

# **PROCESSO UNIFICADO PARA O ESTUDO DOS SISTEMAS CONTINUOS, SÓLIDOS E FLUIDOS**

por

**ALFREDO BANDINI**

Professor da Faculdade de Engenharia de Campinas, da Universidade Estadual de Campinas (SP). Consultor Técnico do DAEE do Estado de S. Paulo.

## **RESUMO**

Os meios contínuos elásticos, abrangem os sistemas sólidos e os fluidos.

Devido às características físicas diferentes, é uso processar, em forma separada e independente, a determinação das equações indefinidas do equilíbrio, dos corpos sólidos e, respectivamente, dos fluidos.

No presente trabalho, após uma síntese, sobre as condições de equilíbrio dos meios continuos, em geral, demonstramos que, as funções de integração obtidas para os corpos sólidos elásticos (equações de LAME) podem ser aplicadas aos fluidos, considerando, apenas, que o módulo de elasticidade tangencial  $G$  dos sólidos, é, sob o ponto de vista mecânico, equivalente à viscosidade  $\mu$  dos fluidos. O módulo  $G$  pode, portanto, ser substituído por  $\mu$ , uma vez que seja respeitada a homogeneidade dimensional das fórmulas.

Demonstra-se, outrossim, que as equações resultantes, satisfazem as chamadas hipótese de NAVIER.

Em sínteses, o estudo de qualquer sistema continuo, seja sólido seja fluido, pode ser unificado através da teoria geral da elasticidade.

Na presente memória, partindo das equações indefinidas — combinadas com as funções de integração — foram derivados os *princípios de BERNOULLI e das quantidades de movimento*, para o caso mais geral do fluido compressível em escoamento com regime variado.

Cabe-nos avisar que os *vectores* foram simbolizados, no texto, por letras **negritas**, e, nas figuras, por uma *setta*, que encima a própria letra.

# **UNIFIED PROCEEDING FOR THE STUDY OF SOLID OR FLUID CONTINUOUS SYSTEMS**

by

**ALFREDO BANDINI**

Professor, Faculty of Engineering of Campinas. State University of Campinas (SP) — Technical Adviser to the Water and Electric Power Board of S. Paulo's State.

## **SYNOPSIS**

The elastic continuous bodies, include the solid and fluid systems.

Because of different physical characteristics, the fluid and solid body equilibrium general equations, are usually determined through separate and independent proceedings.

In this note, it will be shown, after a synthesis about the continuous medium equilibrium conditions, that the functions of integration, obtained for elastic solid bodies (LAME's equations), may be applied to the fluid bodies, only considering that the solid tangential elasticity modulus  $G$  is equivalent, from the mechanical stand-point, to the fluid viscosity  $\mu$ .

Therefore we may substitute viscosity  $\mu$  for modulus  $G$ , since equation dimensional homogeneity is conserved.

Moreover, it is shown that the resulting equations, satisfy the so-called NAVIER'S hypotheses.

In conclusion, the study of either continuous system, solid or fluid body, may be unified through the general theory of elasticity.

In this note, starting with the differential equations of equilibrium combined with the integral functions, the *BERNOULLI's Theorem* and the *Momentum Theorem*, for unsteadily flowing compressible fluids, were obtained.

It should be noted that *vectors* are symbolized by **boldface** letters in the text and by a *dart* over the same letter in graphs.

## I — SISTEMAS CONTÍNUOS. GENERALIDADES.

I.1. — A Mecânica Racional define como sistema contínuo, um meio em que cada partícula, ou melhor, volume elementar, esteja em equilíbrio sob a ação das forças externas e internas, coincidindo, estas últimas, com a resultante das ações que as partículas circunvizinhas exercem sobre a superfície de contato, da partícula considerada.

Admite-se, outrossim, que as magnitudes físicas do meio e as forças atuantes, sejam funções contínuas das coordenadas do ponto em que atuam e que, os acréscimos infinitesimais das mesmas, possam ser expressos em função das derivadas primeiras, das referidas coordenadas.

I.2. — A Mecânica Racional, portanto, considera o volume elementar, como sendo uma individualidade física, perfeitamente definida, abs-traindo-se da composição molecular do meio.

Na realidade, conforme a teoria cinética molecular, as moléculas dos corpos estão sujeitas a movimento contínuo, cuja energia cinética depende da temperatura.

Nos corpos sólidos, as moléculas oscilam em torno de posições fixas; a amplitude das oscilações aumenta com a temperatura. Quando a temperatura supera certos limites, haverá troca de posição entre moléculas contíguas, as quais, não mais continuarão oscilando em torno de posições fixas; o corpo, então, não poderá ser mais considerado sólido.

Nos fluidos (líquidos e gases) o fenômeno de agitação molecular é mais intenso e, mesmo com baixas temperaturas, as moléculas deslocam-se no espaço, sem obedecer a normas ou esquemas estabelecidos. Por um volume elementar, cujas dimensões sejam da ordem de grandeza do caminho livre molecular, passarão, continuamente, moléculas diferentes.

Conclui-se que somente o volume elementar de um corpo sólido, tem, realmente, uma individualidade física; o mesmo não se podendo afirmar no que diz respeito aos fluidos.

I.3. — Visando aplicar aos fluidos os princípios gerais da Mecânica, que não podem ser equacionados para cada molécula, será mister interpretar os valores das magnitudes  $f$  consideradas, no estudo de um determinado fenômeno, como sendo valores médios, para intervalos de tempo pequenos e para volumes elementares, que constituam uma individualidade física. Esse volume elementar é, evidentemente, um valor limite, abaixo do qual, não existe uma correlação controlada, entre redução de volume e a correspondente diminuição de moléculas.

## I — CONTINUOUS SYSTEMS. GENERALITIES

I.1. — The Rational Mechanics defines continuous system, as a medium where every elementary volume, is in an equilibrium state, under external and internal forces. The latter identifying themselves with the resultant action of the surrounding particles, contacting each elementary volume.

Moreover physical magnitudes and acting forces must be continuous functions of the coordinates of the point where they act and their infinitesimal changes must be put into the equation through the first order derivatives of the coordinates.

I.2. — The Rational Mechanics thus considers elementar volume as a well defined physical individuality, without considering molecular medium composition.

According to molecular kinetic theory, constituent molecules are subjected to continuous motion, the kinetic energy of which depends upon the temperature.

As far as solid bodies are concerned, molecules oscillate about fixed positions; the amplitude of oscillation being dependent upon the temperature. When the temperature exceeds certain limits, it causes changes of position among adjacent particles, such that they no longer oscillate about fixed points; then the body can no longer be considered as a solid body.

As far fluids — both liquids and gases — molecular agitation phenomenon is more intensive and, even at low temperatures, molecules shift their place in the space, without obeying established rules or schemes. Different molecules will incessantly go through an elemental volume, the sizes of which may be as long as the molecular free path.

It is concluded that only the elemental volume of a solid body has an actual physical individuality; the same should not be said where fluids are concerned.

I.3. — To apply general principles of Mechanics — which cannot be put into equation for single molecules — to fluid bodies, the values of each magnitude  $f$ , considered to study a specific phenomenon, are to be interpreted as average values, within short spaces of time and infinitesimal elements of volume identified with a physical individuality. The volume element is evidently a limiting value, under which there is no controlled rate, between volume decreasing and correspondent molecule reduction.

O valor médio da função  $f$  no intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , identifica-se, pois, com:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta \tau} = \frac{df}{d\tau} \quad (1)$$

sendo  $\Delta f$  o valor da própria função, no volume finito  $\Delta\tau$ . Assim, por exemplo, fazendo-se coincidir  $f$ , com o peso  $G$  ou com a massa  $M$ , os referidos limites representarão, respectivamente, o peso específico  $\gamma$  e a densidade  $\rho$ .

Outrossim, o valor médio definido pela (1), poderá representar a magnitude, em um ponto  $P$  contido em  $d\tau$ ; será portanto, uma função continua das coordenadas do ponto, e as suas variações serão funções contínuas, das derivadas das mesmas coordenadas.

Por outra parte, as considerações feitas para as magnitudes físicas, podem ser extendidas às forças, externas e internas, aplicadas ao volume  $d\tau$ . Também as forças serão funções contínuas e deriváveis das coordenadas do ponto.

Ficam, portanto, satisfeitas, também para os fluidos, as condições analíticas, indicadas no ITEM I.1.

I.4. — O volume elementar de um corpo sólido, não submetido a forças, apresenta uma configuração natural, *definida* e *estável*, chamada usualmente *estado neutro*. Ao referido estado, faz-se referência, para objetivar configurações alteradas, devido à aplicação de forças.

Para os fluidos, entretanto, não é possível estabelecer um *estado neutro*, pois a configuração molecular do volume elementar, sofre variações, nos sucessivos intervalos de tempo  $dt$  e não haverá, portanto, uma configuração de referência, mesmo considerando a condição de repouso. De fato, se um fluido entra em escoamento, e, após um certo período de tempo, volta a parar, as configurações moleculares, respectivamente, anterior e posterior ao movimento, não terão qualquer correlação entre si, sendo completamente diferentes.

