É de notar-se que o modelo original de Chenery envolvia equipamentos pré-fabricados (tubulações e bombas) com os parâmetros da curva custo x capacidade constantes e com custos de instalações praticamente independentes do tamanho dos componentes.

Em especial, variações na taxa de desconto social pode acarretar sérios desvios nas condições de otimalidade. Thomas (4) analisa esse efeito e propõe testes de sensibilidade para ajuizar do efeito dessas variações;

- c) incertezas nos parâmetros da curva custo x capacidade devido a inovações tecnológicas. Este é o problema de mais difícil análise e em alguns casos de extrema importância. Para mencionar um exemplo, os custos unitários de escavação em rochas têm sofrido, nos últimos 30 anos, um notável decréscimo devido à melhoria do equipamento disponível para esse fim; por outro lado, túneis são estruturas com fator de escala muito baixo. No planejamento do reforço do sistema primário de abastecimento de água de New York City, todo é feito em túneis profundos, a decisão a ser tomada é a de construir túneis com capacidade ótima dadas as condições de demanda e taxa de desconto vigentes ou construir estruturas menores na expectativa de melhoria na curva de custo dos túneis. Esse problema foi analisado exaustivamente pelo Water Resources Group do MIT sem contudo ter-se chegado a uma quantificação satisfatória.

III — ANÁLISE DO SISTEMA GLOBAL A SER EXPANDIDO

O modelo a ser aqui discutido é destinado a corrigir os defeitos notados na análise apresentada na seção anterior. Essa correção é feita à custa de uma maior sofisticação matemática e esforço computacional.

O plano dessa seção é o seguinte: inicialmente será apresentado um algoritmo matemático, que é uma extensão de programação linear. Em seguida, com a ajuda de um exemplo, será mostrado que o problema de expansão de capacidade pode ser colocado no formato do algoritmo e finalmente serão discutidas as limitações computacionais dessa classe de modelos.

III-1 — Modelos Lineares Mistos com Variáveis Inteiras Restritas a Valores Zero ou Um

Por esse nome designa-se uma classe de modelos derivada da programação linear em forma estendida, pela imposição da restrição de que algumas variáveis de decisão são sujeitas a tomarem valores iguais a zero ou um exclusivamente. Em símbolos,

$$\text{Max } c \cdot x + d \cdot y$$

sujeito a

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq b \quad (\text{III-1})$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &= 0 \text{ ou } 1 \end{aligned}$$

onde x e c são n vetores, y e d são m vetores, A é uma Matriz de dimensões $(m + n) \times p$ e b é um p -vetor.

As primeiras tentativas para desenvolvimento de algoritmos para solução do problema acima proposto datam de 1958 (10); Balinsky (11) apresenta uma excelente revisão do estado-da-arte, em 1965. Uma técnica recente e aparentemente bastante promissora para solução desta classe de problemas é com a utilização da teoria dos grupos (12).

Esses modelos são particularmente adequados para solução de problemas de escalonamento temporal de investimentos e em particular para análise de problemas de expansão de capacidade. Ochos-Rosso (13) discute várias aplicações e Kendrick (14) apresenta um estudo detalhado de expansão de capacidade de indústria siderúrgica brasileira utilizando esse instrumental matemático. Hermann (15) apresenta alguns exemplos de aplicação na área de Recursos Hídricos; parte do material apresentado em (15) será aqui discutido.

III-2 — O Problema de Planejamento e Descrição do Modelo

A Figura 5 apresenta uma disposição esquemática da Bacia do Rio Maule, no Chile; pode-se observar que duas barragens e duas usinas hidroelétricas já estão construídas e em operação. O problema consiste em acrescentar mais duas usinas para atendimento da demanda crescente para energia elétrica. Torna-se necessário selecionar as capacidades a serem instaladas e as datas desta instalação.

Dois locais adequados para construção de barragens também estão mostrados na mesma Figura. Com a construção dessas barragens, as vazões regularizadas a serem proporcionadas às usinas serão acrescidas. Os regimes dos rios são tais que, além de uma certa potência instalada é necessário providenciar capacidade de regularização a montante das usinas. Ainda mais, usinas hidroelétricas não representam perdas consumptivas o que indica certo grau de complementaridade (salvo por efeitos sazonais no uso da água) com oportunidades de investimentos em projetos de irrigação também presentes na bacia.

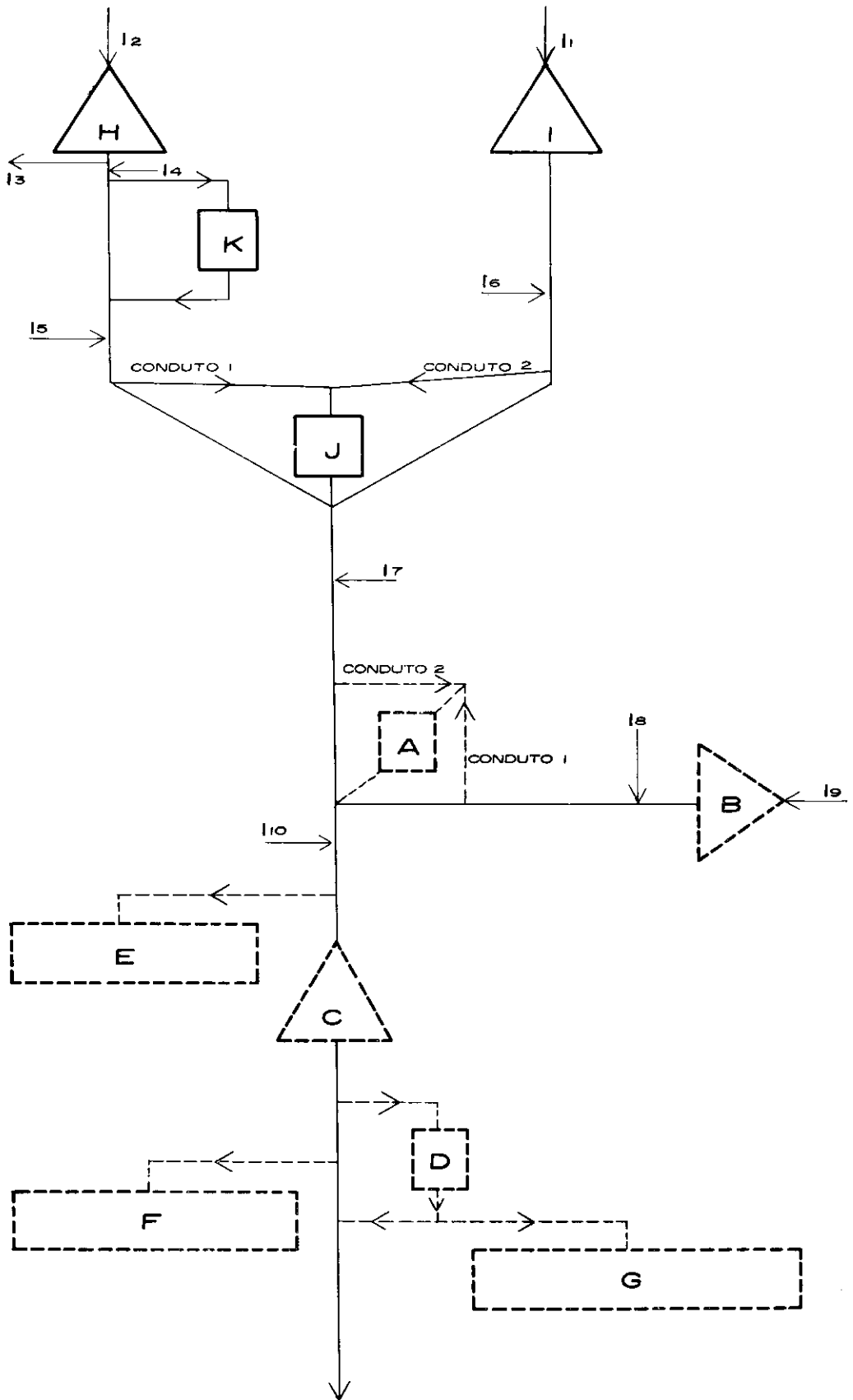


FIGURA 5 - REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA BACIA DO RIO MAULE;
 - EM TRACEJADO, OBRAS PROJETADAS E EM TRAÇO CHEIO OBRAS EXISTENTES.

Sumarizando, para atendimento da demanda de energia elétrica torna-se necessário agregações na capacidade instalada. Essas agregações podem exigir a construção de barragens para regularização e, dado a eventual existência dessas barragens, torna-se viável a construção de projetos de irrigação. Neste ponto deve estar claro que as técnicas de análise por componentes isolados não podem, adequadamente, representar toda a complexidade do problema. O modelo a ser discutido permite uma representação mais realista se bem que ainda adote hipóteses simplificadoras. Num estado de caráter prático esse modelo poderia ser estendido e seus resultados posteriormente testados utilizando técnicas de simulação.

O insumo hidrológico é bastante simplificado: consiste apenas em duas estações (seca e úmida) cada uma com duração de 6 meses; os deflúvios esperados nestas duas estações foram calculados a partir do traço histórico. O regime fluviométrico é de caráter nitidamente glacial já que a bacia se encontra localizada nas encostas da Cordilheira dos Andes. Este fato explica a vazão da estação seca (isto é com deflúvios afluentes menores) ser aquela que apresenta maior índice de pluviosidade.