### I.5. — ESFORÇOS OU TENSOES SIMBOLOGIA CONVENCIONAL

I.5.1. — Esforço ou tensão  $p$ , sobre uma porção de superfície  $\Delta\sigma$  — que limita um volume  $\Delta\tau$  de meio contínuo — é o valor unitário, isto é, por unidade de superfície, do vetor  $\Delta E$ , resultante das forças internas (ações das partículas circunvizinhas), que agem sobre  $\Delta\sigma$ . Vizando considerar a variação de  $p$  sobre  $\Delta\sigma$ , escrevemos, em virtude da (1):

Then the average value of the function  $f$ , in infinitesimal time  $dt$ , reduces to

$\Delta f$  being the value of the function itself, within the definite volume  $\Delta\tau$ . Thus, if function  $f$  corresponds for instance, to weight  $G$  or mass  $M$ , the limit (1) will respectively represent, the specific weight  $\gamma$  or the density  $\rho$  of the body.

Moreover, the average value given by eq. (1), will represent the magnitude at a point  $P$ , contained in  $d\tau$ ; it is thus, a continuous function of the point coordinates and its variations are continuous functions of the same coordinates derivatives.

On the other hand, the considerations about physical magnitudes, may be applied to internal and external forces acting on the volume  $d\tau$ . Also the forces will be continuous and derivable functions of the point coordinates.

The analytical conditions shown in ITEM I.1 are therefore also satisfied in the case of fluid bodies.

I.4. — A solid body volume element with no force acting, shows a *natural* and *steady* configuration usually called *neutral state*, to which we shall always refer when configurations are modified because of acting forces.

Fluid body *neutral state* cannot be established, since volume element molecular configuration is altered through the successive time spaces  $dt$ . There will be no reference configuration even if a steady condition is considered. As a matter of fact, when a fluid goes into motion and then back into rest again, after a time space, the *molecular configurations before and after motion*, will have no natural relation to each other, because they are *quite different*.

### I.5. ... STRESS CONVENTIONAL SYMBOLIC

I.5.1. — Stress  $p$  on the portion of surface  $\Delta\sigma$  — limiting a volume  $\Delta\tau$  of the continuum — is the unitary value — viz for unit of area — of the vector  $\Delta E$ , resultant of the internal forces, due to the surrounding medium, acting on  $\Delta\tau$ . Considering the variation of  $p$  on  $\Delta\sigma$ , by virtue of (1), we have

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{E}}{\Delta\sigma} = \frac{d\mathbf{E}}{d\sigma} \quad (2)$$

Ou, também:

$$\mathbf{E} = \int_{\sigma} \mathbf{p} d\sigma \quad (2')$$

A superfície infinitesimal  $d\sigma$ , limita um volume infinitesimal  $d\tau$ . É uso chamar o símbolo  $\mathbf{E}$  de empuxo.

The infinitesimal surface  $d\sigma$  is the boundary of an infinitesimal volume  $d\tau$ . Symbol  $\mathbf{E}$  is usually called internal force.

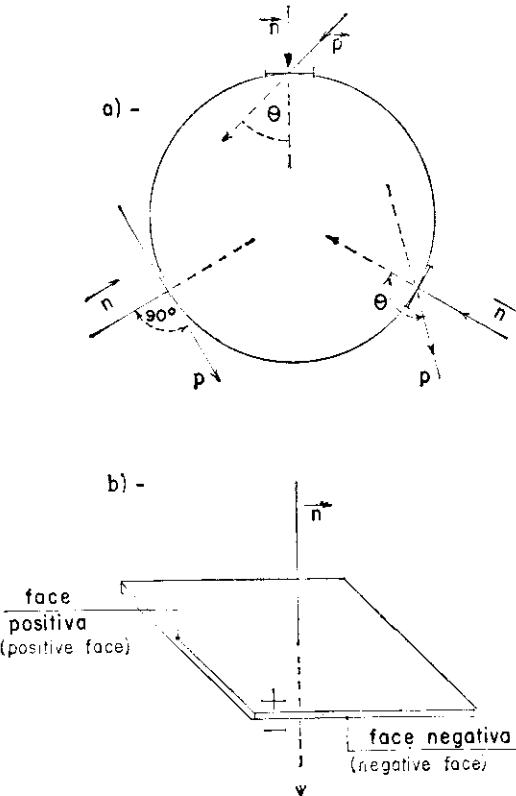


FIGURA N.º 1

I.5.2. — Os esforços podem ser de compressão, tração ou tangenciais, conforme tendam a comprimir, tracionar uma determinada partícula, ou, porventura, sejam tangentes à superfície que a limita. Uma vez fixada a direção positiva da normal  $\mathbf{n}$ , a um elemento de superfície  $d\sigma$ , sobre o qual age o esforço  $\mathbf{p}$ , formando o ângulo  $\theta$  com  $\mathbf{n}$ , será, justamente, a componente normal:

$$p_n = \mathbf{p} \times \mathbf{n} = p \cos \theta \quad (3)$$

que estabelecerá a categoria, em que, o esforço  $\mathbf{p}$  deve ser classificado. Para os sistemas contínuos fluidos (FIGURA N.º 1a) considera-se o vetor  $\mathbf{n}$  positivo, quando dirigido para o interior (*normal interna*) do volume  $\tau$ , por exemplo uma esfera, limitado pela superfície  $\sigma$ ; ter-se-á, então (QUADRO N.º 1), esforço de compressão, tangencial, ou de tração, conforme, respectivamente:

I.5.2. — A stress on a certain particle, may be classified as pressure when it compresses, tension when it stretches or shear stress, when the stress is tangent to its boundary surface. Since the positive direction of the normal  $\mathbf{n}$  to an element of surface  $d\sigma$  — on which stress  $\mathbf{p}$  is acting — is fixed and  $\theta$  being the angle between  $\mathbf{n}$  and  $\mathbf{p}$ , the normal component

will establish the classification of the stress  $\mathbf{p}$ . If the continuum is a fluid (FIGURA No. 1a) the vector  $\mathbf{n}$  is taken as positive when directed into the volume  $\tau$  (for instance a sphere), limited by the surface  $\sigma$  (*normal directed inward*). Then, as shown in TABLE No. 1, there will be pressure, shear or a stretching stress, according to

$$p_n \leq 0 \quad (3')$$

No caso dos sistemas elásticos sólidos, entretanto, toma-se, convencionalmente, positiva a

In the case of solid elastic bodies, the *normal*

QUADRO (TABLE) N. 1

$p$	$\cos \theta$	$p_n$
esforço de compressão (pressure)	+	+
esforço de tração (tension, stretching stress)	-	-
esforço tangencial (shear stress)	0	0

*normal externa*, e, portanto, a condição (3'), torna-se:

*normal directed outward* is taken as positive; therefore condition (3') becomes

$$p_n \geq 0 \quad (3'')$$

Diremos, outrossim, que a normal orientada  $\mathbf{n}$ , entra pela face positiva e sai pela face negativa, da superfície  $\sigma$  (FIGURA N.º 1b).

Observando, finalmente, que as ações mútuas de dois pontos materiais, logo, em particular, as ações moleculares, seguem o princípio da reação, igual e oposta à ação, consegue-se, em virtude da definição de esforço, que os esforços correspondentes às faces opostas, de um mesmo elemento, são iguais e contrários.

I.5.3. — Indicaremos por  $\mathbf{p}_n$ , o vetor que representa um esforço, aplicado sobre a face positiva de uma superfície plana  $\pi_{yz}$ , normal ao eixo  $x$ , isto é, paralela ao plano cartesiano  $yOz$  (ver FIGURA N.º 2). A componente de  $\mathbf{p}_n$ , na direção do eixo  $x$ , isto é:

$$p_{nx} = x_A - x_B \quad (4)$$

é normal ao plano  $\pi_{yz}$ , em quanto as componentes:

will be normal to the plane  $\pi_{yz}$ , while the components

$$p_{ny} = y_A - y_B \quad (5)$$

$$p_{nz} = z_B - z_A \quad (6)$$

agem tangencialmente ao referido plano.

act tangentially on said plane.

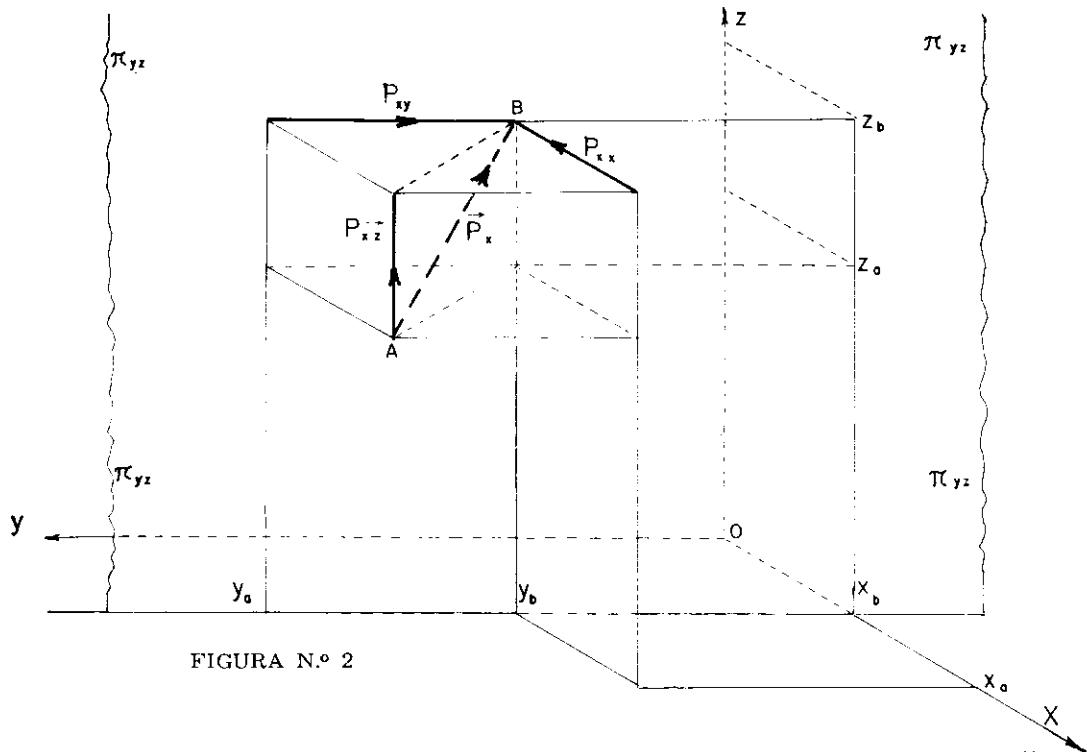


FIGURA N.<sup>o</sup> 2

Analogamente,  $\mathbf{p}_y$  e  $\mathbf{p}_z$ , são vetores aplicados, respectivamente, sobre as faces positivas dos planos, normais aos eixos  $y$  e  $z$ . O QUADRO N.<sup>o</sup> 2, reúne os símbolos dos vetores e das relativas componentes (notação de KIRCHHOFF).