A demanda de energia elétrica na região em estudo apresenta ligeiro efeito sazonal: é antecipado que, da energia gerada durante o ano, 52% serão consumidos durante a estação seca. A água suplementar de irrigação necessária em cada estação foi computada utilizando dados regionais.

O horizonte de planejamento é dividido em intervalos de tempo iguais; no início de cada intervalo a decisão sobre acréscimo de capacidade pode ser tomada. O período de maturação para todos os projetos foi assumido como sendo igual ao intervalo de tempo entre duas decisões; um projeto sendo escolhido para construção entrará em serviço no início do próximo intervalo. Esta disposição poderia facilmente ser alterada assumindo-se intervalos entre decisões variáveis e períodos de maturação variáveis de acordo com a natureza do projeto.

Usinas hidroelétricas e barragens são componentes que exibem fortes economias de escala; valores apontados na literatura são respectivamente da ordem de 0.5 e 0.6. Por outro lado, projetos de irrigação por se constituírem de unidade modulares praticamente têm seu custo proporcional à capacidade. Este fato influi de maneira decisiva na formulação do modelo.

Para os componentes que exibem economias de escala o modelo oferece, em cada intervalo de tempo, algumas capacidades selecionadas externamente. A cada capacidade, em cada inter-

valo de tempo, é assinalada uma variável inteira com os únicos possíveis valores de zero e um.

O modelo seleciona o plano de investimentos escolhendo as obras a serem construídas fazendo os valores correspondentes das variáveis inteiras iguais a um. Para os componentes que não exibam economias de escala, a curva de custo é linear e a capacidade pode ser representada por uma variável contínua, em cada período.

III-2-1 — Glossário de Símbolos

Esta seção introduz os símbolos que serão utilizados na construção do modelo a seguir apresentado; sugere-se consultar a Figura 5 para acompanhar o significado de cada símbolo.

x_{1A}^t — variável inteira (0,1) associada com a primeira etapa da usina A no período t ; para melhor ilustrar as interdependências físicas entre os diferentes componentes a usina A pode ser construída em duas etapas. A variável t pode assumir valores de 1 até T , sendo T o horizonte de planejamento.

X_{2A}^t — conjunto de capacidades, definidas externamente ao modelo, possíveis para construção da primeira etapa da usina A; $i = 1, I_{1A}$, onde I_{1A} é o número dessas capacidades.

x_{2A}^t — variável inteira (0,1) associada com a segunda etapa da usina A no período t ;

X_{2A}^t — possíveis capacidades para a segunda etapa da usina A; $i = 1, I_{2A}$;

$x_{B_i}^t$ — variável inteira (0,1) associada com a construção da barragem B, com volume de armazenamento \underline{V}_{B_i} no período t ; $i = 1, I_B$, $t = 1, T$;

\underline{V}_{B_i} — possíveis volumes de armazenamento a serem construídos no local da barragem B;

$x_{C_i}^t$ — variável inteira (0,1) associada com a construção da barragem C, com volume de armazenamento \underline{V}_{C_i} no período t ; $i = 1, I_C$, $t = 1, T$;

\underline{V}_{C_i} — possíveis volumes de armazenamento a serem construídos no local da barragem C;