Índices iguais, indicam *componente normal*

Similarly, vectors  $\mathbf{p}_y$  and  $\mathbf{p}_z$ , act on positive faces of planes, normal to the axes  $y$  and  $z$  respectively. Vectors and their components are gathered in TABLE No. 2 (KIRCHHOFF's notations).

Equal indexes indicate *normal component*

QUADRO (PROSPECT) N. 2

Esforços (Stresses)	Componentes nas direções dos eixos cartesianos (components parallel to the cartesian axes)		
	$x$	$y$	$z$
$\mathbf{p}_x$	$p_{xx}$	$p_{xy}$	$p_{xz}$
$\mathbf{p}_y$	$p_{yx}$	$p_{yy}$	$p_{yz}$
$\mathbf{p}_z$	$p_{zx}$	$p_{zy}$	$p_{zz}$

tendo a direção do eixo carteziano do mesmo nome. Índices diferentes, indicam *componentes tangenciais*. O primeiro índice corresponde ao eixo, ao qual o plano é normal; o segundo índice, entretanto, indica o eixo, ao qual a componente é paralela.

in the direction of Cartesian axis of the same name. Different indexes show *tangential components*. The first index indicates the axis to which the plane is normal; the second index indicates the axis to which the component is parallel.

## II. — SÍNTSE Sobre AS CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO DOS SISTEMAS CONTÍNUOS

### II.1. — EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO INTERNO

II.1.1. — Considera-se um paralelepípedo elemental (FIGURA N.<sup>o</sup> 3), cujas arestas,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , são paralelas aos eixos cartesianos.

Sendo  $\rho$  a densidade, o volume e a massa do paralelepípedo, serão, respectivamente:

$$d\tau = dx dy dz \quad (7)$$

$$dm = \rho d\tau \quad (8)$$

Indicamos, respectivamente, por:

$$\mathbf{F} = X \cdot \mathbf{i} + Y \cdot \mathbf{j} + Z \cdot \mathbf{k} \quad (9)$$

$$\mathbf{A} = A_x \cdot \mathbf{i} + A_y \cdot \mathbf{j} + A_z \cdot \mathbf{k} \quad (10)$$

as forças de massa e as forças de inércia (que se anulam se o meio estiver em repouso), divididas pela massa  $dm$ , isto é, pela unidade de massa. Os vetores  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , são vetores de módulo unitário, orientados na direção dos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Sobre as faces do paralelepípedo, atuam os esforços, indicados na FIGURA N.<sup>o</sup> 3. Cabe salientar, que são considerados *positivos*, os esforços aplicados sobre a face do paralelepípedo, cuja

## II. — SYNTHESIS ABOUT THE EQUILIBRIUM CONDITIONS OF THE CONTINUUM

### II.1. — INTERNAL EQUILIBRIUM EQUATIONS

II.1.1. — Consider an elemental parallelepipedon (FIGURE No. 3), the sides of which  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , are parallel to the Cartesian axes.

Call  $\rho$  the density. The parallelepipedon volume and mass will be, respectively,

Respectively, define

$$\mathbf{F} = X \cdot \mathbf{i} + Y \cdot \mathbf{j} + Z \cdot \mathbf{k} \quad (9)$$

$$\mathbf{A} = A_x \cdot \mathbf{i} + A_y \cdot \mathbf{j} + A_z \cdot \mathbf{k} \quad (10)$$

as the mass force and the inertial force (the magnitude being zero when the continuum is at rest) per unit of mass. Vectors  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$ , are unit vectors, orientated in the direction of Cartesian axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectively.

The stresses acting on the faces of the parallelepipedon, are shown in FIGURE No. 3. It should be emphasized that the stresses are considered as *positive*, when acting on the paral-

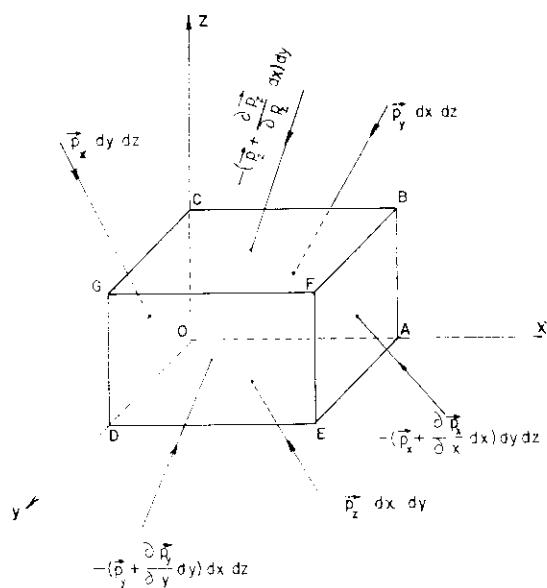


FIGURA N.<sup>o</sup> 3

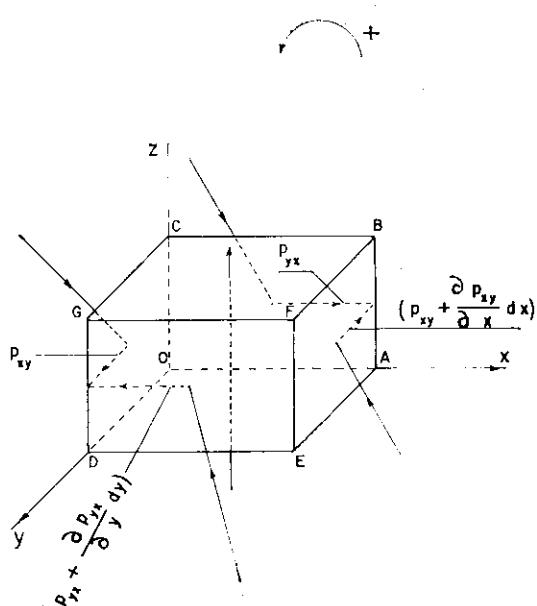


FIGURA N.<sup>o</sup> 4

normal interna, tenha a mesma direção e o mesmo sentido do eixo coordenado, perpendicular à própria face.

Assim, por exemplo, considerando (FIGURA N.<sup>o</sup> 3) as faces perpendiculares ao eixo  $x$ , vemos que o esforço é positivo sobre a face  $OCGD$  e negativo sobre a face  $ABFE$ .

As equações de *equilíbrio interno*, ou *indefinidas*, são obtidas, aplicando o 1.<sup>o</sup> e o 2.<sup>o</sup> princípio da Estática.

II.1.2. — Em virtude do 1.<sup>o</sup> princípio da Estática, a resultante das forças aplicadas, deve ser nula. Recordando então o paradoxo D'ALEMBERT, ter-se-á (ver APÊNDICE, ITEM A.1.1.):

$$\rho (\mathbf{F} - \mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \quad (11)$$

A expressão (11), que equaciona a 1.<sup>a</sup> condição do equilíbrio dinâmico, projetada nas direções de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , levando em consideração o QUADRO N.<sup>o</sup> 2, da:

$$\begin{aligned} \rho (X - A_x) &= \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \\ \rho (Y - A_y) &= \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \\ \rho (Z - A_z) &= \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (12)$$

II.1.3. — Em virtude do 2.<sup>o</sup> princípio da Estática, deve ser nula a resultante dos momentos, de todas as forças aplicadas, em relação a um eixo que passa pelo centro do paralelepípedo.

Uma vez que são nulos os momentos das forças de massa, das forças de inércia e das componentes dos empuxos, paralelas ou normais ao eixo considerado, calculando-se os momentos, respectivamente, em relação a 3 eixos, paralelos aos eixos coordenados  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , obtém-se (ver APÊNDICE, ITEM A.1.2.):

$$p_{yz} = p_{zy} \quad (13)$$

$$p_{xz} = p_{zx} \quad (14)$$

$$p_{xy} = p_{yx} \quad (15)$$

Como se sabe, as (13), (14), (15), podem ser sintetizadas na equação vetorial:

lelepedon face, having the normal directed inward in the same direction and orientation as the coordinate axis.

As an example (FIGURE N. 3), if faces perpendicular to the axis  $x$  are considered, stresses acting on the face  $OCGD$  are positive while acting on the face  $ABFE$  are negative.

*Internal equilibrium or indefinite equations*, are obtained applying the 1st and the 2nd principle of the Statics.