- $x_{D_1}^t$ — variável inteira (0,1) associada com a construção da barragem D, com volume de armazenamento V_{D_1} no período t; $i = 1, I_D, t = 1, T$;
- V_{D_1} — possíveis volumes de armazenamento a serem construídos no local da barragem D;
- $Q_{1A_1}^{11}$ — vazão necessária, durante a estação úmida, para gerar a energia correspondente à instalação da potência X_{1A_1} ;
- $Q_{2A_1}^{11}$ — idem, para o segundo estágio da usina A se a potência X_{2A_1} é instalada;
- $Q_{D_1}^{11}$ — idem, para usina D se a potência X_{D_1} é instalada;
- $Q_{1A_1}^s$ — vazão necessária, durante a estação seca, para gerar a energia correspondente à instalação da potência X_{1A_1} ;
- $Q_{2A_1}^s$ — idem, para o segundo estágio da usina A se a potência X_{2A_1} é instalada;
- $Q_{D_1}^s$ — idem, para usina D com capacidade instalada X_{D_1} ;
- Q_J^{st} — vazão turbinada na usina J, durante a estação seca, no período t;
- Q_K^{st} — idem, usina K;
- Q_J^{ut} — vazão turbinada na usina J, durante a estação úmida no período t;
- Q_K^{st} — idem, usina K;
- VJ_1^{st} — vazão no conduto número 1 da usina J, durante a estação seca, no período t;
- VA_1^{st} — idem, usina A;
- VJ_2^{st} — vazão no conduto número 2 da usina J, durante a estação seca, no período t;
- VA_2^{st} — idem, usina A;
- VJ_2^{ut} — vazão no conduto número 2 da usina J, durante a estação úmida, no período t;
- VA_2^{ut} — vazão no conduto número 2 da usina A, durante a estação úmida, no período t;
- V_1^t — volume armazenado no reservatório I, da estação seca à úmida, no período t;
- V_H^t — volume armazenado no reservatório H, da estação seca à úmida, no período t;
- V_H^{1t} — volume armazenado no reservatório H, da estação úmida à seca, no período t;
- V_I^{1t} — volume armazenado no reservatório I, da estação úmida à seca, no período t;
- Q_E^{st} — vazão suplementar de irrigação para o projeto E, na estação seca, durante o período t;
- Q_F^{st} — idem, projeto F;
- Q_G^{st} — idem, projeto G;
- Q_E^{ut} — vazão suplementar de irrigação para o projeto E, na estação úmida, durante o período t;
- Q_F^{ut} — idem, projeto F;
- Q_G^{ut} — idem, projeto G;
- X_J^t — energia anual gerada pela usina J, durante o período t;
- X_K^t — idem, usina K;
- Y_E^t — superfície irrigada do projeto E, durante o período t;
- Y_F^t — idem, projeto F;
- Y_G^t — idem, projeto G;
- r — taxa de desconto anual;
- D_B^t — fator de desconto para benefícios iniciando no período t;
- D_C^t — fator de desconto para custos incorridos no período t;
- K_{1A_1} — valor presente dos custos da primeira etapa da usina A com capacidade X_{1A_1} — valor presente é referido ao início do período da construção;
- K_{2A_1} — idem, segundo estágio da usina A com capacidade X_{2A_1} ;
- K_{D_1} — idem, usina D;
- K_{B_1} — valor presente dos custos da barragem B se o volume V_{B_1} estiver disponível; o valor presente é referido ao início do período da construção;

- K_{C1} — idem, barragem C;
- C_J — valor presente dos custos unitários de operação para a usina J; esse valor presente é referido ao início do período em consideração;
- C_K — idem, usina K;
- C_E — valor presente dos custos totais unitários para o projeto de irrigação E; o valor presente é referido ao início do período em consideração;
- C_F — idem, projeto F;
- C_G — idem, projeto G;
- B_{1A1} — valor presente (referido ao início do período de construção) dos benefícios líquidos para a primeira etapa da usina A com capacidade X_{1A1} ;
- B_{2A1} — idem, segunda etapa da usina A;
- B_{D1} — idem, usina D;
- B_E — valor presente dos benefícios por unidade de área irrigada para o projeto E (valor presente referido ao início do período em análise);
- B_F — idem, projeto F;
- B_G — idem, projeto G;
- I_1^s — valor esperado do insumo hidrológico no ponto 1 (ver Figura 4), durante a estação seca;
- I_1^u — idem, durante a estação úmida;
- $R(t)$ — demanda de energia elétrica a ser atendida no tempo t.

(um conjunto equivalente de símbolos é definido para o insumo hidrológico em cada um dos outros pontos assinalados na Figura 4).

Tôdas as grandezas presentes devem ser medidas em unidades consistentes; assim, por exemplo, se os deflúvios afluentes forem medidos em 10^6 m³/estação os volumes armazenados o serão em 10^6 m³.

III-2-2 — Equações de condição

Neste ponto é conveniente recapitular a estratégia do modelo. Componentes de 3 tipos diferentes estão presentes no modelo:

- a) Já construídos — são as usinas J e K e barragens H e I. Esses componentes já têm sua capacidade definida mas comparecem no modelo devido à possibilidade de alterar as regras de operação. Custos de manutenção de barragens são desprezados e aqueles associados com as usinas são considerados diretamente proporcionais à energia gerada. Por essa razão as variáveis de decisão associadas com essas obras são tratadas como contínuas;
- b) obras novas sem economias de escala — as variáveis de decisão associadas a essas obras são contínuas pois a relação custo x capacidade pode ser considerada linear;
- c) obras novas com economias de escala — estas exigem variáveis discretas; a cada local onde existam oportunidades de investimento e em cada período o modelo escolhe, entre o conjunto de capacidades que lhe foram oferecidas, aquelas que satisfazem as equações de condição e que proporcionem o ponto ótimo da função objetivo.

O primeiro conjunto de equações de condição diz respeito à não-negatividade de vazões nos trechos intermediários do modelo.

Por exemplo, imediatamente a jusante da barragem H o sistema perde o insumo número 3; é preciso então assegurar que a vazão no trecho do rio após essa perda continua sendo maior ou igual a zero,

$$I_2^s - (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^s \geq 0 \quad (\text{III-2})$$

$$I_2^u + (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^u \geq 0 \quad (\text{III-3})$$

$$t = 1, T$$

Da mesma maneira, imediatamente a jusante da derivação para a usina K,

$$I_2^s - (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^s + I_4^s - Q_{K^{st}} \geq 0 \quad (\text{III-4})$$

$$I_2^u + (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^u + I_4^u - Q_{K^{ut}} \geq 0 \quad (\text{III-5})$$

$$t = 1, T$$

Analogamente, a vazão desviada para o conduto forçado número 1 da usina J não pode ser maior do que aquela disponível imediatamente a montante.

$$I_2^s - (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^s + I_4^s + I_5^s - V_{J1^{st}} \geq 0 \quad (\text{III-6})$$

$$I_2^u + (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^u + I_4^u + I_5^u - VJ_1^{ut} \geq 0 \quad (III-7)$$

$$t = 1, T$$

Para o conduto número 2 da usina J escreve-se,

$$I_1^s - (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^s - VJ_2^{st} \geq 0 \quad (III-8)$$

$$I_1^u + (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^u - VJ_2^{ut} \geq 0 \quad (III-9)$$

$$t = 1, T$$

A vazão turbinada na usina J será,

$$Q_J^{st} = VJ_1^{st} + VJ_2^{st} \quad (III-10)$$

$$Q_J^{ut} = VJ_1^{ut} + VJ_2^{ut} \quad (III-11)$$

$$t = 1, T$$

Para a usina A, conduto número 1, a condição de continuidade escreve-se,

$$I_q^s + \sum_{i=1}^{I_B} x_{B_i}^t \underline{V}_{B_i} + I_9^s - VA_1^{st} \geq 0 \quad (III-12)$$

$$I_q^u + \sum_{i=1}^{I_B} x_{B_i}^t \underline{V}_{B_i} + I_9^u - VA_2^{ut} \geq 0 \quad (III-13)$$

$$t = 1, T$$

Idem, conduto número 2

$$I_2^s - (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^s + I_4^s + I_5^s + I_1^s - (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^s + I_7^s - VA_2^{st} \geq 0 \quad (III-14)$$

$$I_2^u + (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^u + I_4^u + I_5^u + I_1^u + (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^u + I_7^u - VA_2^{ut} \geq 0 \quad (III-15)$$

$$t = 1, T$$

A vazão total turbinada na usina A será:

$$\sum_{i=1}^{I_{1A}} x_{1A_i}^t Q_{1A_i}^s + \sum_{i=1}^{I_{2A}} x_{2A_i}^t Q_{2A_i}^s \leq VA_1^{st} + VA_2^{st} \quad (III-16)$$

$$\sum_{i=1}^{I_{1A}} x_{1A_i}^t Q_{1A_i}^u + \sum_{i=1}^{I_{2A}} x_{2A_i}^t Q_{2A_i}^u \leq VA_1^{ut} + VA_2^{ut} \quad (III-17)$$

$$t = 1, T$$

Para o projeto de irrigação E valem as seguintes equações de condição:

$$I_2^s - (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^s + I_4^s + I_5^s + I_1^s - (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^s + I_7^s + I_9^s + \sum_{i=1}^{I_B} x_{B_i}^t \underline{V}_{B_i} + I_B^s + I_{10}^s - Q_E^{st} \geq 0 \quad (III-18)$$

$$I_2^u + (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^u + I_4^u + I_5^u + I_1^u + (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^u + I_7^u + I_9^u - \sum_{i=1}^{I_B} x_{B_i}^t \underline{V}_{B_i} + I_B^u + I_{10}^u - Q_E^{ut} \geq 0 \quad (III-19)$$

$$t = 1, T$$

Para a usina D,

$$I_2^s - (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^s + I_4^s + I_5^s + I_1^s - (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^s + I_7^s + I_9^s + \sum_{i=1}^{I_B} x_{B_i}^t \underline{V}_{B_i} + I_B^s + I_{10}^s - Q_D^t - \sum_{i=1}^{I_D} x_{D_i}^t Q_{D_i}^s - Q_F^{st} \geq 0 \quad (III-20)$$

$$I_2^u + (\underline{V}_H'^t - \underline{V}_H''^t) - I_3^u + I_4^u + I_5^u + I_1^u + (\underline{V}_I'^t - \underline{V}_I''^t) + I_6^u + I_7^u + I_9^u - \sum_{i=1}^{I_B} x_{B_i}^t \underline{V}_{B_i} + I_B^u + I_{10}^u - Q_D^u - \sum_{i=1}^{I_D} x_{D_i}^t Q_{D_i}^u - Q_F^{ut} \geq 0 \quad (III-21)$$

$$t = 1, T$$

E, finalmente para o projeto de irrigação G,

$$Q_G^{st} \leq \sum_{i=1}^{I_D} x_{D_i}^t Q_{D_i}^s \quad (III-22)$$

$$Q_G^{ut} \leq \sum_{i=1}^{I_D} x_{D_i}^t Q_{D_i}^u \quad (III-23)$$

$$t = 1, T$$

Apesar da aparência impressionante é importante notar que as equações acima exprimem um só fato e muito simples: a condição de continuidade. A técnica de escrever essas equações reflete essa simplicidade: basta fazer uma contabilidade hídrica.