II.1.2. — By virtue of the 1st principle of the Statics, the resultant of all acting forces, must be equal to zero. Then, recalling D'ALEMBERT'S principle, it will be (see APPENDIX, ITEM A.1.1.):

$$\rho (\mathbf{F} - \mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \quad (11)$$

Eq. (11) represents the first condition of dynamic equilibrium; projecting the vectorial equation (11) in the direction of  $x$ ,  $y$ ,  $z$  and utilizing TABLE No. 2, we have

II.1.3. — By virtue of the second principle of the Statics, the resultant of all acting moments about whatever parallelepiped centerline, must be equal to zero.

The moments of the external forces (mass and inertial forces) plus the internal force components, parallel or perpendicular to said centerline, are equal to zero. Then if the moments about three centerlines, parallel to coordinate axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , are calculated we obtain (see APPENDIX, ITEM A.1.2.).

As is known, eqs. (13), (14) and (15) may be synthesized into the vectorial equation

$$(\mathbf{p}_x \wedge \mathbf{i}) + (\mathbf{p}_y \wedge \mathbf{j}) + (\mathbf{p}_z \wedge \mathbf{k}) = 0 \quad (16)$$

que representa, justamente, a 2.<sup>a</sup> condição do equilíbrio interno.

A FIGURA N.<sup>o</sup> 4, por exemplo, considera o caso em que, o eixo é paralelo a z.

II.1.4. — As componentes (13), (14) e (15), agem tangencialmente, nos respectivos planos, em que se situam; são chamados *parâmetros tangenciais* dos esforços, e são adotados, em geral, os símbolos convencionais:

$$p_{xy} = p_{yx} = T_z \quad (17)$$

$$p_{xz} = p_{zx} = T_y \quad (18)$$

$$p_{yz} = p_{zy} = T_x \quad (19)$$

o índice da letra *T*, indicando o eixo carteziano, perpendicular ao plano que contém as duas componentes iguais.

Entretanto, as componentes, tendo índices iguais (ver QUADRO N.<sup>o</sup> 1), são chamadas *parâmetros normais* e representadas pelos símbolos:

$$p_{yy} = N_y \quad (20)$$

$$p_{xx} = N_x \quad (20)$$

$$p_{zz} = N_z \quad (20)$$

A substituição das (17), (18), (19), (20), nas equações (12), reduz de 9 para 6, as variáveis que dependem dos empuxos; podemos de fato escrever:

$$\begin{aligned} \rho (X - A_x) &= \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} \\ \rho (Y - A_y) &= \frac{\partial T_z}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial z} \\ \rho (Z - A_z) &= \frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (21)$$

## II.2. — EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO AO REDOR DE UM PONTO

II.2.1. — Consideremos um tetraedro elemental (FIGURA N.<sup>o</sup> 5), em movimento, constituído de três faces, paralelas aos planos coordenados cartezianos, tendo o vértice comum *O*, e de um elemento diferencial de superfície  $da = ABC$ , considerado plano, uma vez que se supõe que, na superfície, não há discontinuidade da 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> ordem. Sobre as faces *OBC*, *OAC* e *OAB*, de área  $da_x$ ,  $da_y$ ,  $da_z$ , agem os esforços  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ . Sobre a face *ABC*, de área  $da$  —

which is just the 2nd condition of internal equilibrium.

FIGURE No. 4, for instance, is relevant to the case when the centerline is parallel to the z axis.

II.1.4. — Components (13), (14) and (15), act tangentially on the planes where they lie and are called *tangential stress parameters*. The following conventional symbols are used

where *T* subindex shows the Cartesian axis, perpendicular to the plane where two equal components are situated.

Meanwhile, equal subindex components (see TABLE No. 1) are called *normal parameters* and are represented by the symbols

Combining eqs. (17), (18), (19), (20), and equations (12), reduces the variables depending on internal forces, from 9 to 6. In fact, it can be written

## II.2. — EQUILIBRIUM EQUATIONS ABOUT A POINT

II.2.1. — Consider an elemental tetrahedron in motion (FIGURE No. 5), formed by three faces, parallel to the coordinate Cartesian planes having common vertex in point *O* and by an infinitesimal surface element  $da = ABC$ , assumed to be plain, since no 1st and 2nd order discontinuities are encountered on the proper surface. Stresses acting on the faces *OBC*, *OAC* and *OAB*, having area  $da_x$ ,  $da_y$ ,  $da_z$ , are  $p_x$ ,  $p_y$  and  $p_z$ . Stress acting on the face *ABC*, having

cujas orientações são definidas pelos cosenos diretores  $\cos nx$ ,  $\cos ny$ ,  $\cos nz$ , da normal  $\mathbf{n}$ , dirigida para o interior do tetraedro — age o esforço:

$$\sigma = i \cdot \sigma_x + j \cdot \sigma_y + k \cdot \sigma_z$$

As fórcas de massa e de inércia, aplicadas ao volume  $d\tau$  do tetraedro, são diferenciais da 3.<sup>a</sup> ordem, e, portanto, desprezíveis em relação aos empuxos que agem sobre as quatro faces e são diferenciais da 2.<sup>a</sup> ordem.

area  $da$  — such that the orientation is defined by the inward-drawn normal  $\mathbf{n}$  directive cosines — is

Mass force and inertial force acting on the tetrahedron volume  $d\tau$ , are 3rd order differentials and, therefore, negligible with respect to internal forces acting on the four faces, which are 2nd order differentials.

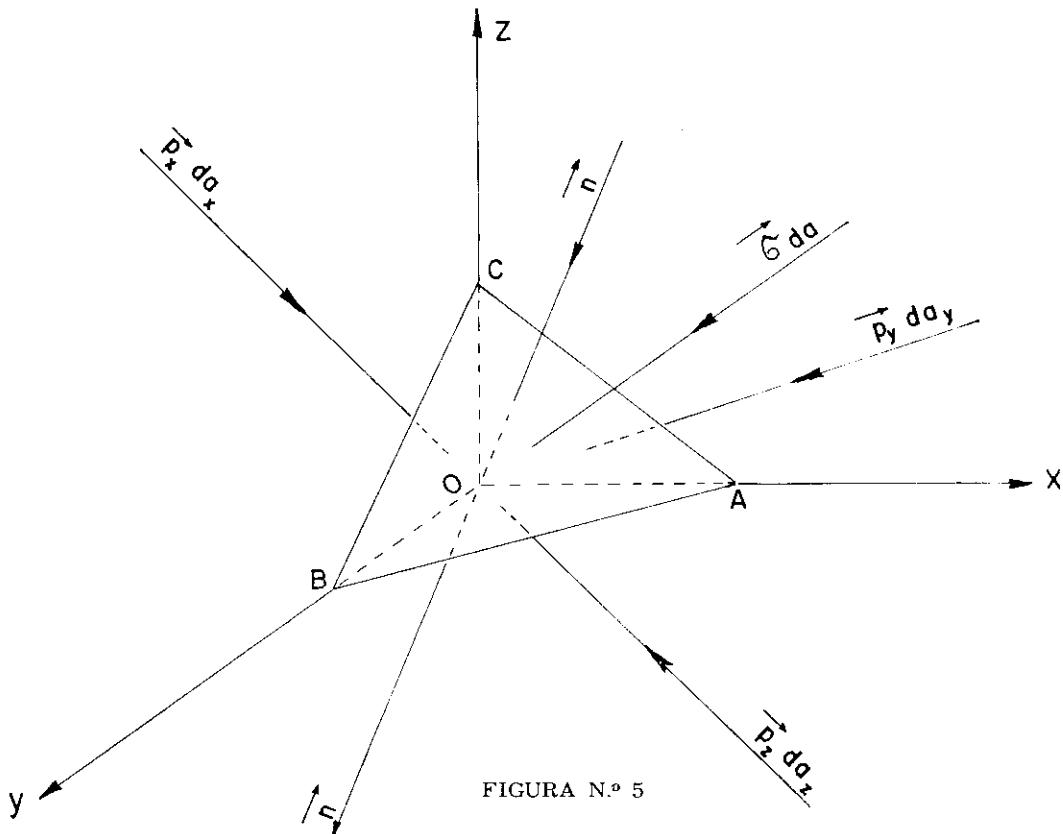


FIGURA N.º 5

II.2.2. — Aplicando a 1.<sup>a</sup> equação da Estática obtém-se a condição de equilíbrio do tetraedro, pela equação (ver APÊNDICE, ITEM A.1.3.):

$$\sigma = p_x \cos \hat{n}x + p_y \cos \hat{n}y + p_z \cos \hat{n}z \quad (22)$$

Projetando na direção dos eixos coordenados, recordando o QUADRO N.º 1 e as expressões (17), (18), (19) e (20), temos:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= N_x \cos \hat{n}x + T_z \cos \hat{n}y + T_y \cos \hat{n}z \\ \sigma_y &= T_z \cos \hat{n}x + N_y \cos \hat{n}y + T_x \cos \hat{n}z \\ \sigma_z &= T_y \cos \hat{n}x + T_x \cos \hat{n}y + N_z \cos \hat{n}z \end{aligned} \quad (22')$$

As equações (22) e (22') consubstanciam o teorema do tetraedro ou de CAUCHY, e são válidas para qualquer ponto, no interior do meio

II.2.2. — Applying the 1st equation of Statics, yields the tetrahedron equilibrium condition, through the equation (see APPENDIX, ITEM A.1.3)

Projecting in the direction of the coordinate axes and utilizing both TABLE No. 1 and eqs. (17), (18), (19) and (20), we obtain

Eqs. (22) and (22') consubstantiate tetrahedron or CAUCHY's theorem and are valid in all points of the continuum; tetrahedron being

contínuo, podendo estar situado, o tetraedro, em qualquer dos trihedros, determinados pelos planos coordenados. Essas equações, permitem calcular o esforço, sobre a superfície genérica  $da$ , como função linear dos esforços  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  — que agem sobre faces do tetraedro ou do paralelepípedo (Item II.2.1) — e são válidas, em particular, para superfícies *limites*. Isto é, para elementos da superfície que limita um certo volume  $\tau$  do meio contínuo, estando sujeita as ações externas. Por esse motivo, as equações (22) e (22') são chamadas, também, *equações de equilíbrio do contorno*.