O segundo bloco de equações de condição dizem respeito ao atendimento de demanda de energia elétrica e escreve-se,

$$\alpha_K Q_K^{ut} + \alpha_J Q_J^{ut} + \sum_{i=1}^{I_{1A}} x_{1A_i}^t X_{1A_i} + \sum_{i=1}^{I_{2A}} x_{2A_i}^t X_{2A_i} + \sum_{i=1}^{I_D} x_{D_i}^t X_{D_i} \geq R(t) \quad (III-24)$$

$t = 1, T$

Essas últimas equações requerem vários esclarecimentos:

- α_K e α_J são os coeficientes tecnológicos que transformam vazão em energia gerada; as usinas J, K são bastante distanciadas das barragens e trabalham em condições de queda constante o que torna α_J e α_K constantes. Para as usinas A e C os valores de capacidade e vazão são relacionados externamente ao modelo.
- a forma da curva de demanda é imaterial; tudo o que se precisa conhecer é a demanda em alguns pontos localizados no eixo dos tempos. Esta é uma generalização importante sobre o primeiro modelo.
- o atendimento da demanda é exigido somente na estação úmida; para as usinas A e D as capacidades escolhidas externamente já são suficientes para atender a demanda sazonal de energia. Para as outras torna-se necessário incluir equações de condição relacionando as vazões turbinadas,

$$Q_J^{st} = 1.08 Q_J^{ut} \quad (III-25)$$

$$Q_K^{st} = 1.08 Q_K^{ut} \quad (III-26)$$

O coeficiente 1.08 atende a variação sazonal de demanda em energia elétrica já mencionada anteriormente.

O próximo conjunto de equações estabelece que a segunda etapa da usina A só poderá ser construída simultaneamente ou após a construção da primeira etapa,

$$\sum_{t=1}^{t'} \sum_{i=1}^{I_{2A}} x_{2A_i}^t \leq \sum_{t=1}^{t'} \sum_{i=1}^{I_{1A}} x_{1A_i}^t \quad (III-27)$$

$t' = 1, T$

As barragens H e I já estão com suas capacidades definidas e os volumes armazenados não podem exceder essas capacidades

$$V_H^{t'} - V_H^{t''} \leq V_{H_{max}} \quad (III-28)$$

$$-(V_H^{t'} - V_H^{t''}) \leq V_{H_{max}} \quad (III-29)$$

$$V_I^{t'} - V_I^{t''} \leq V_{I_{max}} \quad (III-30)$$

$$-(V_I^{t'} - V_I^{t''}) \leq V_{I_{max}} \quad (III-31)$$

$$t = 1, T$$

Analogamente a vazão máxima de engolimento da usina K já está fixada,

$$Q_K^{st} \leq Q_{K_{max}} \quad (III-32)$$

$$-Q_K^{ut} \leq Q_{K_{max}} \quad (III-33)$$

Da mesma maneira os condutos forçados que servem a usina J já estão em operação e têm uma capacidade máxima de engolimento,

$$VJ_1^{st} \leq VJ_{1_{max}} \quad (III-34)$$

$$VJ_1^{ut} \leq VJ_{1_{max}} \quad (III-35)$$

$$VJ_2^{st} \leq VJ_{2_{max}} \quad (III-36)$$

$$VJ_2^{ut} \leq VJ_{2_{max}} \quad (III-37)$$

$$t = 1, T$$

Como a estação chuvosa é aquela que dispõe de menores deflúvios afluentes torna-se necessário dispor de mais água suplementar de irrigação na estação úmida (aquela com maiores deflúvios). A relação entre as vazões suplementares de irrigação foi analisada em função das condições locais e concluiu-se que as seguintes relações devem vigorar,

$$Q_E^{ut} = 17.85 Q_E^{st} \quad (III-38)$$

$$Q_F^{ut} = 17.85 Q_F^{st} \quad (III-39)$$

$$Q_G^{ut} = 17.85 Q_G^{st} \quad (III-40)$$

$$t = 1, T$$

Por razões sociais, não é possível decrescer a quantidade de água suplementar de irrigação ao longo do horizonte de planejamento; este fato exige que

$$Q_E^{u(t-1)} \leq Q_E^{ut} \quad (III-41)$$

$$Q_F^u(t-1) \leq Q_F^{ut} \quad (\text{III-42})$$

$$Q_G^u(t-1) \leq Q_G^{ut} \quad (\text{III-43})$$

$$t = 2, T$$

Finalmente, torna-se necessário impor que um dado projeto não possa ser construído mais do que uma vez,