### II.3. — CONSIDERAÇÕES

II.3.1. — Observamos, em primeiro lugar, que no caso em que o sistema contínuo esteja em repouso, nas equações (11), (12) e (21), deverá ser posto, respectivamente:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 0 \\ A_x = A_y = A_z &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

A fórmula de CAUCHY (22), (22'), entretanto, apresenta-se na mesma forma, quer o meio esteja em movimento ou não.

II.3.2. — O sistema de três equações indefinidas (21), combinado com o sistema de três equações finitas (22'), não é suficiente para determinar os esforços normais  $N_i$  e os tangenciais  $T_i$ , pois que, para integrar as equações diferenciais, precisamos de *funções de integração* que ainda desconhecemos.

Para cadaas ternos de  $N_i$  e  $T_i$  ( $i = x, y, z$ ), poderiam estabelecer-se infinitas funções  $f(x, y, z)$ , que satisfaçam as condições de equilíbrio mecânico em todos os pontos do volume  $\tau$  (interior e superfície limite), submetidos a forças de massa e de inércia. Para achar a solução real do problema, será preciso relacionar os esforços  $N_i$  e  $T_i$ , com as deformações que o volume sofre, em virtude dos mesmos; as referidas relações constituem, justamente, as *funções de integração* procuradas.

## III — RELAÇÕES ENTRE ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES, NOS SISTEMAS CONTÍNUOS CONFORME A TEORIA GERAL DA ELASTICIDADE. FUNÇÕES DE INTEGRAÇÃO

### III.1. — DESLOCAMENTOS E DEFORMAÇÕES

III.1.1. — Consideremos, um sistema contínuo elástico que, não submetido a forças, apresenta (I.4) uma configuração definida e es-

table to lie in everyone of the trihedra formed by coordinate planes.

Those equations allow us to calculate stress  $\sigma$  on a generical surface  $da$ , as a lineal function of the stresses  $p_x$ ,  $p_y$  and  $p_z$  — acting on a tetrahedron or parallelepipedon faces — and are valid in particular on *boundary* surfaces, that is on elements of surface, limiting a continuum volume  $\tau$  under external actions. Therefore equations (22) and (22') are called also *boundary equilibrium equations*.

### II.3. — CONSIDERATIONS

II.3.1. — It is first observed that, if the continuum is at rest, it should be considered in eqs. (11), (12) and (21), that

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 0 \\ A_x = A_y = A_z &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

CAUCHY's formula, meanwhile, suffers *no change* whether the continuum is or is not in motion.

II.3.2. — The indefinite eqs. (22) system, combined with the system of finite equations (22'), is not sufficient to determine normal stresses  $N_i$  and shearing stresses  $T_i$ ; whereas *integration functions*, not yet known, are required to integrate the differential equations.

Whatever groups of  $N_i$  and  $T_i$  ( $i = x, y, z$ ) are taken, infinite functions  $f(x, y, z)$  can be established that satisfy mechanical equilibrium in each point of a volume  $\tau$  (both internal part and boundary surface), where mass forces and inertial forces act. In order to find the solution to the problem, the stresses  $N_i$  and  $T_i$  are to be related to the deformations altering the volume  $\tau$ , by virtue of stresses themselves; the resulting equations are just the sought *functions of integration*.

## III. — RELATIONS BETWEEN STRESSES AND DEFORMATIONS IN A CONTINUUM ACCORDING TO THE GENERAL THEORY OF THE ELASTICITY. FUNCTIONS OF INTEGRATION

### III.1. — DISPLACEMENTS AND DEFORMATIONS

III.1.1. — Consider an elastic continuum which, no forces acting, shows (I.4) a definite and steady configuration (neutral state), na-

tável (estado neutro), isto é, um sistema contínuo, com as características dos *corpos sólidos*. Fixemos um estado inicial do corpo, ao qual são referidos, esforços e deformações. Esse estado pode ser identificado com um estado neutro que considera, apenas, os esforços e as deformações que se produzem, a partir do mesmo, prescindindo daqueles anteriores, responsáveis, aliás, pelo próprio estado inicial. É lícito, então, aplicar, ao referido sistema, os princípios admitidos pela *teoria geral da elasticidade*.

### III.1.2. — DESLOCAMENTOS

Considere-se um elemento de volume  $\tau$ , em um meio contínuo. Devido às forças aplicadas, o volume deforma-se; um ponto genérico  $P$ , passa para a posição  $P_1$ , sofrendo um *deslocamento*, cujas componentes nas direções dos eixos coordenados chamaremos  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ .

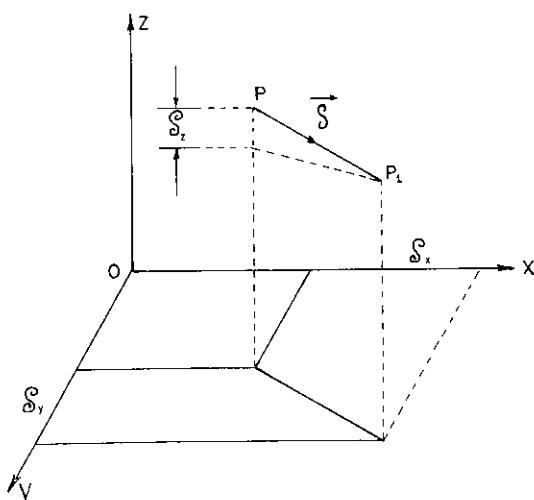


FIGURA N.º 6

mely a continuum having *solid body* characteristics. Fix a body in a certain state, to which stresses and deformations are applied. That state may be identified with a neutral state, which considers only stresses and deformations that perform beginning from said state and disregarding the foregoing stresses and strains, responsible for the proper neutral state. Then, the principles of the *general theory of elasticity* may be applied to that system.

### III.1.2. — DISPLACEMENTS

Consider an element of volume  $\tau$  in a continuum. Because of the acting forces, the volume is distorted; a generical point  $P$  goes for a position  $P_1$  having a displacement  $\delta$  (FIGURE No. 6), the components of which, in the direction of coordinate axes, will be called  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ .

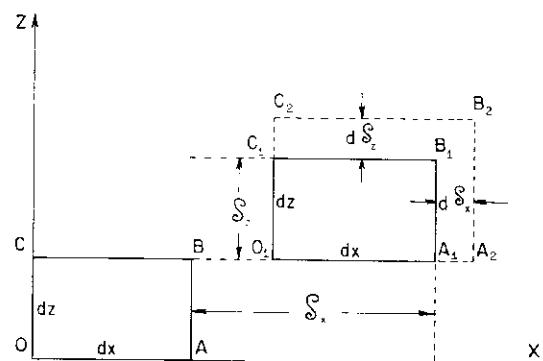


FIGURA N.º 7

Admite-se, enquanto não seja estabelecido, de um modo explícito, o contrário, que os deslocamentos sejam funções, contínuas e uniformes, das coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , do ponto genérico, assim como, as derivadas primeiras e segundas e que as derivadas terceiras tenham um valor único. Fica, assim, garantida, a ausência de qualquer discontinuidade no meio; em particular, não haverá *diferenças finitas* de deslocamentos, entre pontos *inifinitamente próximos*. Admite-se, outrossim, que os deslocamentos sejam muito pequenos e que, ao longo de um *segmento retílineo*, a variação dos mesmos, possa ser considerada *linear*.

It is explicitly established that displacements and their first and second order derivatives are supposed to be continuous and uniform functions of the coordinates  $x$ ,  $y$ ,  $z$  of the point  $P$ ; moreover the third order derivatives will have a single value. In this way, whichever discontinuity lacking in the body is guaranteed; there will be especially *infinitesimal differences of displacements* between points, the distance of which is *infinitesimal*. Besides the displacements are assumed to be very small and their variation along a *straight segment* are considered as linear.

As deformações, em virtude das hipóteses postas, podem ser expressas em função das derivadas primeiras dos deslocamentos; e podem ser, de três categorias distintas: longitudinais, angulares ou tangenciais e de rotação.

Examinaremos, brevemente, as referidas deformações, e recordamos que, uma deformação tridimensional, pode ser decomposta em três deformações bidimensionais, cada uma localizada em um dos planos coordenados.

### III.1.3. — DEFORMAÇÕES LONGITUDINAIS

Consideremos (FIGURA N.<sup>o</sup> 7) a face de um paralelepípedo elementar,  $OABC$ , de área  $(dx \cdot dz)$ , que se desloca, paralelamente aos eixos  $x$  e  $z$ , deformando-se, isto é, sofrendo os acréscimos  $d\delta_x$  e  $d\delta_z$ , respectivamente, nas direções dos dois eixos coordenados.

Será evidentemente:

$$d\delta_x = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \cdot dx$$

$$d\delta_z = \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \cdot dz$$

E, as deformações longitudinais unitárias são:

$$\begin{aligned} i_x &= -\frac{d\delta_x}{dx} = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} \\ i_z &= -\frac{d\delta_z}{dz} = \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (24)$$

Analogamente, examinando a deformação, paralela ao eixo  $y$ , obteremos:

A deformação unitária tridimensional ou cúbica, i. tem, como componentes,  $i_x$ ,  $i_y$ ,  $i_z$ .

### III.1.4. — DEFORMAÇÃO ANGULAR OU TANGENCIAL.

A deformação tangencial, altera os ângulos formados pelas faces de um paralelepípedo elemental (os ângulos retos tornam-se oblíquos) e tende a fazer deslizar, um elemento sobre outro, sendo, contudo, excluída qualquer rotação, dos planos bisetores.

By virtue of the hypotheses considered, *deformations* may be expressed in function of displacement *first order derivatives*. They can be separated into three classes: *longitudinal*, *angular (tangential)* and *rotation deformations*.

Said deformations will be shortly surveyed: it should be recalled that a tridimensional deformation may be separated in to three bidimensional deformations, each one being placed in one of the Cartesian coordinate planes.

### III.1.3. — LONGITUDINAL DEFORMATIONS

Consider (FIGURE No. 7) the face of an elemental parallelepipedon,  $OABC$ , having area  $(dx \cdot dz)$ , displaced in the direction parallel to the axes  $x$  and  $z$  and distorted, that is to say, suffering variations  $d\delta_x$  and  $d\delta_z$ , in the direction of same name coordinate axes. It will be evident that

Thus, the unitary longitudinal deformations are

Obviously considering the deformation parallel to axis  $y$ , yields

$$i_y = -\frac{\partial \delta_y}{\partial y} \quad (25)$$

The unitary tridimensional — or cubic — deformation  $i$ , has, as components,  $i_x$ ,  $i_y$ ,  $i_z$ .

### III.1.4. — ANGULAR OR TANGENTIAL DEFORMATION

Tangential deformations modify the angles between faces of an elemental parallelepipedon (right angles become oblique angles) and tend to slide elements over each other, excluding rotation of the planes bisectors.

Consideremos (FIGURA N.<sup>o</sup> 8), a face  $OABC$  do paralelepípedo, normal ao eixo  $y$ , que, através de um deslocamento longitudinal e uma deformação tangencial, passa para a configuração  $Oa_1b_1c_1$ . O paralelepípedo poderá sofrer, ao mesmo tempo uma deformação longitudinal (ITEM III.1.3.) cujo efeito sobrepõe-se ao efeito da deformação que estamos estudando. O ângulo reto  $\angle O_1c$  torna-se:

$$\angle O_1c_1 = \frac{\pi}{2} - (\gamma' + \gamma'') \quad (26)$$

Sendo  $\gamma'$  e  $\gamma''$  bastante pequenos para poder ser identificados com as respectivas tangentes.

Por outra parte:

$$\begin{aligned} \gamma''_y &= \frac{1}{dz} \cdot \frac{\partial \delta_z}{\partial z} \cdot dz \\ \gamma'_y &= \frac{1}{dx} \cdot \frac{\partial \delta_z}{\partial x} \cdot dz \end{aligned} \quad (27)$$

Por consequência, a deformação tangencial, será:

$$\gamma_y = \gamma''_y + \gamma'_y = \frac{\partial \delta_z}{\partial z} + \frac{\partial \delta_z}{\partial x} \quad (28)$$

Analogamente, considerando as deformações de faces perpendiculares, respectivamente, aos eixos  $z$  e  $x$ , obteremos:

$$\gamma_z = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_x}{\partial y} \quad (29)$$

$$\gamma_x = \frac{\partial \delta_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} \quad (30)$$

Cabe observar que o índice do ângulo  $\gamma$ , indica o nome do eixo coordenado, normal ao plano, em que se localiza o próprio ângulo.

### III.1.5. — DEFORMAÇÃO DE ROTAÇÃO

Em virtude do movimento giratório, uma partícula sofre uma rotação, que se determina, estudo as rotações componentes, em cada um dos planos coordenados.

Considerando, por exemplo, o plano  $yz$ , normal ao eixo  $x$  (FIGURA N.<sup>o</sup> 9), a partícula será representada por dois segmentos ortogonais:

$$db = dy$$

Consider (FIGURE No. 8) the parallelepipedon face  $OABC$ , normal to axis  $y$ , which passes to the configuration  $Oa_1b_1c_1$  by a longitudinal translation and a tangential deformation. The parallelepipedon could simultaneously undergo a longitudinal deformation (ITEM III.1.3.), the effect of which overlaps the effect of the deformation that is just being studied. The right angle becomes

angles  $\gamma'$  and  $\gamma''$  being small enough to be identified with the respective tangents.

On the other hand

Therefore, the tangential deformation will be

$$\text{Likewise, considering deformations of faces normal to axes } z \text{ and } x, \text{ yields}$$

It should be observed that subindexes of angle  $\gamma$ , indicate the name of the coordinate axis, normal to the plane on which the proper angle is placed.

### III.1.5. — DEFORMATION OF ROTATION

By virtue of rotational motion, a particle undergoes a rotation, which is determined by projecting the component rotations onto each one of the coordinate planes.

For instance, if the plane  $yz$ , normal to axis  $x$  is considered (FIGURE No. 9), a particle will be represented by two normal segments

$$\bar{dc} = dz$$

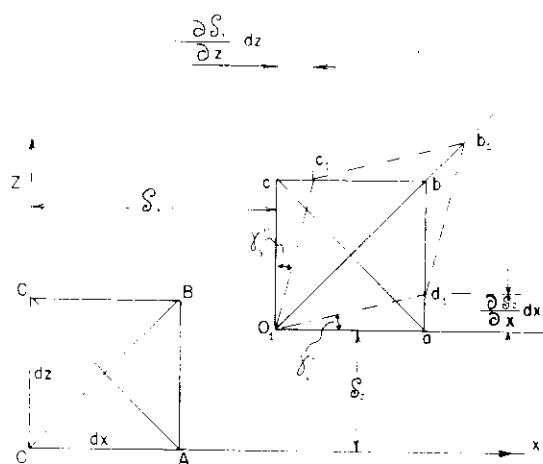


FIGURA N.º 8

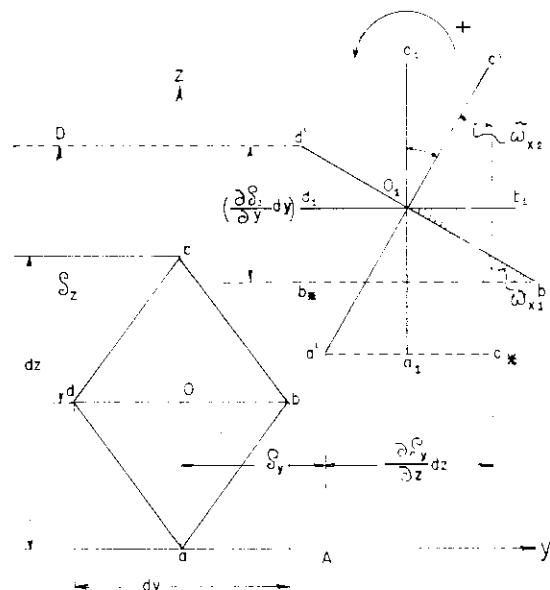


FIGURA N.º 9

paralelos, respectivamente, a  $y$  e  $z$ ; a rotação  $\omega_x$  é a soma algébrica das rotações  $\omega_{x1}$  e  $\omega_{x2}$ , sofridas por  $dy$  e  $dz$ .

Com critério análogo, são definidas as rotações  $\omega_y$  e  $\omega_z$ , respectivamente, em planos normais aos eixos  $y$  e  $z$ .

Através de operações analíticas, expostas no APÊNDICE, ITEM A.1.4, são obtidas as seguintes expressões:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta_z}{\partial y} - \frac{\partial \delta_y}{\partial z} \right) \quad (31)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta_x}{\partial z} - \frac{\partial \delta_z}{\partial x} \right) \quad (32)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta_y}{\partial x} - \frac{\partial \delta_x}{\partial y} \right) \quad (33)$$

As expressões (31), (32) e (33), equacionam as componentes do rotor  $\delta$ .

### III.1.6. — RELAÇÕES ENTRE ESFORÇOS E DE FORMAÇÕES

As relações entre esforços e deformações, partindo de um determinado estado inicial, são estabelecidas pela lei empírica de HOOKE, aplicada aos corpos elásticos. Admite-se, na teoria geral da elasticidade, que o módulo de elasticidade longitudinal (ou de YOUNG)  $E$  e o módulo de Poisson  $\nu$

parallel to  $y$  and  $z$  respectively; rotation  $\omega_x$  is the algebraical sum of rotations  $\omega_{x1}$  and  $\omega_{x2}$  undergone by  $dy$  and  $dz$ .

Through similar criterion, rotations  $\omega_y$  and  $\omega_z$  — placed on planes normal to axes  $y$  and  $z$  — are defined.

Analytical calculations, shown in APPENDIX, ITEM A.1.4, yield the following expressions

Equations (31), (32) and (33), give the components of rotation of the vector  $\delta$ .

### III.1.6. — RELATIONS AMONG STRESSES AND STRAINS

— Tre relations between stresses and strains — starting from an established neutral state — are fixed empirically by Hooke's law, applied to elastic bodies. According to the general theory of elasticity the coefficient of longitudinal elasticity (YOUNG's modulus)  $E$  and POISSON'S

dulo de POISSON  $\frac{1}{m}$  (relação entre  $i_x$  ou  $i_y$

e  $i_z$ ), sejam *constantes e independentes*: do tempo; das coordenadas do ponto considerado (condição de *homogeneidade*); da direção do esforço ou da deformação (condição de *isotropia*); da intensidade e modalidade de aplicação dos esforços.