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{I_{1A}} x_{1A_i}^t \leq 1 \quad (\text{III-44})$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{I_{2A}} x_{2A_i}^t \leq 1 \quad (\text{III-45})$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{I_B} x_{B_i}^t \leq 1 \quad (\text{III-46})$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{I_C} x_{C_i}^t \leq 1 \quad (\text{III-47})$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{I_D} x_{D_i}^t \leq 1 \quad (\text{III-48})$$

A essas restrições juntam-se aquelas usuais desta classe de modelos: as variáveis de decisão inteiras são sujeitas a tomarem valores iguais a zero ou um exclusivamente e as contínuas variáveis maiores ou iguais a zero.

III-2-3 — Função Objetivo

O objetivo do modelo é procurar a estratégia que maximize o valor presente dos benefícios líquidos e atende à crescente demanda de energia elétrica.

O horizonte de planejamento é dividido em T intervalos cada um com n anos, isto é, o tempo coberto pelo processo de decisão é de nT anos. Decisões sobre agregação de capacidade serão tomadas no início de cada intervalo. Os custos incorridos por essa agregação são considerados concentrados no ponto médio do intervalo; os eventuais benefícios serão disponíveis a partir do início do intervalo seguinte. A Figura 6 ilustra esses detalhes.

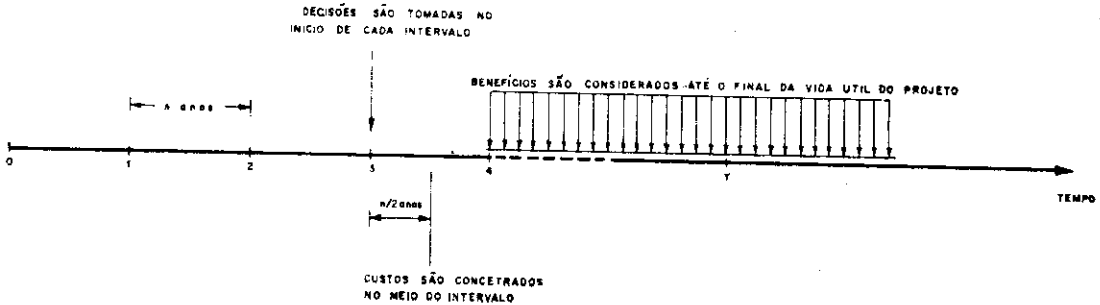


FIGURA 6 - DISPOSIÇÃO TEMPORAL DE CUSTOS E BENEFÍCIOS

Para escrever a função objetivo é conveniente analisar separadamente projetos representados por variáveis inteiras e contínuas.

Para os primeiros, seja para um projeto genérico,

B — valor presente dos benefícios líquidos referidos ao início do intervalo no qual a decisão é tomada;

K — custos do projeto;

$D_B^t = \frac{1}{(1+r)^{nt}}$ fator de desconto para os be-

nefícios, é usado para transladar benefícios até a origem de contagem do tempo;

$D_C^t = \frac{1}{(1+r)^{nt + \frac{n}{2}}}$ fator de desconto para os custos usado para computar o valor presente (até a origem dos tempos).

Em correspondência a esse projeto existirá um

térmo da forma

$$\sum_{t=1}^T x^t (D_B^t B - D_C^t K)$$

na função objetivo.

Para um projeto genérico representado por variáveis de decisão contínua seja,

b — valor presente (referido ao início do período no qual a decisão é tomada) do benefício unitário;

c — custo unitário;

X^t — capacidade agregada no período t;

O termo correspondente a esse projeto será:

$$\sum_{t=1}^T (D_B^t b - D_C^t c) (X^t - X^{t-1})$$

com a convenção adicional que $X^{t-1} = 0$ para $t = 1$.

A função objetivo por ser escrita como

$$M_{\max} \left\{ \begin{array}{l} \text{projetos } \sum A_1 A_2 B C D \left(\sum_{t=1}^T x^t (D_B^t B - \right. \\ \left. - D_C^t K) + \text{projetos E, F, G, H, I, J, K} \right. \\ \left. \left(\sum_{t=1}^T (D_B^t b - D_C^t c) (X^t - X^{t-1}) \right) \right\}$$

III-2-4 — Sumário

O modelo apresentado mostrou que problemas de expansão de capacidade incluindo componentes que exibam economias de escala, interdependências e até mesmo indivisibilidades podem ser equacionados com auxílio da programação linear mista com algumas variáveis restritas aos valores zero ou um. As vantagens desta formulação sobre a análise por componentes isolados são óbvias. E também, não menos óbvio, é o acréscimo em esforço que deve ser dispendido para equacionamento e solução do problema.