A fórmula generalizada de Hooke:

$$-i_s = \frac{1}{E} \left( f_s - \frac{f_1 + f_2}{m} \right) \quad (34)$$

dá a deformação unitária  $i_s$ , de um elemento de volume, em uma direção  $s$ , como função *linear e homogênea* do esforço normal  $f_s$ , aplicado na direção de  $s$  e dos esforços normais  $f_1$  e  $f_2$ , perpendiculares entre si e localizados em um plano perpendicular à direção  $s$ .

São considerados positivos (ver I.5.2) os esforços que tendem a comprimir o volume.

Assim pois, quando

$$f_s > \frac{f_1 + f_2}{m} \quad (35)$$

isto é, o 2º membro é positivo, haverá um encurtamento na direção de  $s$ , logo  $i_s$  será negativo. Isso justifica o sinal  $(-)$  do 1º membro, visando homogeneizar a (34), em relação aos sinais.

### III.1.7. — RELAÇÕES ENTRE PARÂMETROS NORMAIS $N_x$ , $N_y$ , $N_z$ , E DEFORMAÇÕES $i_x$ , $i_y$ , $i_z$

A fórmula (34), aplicada ao paralelepípedo elementar, representado na FIGURA N.º 10, para determinar as deformações unitárias na direção dos eixos da:

$$\begin{aligned} -i_x &= \frac{1}{E} \left( N_x - \frac{N_y + N_z}{m} \right) \\ -i_y &= \frac{1}{E} \left( N_y - \frac{N_x + N_z}{m} \right) \\ -i_z &= \frac{1}{E} \left( N_z - \frac{N_x + N_y}{m} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

Operações analíticas, referidas no APÊNDICE, ITEM B.1, permitem transformar as (36), na forma equivalente:

$$\begin{aligned} N_x &= -2G i_x - \lambda i_c \\ N_y &= -2G i_y - \lambda i_c \\ N_z &= -2G i_z - \lambda i_c \end{aligned} \quad (37)$$

modulus  $\frac{1}{m}$  (relation between  $i_x$  or  $i_y$  and  $i_z$ ) are supposed to be constant and independent of: time, coordinates of the point  $P$  (*homogeneity condition*), stress or strain direction (*isotropic condition*), intensity of the acting stress.

The generalizing Hooke's formula as

gives unitary strain  $i_s$  of the elemental volume in the direction  $s$ , as a *linear and homogeneous* function of the normal stress  $f_s$  acting in the direction  $s$  and the normal stresses  $f_1$  and  $f_2$ , perpendicular to each other and placed on a plane, perpendicular to the straight-line  $s$ .

Stresses tending to compress the element of volume are considered positive. Therefore, when

the second member is positive, there will be a shortening in the direction of  $s$  and  $i_s$  will be negative. That justifies the  $(-)$  sign of the first member, in order to homogenize eq. (34), as far as signs are concerned.

### III.1.7. — RELATIONS BETWEEN NORMAL PARAMETERS $N_x$ , $N_y$ , $N_z$ AND STRAINS $i_x$ , $i_y$ , $i_z$

Apply eq. (34), to the elemental parallelepipedon drawn in FIGURE No. 10. The unitary strains in the directions of Cartesian axes, will be

Analytical operations, reported in APPENDIX, ITEM B.1, yield eqs. (36) transformed into an equivalent form

nas quais:

Where

$$i_e = i_x + i_y + i_z \quad (38)$$

$$G = \frac{m}{m+1} - \frac{E}{2} \quad (39)$$

$$\lambda = \frac{2G}{m-2} \quad (40)$$

são respectivamente: a deformação ou *dilatação cúbica*; o módulo de rigidez, ou de elasticidade transversal; um coeficiente proporcional a  $G$ , logo a  $E$ .

Somando, membro a membro, as (37), obtém-se:

$$(N_x + N_y + N_z) = - (3\lambda + 2G) i_e \quad (37')$$

isto é, a soma dos três parâmetros normais é constante, qualquer que seja a orientação dos eixos; sendo que, também  $i_e$  é constante. O coeficiente de proporcionalidade  $(3\lambda + 2G)$  é chamado, *módulo de compressão*.

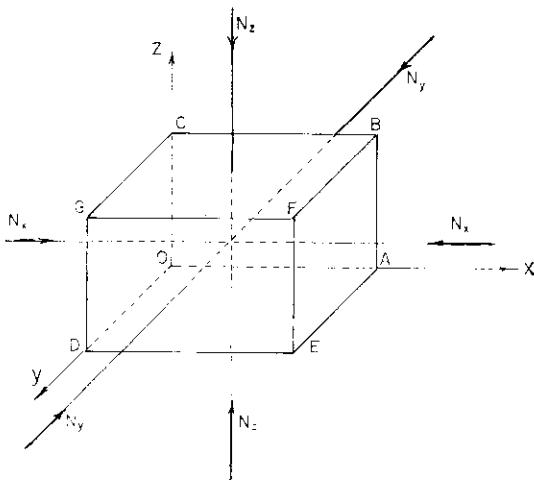


FIGURA N.º 10

are respectively: *volumetric expansion*; *modulus of rigidity*, or *coefficient of elasticity in shear*; a coefficient proportional to  $G$ , therefore to  $E$ .

Summing first and second members of eqs. (37), to each other, results in

such that the sum of the three normal parameters is a constant, whichever is axis orientated, since  $i_e$  is also a constant. Coefficient of proportionality  $(3\lambda + 2G)$  is called the *modulus of compressibility*.

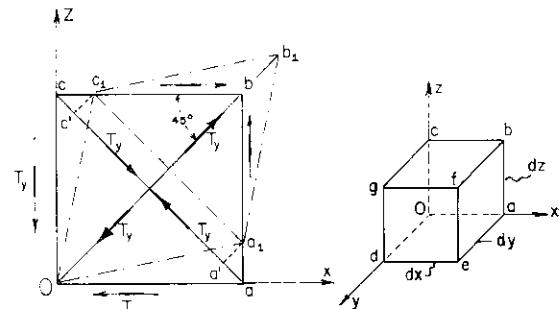


FIGURA N.º 11

### III.1.8. — RELAÇÕES ENTRE $T_x$ , $T_y$ , $T_z$ E AS DEFORMAÇÕES $\gamma_x$ , $\gamma_y$ , $\gamma_z$

Consideremos (FIGURA N.º 11), um cubo elemental, submetido, exclusivamente, ao esforço tangencial:

$$p_{zx} = p_{xy} = T_y \quad (41)$$

que age, nos contornos dos quadrados paralelos ao plano  $xOz$ , logo, normais ao eixo  $y$ .

Demonstramos no APÉNDICE (ITEM B.2) que, nas diagonais  $Ob$ ,  $ac$ , — que são perpendiculares entre si, e formam ângulos de  $45^\circ$  com as arestas do contorno  $Oabc$  — se produzem esforços:

### III.1.8. — RELATIONS BETWEEN $T_x$ , $T_y$ , $T_z$ AND DEFORMATIONS $\gamma_x$ , $\gamma_y$ , $\gamma_z$

Consider (FIGURE No. 11) a cubic element, and moreover, the single shearing stress

acting on the edges of squares, parallel to the plane  $xOz$ , thus, normal to axis  $y$ .

It is show in APPENDIX (ITEM B.2) that the stresses acting on the diagonals  $Ob$ ,  $ac$ , — which are perpendicular to each other, angles between them and the  $Oabc$  outline edges being  $45^\circ$  — that is to say

$$\sigma = T_u \quad (42)$$

que tendem a encurtar a diagonal  $ac$  e alongar a diagonal  $Ob$ . O quadrado  $OabcO$  deformar-se-á, tomando, a configuração  $Oa_1, b_1, c_1, O$ , em quanto o ângulo reto  $cOb$ , torna-se:

$$c_1 \hat{O} a_1 = c \hat{O} a = \gamma_u$$

sendo:

$$\gamma_u = \gamma_y + \gamma_b$$

$\circ$  decréscimo angular.

O encurtamento unitário da diagonal  $ac$ , será:

$$i_{ac} = - \frac{aa' + cc'}{ac} = - \frac{aa_1 + cc_1}{ac \sqrt{2}} = - \frac{\gamma_y + \gamma_b}{2} = - \frac{\gamma_u}{2} \quad (43)$$

onde  $\gamma_u$  é o valor modular do ângulo.

Por outra parte, aplicando a lei de HOOKE (34), a um paralelepípedo, cujas faces sejam normais às diagonais  $Ob$ ,  $ac$ , e, recordando a (42) teremos, na direção de  $ac$ , um decréscimo unitário, cujo valor absoluto é:

$$i_{ac} = \frac{T_u}{E} \frac{m+1}{m} = \frac{T_u}{2G} \quad (44)$$

E, igualando os segundos membros das (43) e (44):

$$T_u = - G \cdot \gamma_u \quad (45)$$

Operando, com critério análogo, sobre elementos planos normais respectivamente, aos eixos  $x$  e  $z$ , obteremos:

$$T_x = - G \cdot \gamma_x \quad (46)$$

$$T_z = - G \cdot \gamma_z$$

### III.1.9. — EQUAÇÕES DE LAMÉ — EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO DOS SÓLIDOS ELÁSTICOS

As equações (37), (45) e (46), são chamadas de LAMÉ.