Este modelo poderia ser reformulado, à custa de maior sofisticação matemática, para incluir efeitos estocásticos devidos à condições futuras de demanda e insumos hidrológicos.

Diversas variantes do modelo acima descrito foram testadas utilizando-se um algoritmo preparado por Davis-Kendrick-Weitzman (16); o programa de computador para sua implementação foi preparado por Davis (17).

Os modelos testados tinham dimensões em torno de 210 variáveis contínuas, 24 variáveis inteiras e 170 equações. O computador usado foi um IBM 7044 do Harvard Computing Center. O tempo médio de cada processamento foi de 4 minutos. Problemas de convergência foram notados o que impossibilitou obtenção de valores numéricos para alguns dos casos testados.

IV — CONCLUSÕES

O advento de computadores digitais permitiu uma mudança radical nos métodos de análise de programas de investimentos. Esta mudança é claramente sentida quando os dois modelos aqui discutidos são comparados. Maior esforço no equacionamento e solução do modelo permite maior aproximação com a realidade física e econômica do sistema analisado.

O primeiro modelo apresentado pode ser classificado como um exemplo de análise clássica, isto é, análise feita individualmente para cada componente. O segundo modelo representa uma aplicação da metodologia da Análise de Sistemas a problemas semelhantes. Este último modelo poderia ser estendido para tratar de problemas dinâmicos (18) dos quais expansão de capacidade é apenas um caso particular. Neste ponto, uma advertência torna-se necessária. Se bem que a metodologia de Análise de Sistema possa parecer um processo matematicamente preciso e bem definido para definição e avaliação de programas de investimentos, ela ainda sofre de algumas restrições. Julgamento e intuição são usados na elaboração de modelos a este fato deve ser claramente apreciado quando da inspeção de resultados aparentemente exatos apresentados pelo computador.

Análise de Sistemas, pelo menos no estado atual da arte, tem a finalidade de ajudar o analista a identificar os melhores projetos de maneira tal que sua intuição e julgamento serão apoiados por essa metodologia. O objetivo da Análise de Sistemas é aguçar o julgamento e intuição e não é substituto para os mesmos.

REFERENCIAS

1. MARGLIN, S. — Public Investment Criteria, MIT Press, 1967.
2. RAIFFA — Preferences for Multi-Attributed alternatives — Marvard Business School, October, 1968.
3. ARROW, K. J. — Discounting and Public Investment Criteria in Water Research, Kneese and Smith, editors — The Johns Hopkins University Press, 1966.

4. THOMAS, H. A. — Capacity Expansion of Public Works, aula proferida no Curso 250 a — Design of Water Resources Systems, em Harvard University, 1967.
5. CHENERY, H. B. — Over-capacity and the acceleration Principles, *Econometrica*, volume 20, Number 1, January, 1952.
6. MANNE, A. — Capacity Expansion and Probabilistic Growth, *Econometrica*, volume 29, Number 4, 1961.
7. MANNE, A. (editor) — Investments for Capacity Expansion — The MIT Press, 1967.
8. MUHICH, A. J. — Capacity Expansion of Water Treatment Facilities — Ph.D. Dissertation, Harvard University, 1966.
9. ORLOB, G. & LINDORF, M. — Cost of Water Treatment in California — *Journal Awwa*, January, 1958.
10. GOMORY, R. E. — Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs, *Bulletin of the American Mathematical Society*, volume 64, 1958.
11. BALINSKY, M. L. — Integer Programming: Methods, Uses Computation — *Management Science*, volume 12, 1965.
12. GOMORY, R. E. — On the Relation between Integer and Non — Integer Solutions to Linear Programs, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, Volume 53, 1965.
13. OCHOA-ROSSO, F. — Applications of Discrete Optimization Techniques to Capital Investments and Network Synthesis Problems, Doctoral Dissertation, MIT, 1968.
14. KENDRICK, D. A. — Programming Investment in the Process Industries, MIT Press, 1967.
15. HERMANN, R. M. — Exploratory Integer Models for River-Basins — Master of Sciences Thesis, MIT, 1969.
16. DAVIS, R. D.; KENDRICK, D. A. & WEITZMAN, N. — A Branch and Bound Algorithm for (0-1) Mixed Integer Programming Problems — Center for International Affairs, Harvard University, 1967.
17. DAVIS, R. — Program Description for MFOR (0,1) MIP: A code for Zero-One Mixed Integer Programming Problems — Center for International Affairs, Harvard University, 1967.
18. MARGLIN, S. — Approaches to Dynamic Investments Planning North Holland Publishing Company, 1963.