Recordando as expressões (24), (25), (28), (29) e (30), e sendo

$$i_c = \frac{\partial \delta_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{\delta} \quad (47)$$

reunimos abaixo, as referidas equações, na outra forma, em que, os parâmetros dos esfor-

tend to produce diagonal  $ac$  shortening and diagonal  $Ob$  stretching. The square  $OabcO$ , will change shape, taking the configuration  $Oa_1, b_1, c_1, O$ , while the right angle  $cOb$  becomes

$$\text{and}$$

is the angular decrease.

The unitary shortening of the diagonal  $ac$  will be

$$where \gamma_u is angle modular value.$$

On the other hand, applying Hooke's law (34), to a parallelepipedon, the faces of which are normal to the diagonals  $Ob$ ,  $ac$  and recalling eq. (42), an unitary decrease in the direction of  $ac$ , is obtained having the absolute value

Eqs. (43) and (44) combine to give

Operating analogously on plane elements normal to axes  $x$  and  $z$ , yields

### III.1.9. — LAME'S EQUATIONS. ELASTIC SOLID EQUILIBRIUM EQUATIONS

Equations (37), (45) and (46) are called LAME's equations.

Recalling the expressions (24), (25), (28), (29), (30) and that

LAME's equations may be transformed into the equations shown below, where stress parameters

cos são dados em função das derivadas primeiras das componentes  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ , do deslocamento. Ter-se-á:

$$\begin{aligned} N_x &= -2G \frac{\partial \delta_x}{\partial x} = \lambda + \text{div} \cdot \hat{\delta} \\ N_y &= -2G \frac{\partial \delta_y}{\partial y} = \lambda + \text{div} \cdot \hat{\delta} \\ N_z &= -2G \frac{\partial \delta_z}{\partial z} = \lambda + \text{div} \cdot \hat{\delta} \\ T_x &= -G \left( -\frac{\partial \delta_y}{\partial z} + \frac{\partial \delta_z}{\partial y} \right) \\ T_y &= -G \left( -\frac{\partial \delta_x}{\partial z} + \frac{\partial \delta_z}{\partial x} \right) \\ T_z &= -G \left( -\frac{\partial \delta_y}{\partial x} + \frac{\partial \delta_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (48)$$

Cabe, nos salientar que, na teoria geral da elasticidade, é frequente o uso de se considerar, os esforços de tração, positivos. Neste caso, nos segundos membros das fórmulas (48), o sinal (+) substitue o sinal (-).

Combinando as (21) com as (48), e posto  $A_x = A_y = A_z = 0$ , obtemos as equações indefinidas de equilíbrio dos corpos elásticos sólidos. Referimos, abaixo, essas equações omitindo o desenvolvimento de cálculos, pois que, um processo análogo será exposto no APÊNDICE, para o caso específico dos fluidos. Temos:

are given in function of displacement components,  $\delta_x$ ,  $\delta_y$ ,  $\delta_z$ . It will be

It should be emphasized that, in the general theory of the elasticity, tensile stresses are often considered as positive. In this case, the positive sign would be substituted for the negative sign in the second members of equations (48).

Taking  $A_x = A_y = A_z = 0$ , eqs. (21) and (48) combine to give the equilibrium general equations of solid bodies, which are written below (49). Calculation performances have been omitted, since an analogous proceeding will be shown in APPENDIX, for the specific case of fluids, resulting in same comment as for (48).

$$\begin{aligned} \rho X &= (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \cdot \hat{\delta} + G \cdot \nabla^2 \cdot \delta_x \\ \rho Y &= (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \text{div} \cdot \hat{\delta} + G \cdot \nabla^2 \cdot \delta_y \\ \rho Z &= (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \text{div} \cdot \hat{\delta} + G \cdot \nabla^2 \cdot \delta_z \end{aligned} \quad (49)$$

Nas quais:

Where

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

é o operador de LAPLACE.

is the LAPLACE's function.

Recordamos que, junto com as equações (49), deverão ser satisfeitas: as equações de compatibilidade, que relacionam deformações lineares ( $i_i$ ) e angulares ( $\gamma_i$ ) e que podem ser expressas também, em função dos esforços; as equações de contorno (22'), eventualmente transformadas pelas fórmulas de LAMÉ (48); as condições peculiares do caso específico estudado. E

Eqs. (49) should be satisfied with: equations of compatibility, relating the lineal ( $i_i$ ) and angular ( $\gamma_i$ ) strains, which may be also given as a function of stresses; boundary equations (22'), transformed, eventually, through LAME's formulae; peculiar conditions of the specific case considered. It is typical, for instance, for the case of mass forces to be constant or to

tipico, por exemplo, o caso em que as forças de massa são constantes, ou derivam de um potencial; as equações de compatibilidade se identificam, neste caso, com as equações de BELTRAMI e também as tensões são funções biarmônicas, das coordenadas ( $x, y, z$ ).

#### IV — INTERPRETAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE LAME, APLICADAS AOS FLUIDOS

IV.1. — Ressalvadas tódas as considerações feitas no ITEM N.<sup>o</sup> 1, os *fluidos* devem ser considerados, em virtude da lei de NEWTON, como *sistemas continuos elásticos* em que, o *módulo de elasticidade tangencial*  $G$ , dos corpos sólidos, é substituído pela *viscosidade*  $\mu$ . As duas referidas magnitudes, são características elásticas, que se manifestam em virtude da alteração de um estado do corpo, que poderiam definir, *estado de repouso*. A referida alteração é devida a aplicação de *forças*, para os corpos sólidos, e à condição de *movimento*, para os fluidos.

Parece lógico, portanto, extender o uso das equações de LAMÉ para os fluidos, pondo-se:

$$G = \frac{\mu}{t} \quad (50)$$

$$\lambda = \frac{2}{m - 2} - \frac{\mu}{t} = K, \frac{\mu}{t} \quad (51)$$

onde  $t$  é a variável tempo em quanto, a expressão de  $\lambda$  é dada pela (40).

Salientamos que as equações dimensionais de  $G$  e  $\mu$ , no sistema técnico (fórmula  $F$ , comprimento  $L$ , tempo  $T$ ), são respectivamente:

$$[F \cdot L^{-2}]$$

e que, as expressões (50) e (51), garantem a homogeneidade dimensional.

Procedendo, portanto, à substituição de  $G$  e  $\lambda$ , respectivamente, pelas (50) e (51), temos que observar que:

$$\frac{\delta}{t} = V \quad (52)$$

representa a velocidade de deslocamento de uma partícula e que:

$$\frac{\delta_x}{t} = u \quad \frac{\delta_y}{t} = v \quad \frac{\delta_z}{t} = w \quad (53)$$

são as suas componentes nas direções dos eixos coordenados.

depend upon a potential. The equations of compatibility identify themselves with BELTRAMI's equations and also the stresses are bi-harmonic functions of the coordinates  $x, y, z$ .

#### IV. — INTERPRETATION OF LAME'S EQUATIONS, APPLIED TO FLUIDS

IV.1. — Recalling all the considerations made in ITEM No. 1, the *fluids* should be considered — by virtue of NEWTON's law — as an *elastic continuum*, where the *viscosity*  $\mu$  is substituted for the *modulus of elasticity in shear*  $G$  of solid bodies. Said magnitudes, are elastic characteristics which manifest themselves, when the state of a body changes from the *rest state*. This change is produced by acting *forces* as for as solid bodies are concerned and by a state of *motion* for the fluids.

Thus it seems to be logical to extend LAME's equations for fluids, using

where  $t$  is the variable time, while the expression of  $\lambda$  is given by eq. (40).

It is emphasized that the dimensional equations of  $G$  and  $\mu$  considering dimensional analyses (force  $F$ , length  $L$ , time  $T$ ) are, respectively

$$[F \cdot L^{-2} \cdot T]$$

and expressions (50) and (51), guarantee the dimensional homogeneity.

Therefore, substituting expressions (50) and (51) for  $G$  and  $\lambda$ , respectively, it should be observed that

represents the velocity of displacement of a certain particle and that

are their components in the direction of the coordinate axes.

IV.2. — Cabe, outrossim, salientar uma outra peculiaridade dos fluidos, que sugere formular uma hipótese simplificativa, em relação aos esforços normais. Como se sabe, no estado de repouso, é verificada a condição de isotropia, no que diz respeito à distribuição das pressões.

Se  $p$  é o valor isotrópico, as características físicas dos fluidos permitem admitir que as diferenças:

IV.2. — Another fluid peculiarity should be emphasized, which suggests that a simplified hypothesis could be formulated as far as normal stresses are concerned. It is known that, in the rest state, the isotropic condition with regard to pressure distribution is satisfied.

By virtue of the physical characteristics of fluids, the isotropic value  $p$  may be calculated assuming that differences such as

$$\begin{aligned}N_x &= p \\N_y &= p \\N_z &= p\end{aligned}$$

sejam muito pequenas e que seja lícito por:

are very small and that it is permissible to take

$$p = \frac{1}{3} (N_x + N_y + N_z) \quad (54)$$

Levando, então, em conta a (54), as expressões de  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_z$ , dadas pelas (48), são susceptíveis de uma ulterior transformação, através de determinações analíticas, referidas no APÊNDICE, ITEM C.

IV.3. — Em virtude das (50), (51), (52) e (53), e dos resultados obtidos no referido ITEM C, do APÊNDICE, as equações de LAMÉ, aplicadas aos fluidos, tornam-se:

If eq. (54) is considered, the expressions of  $N_x$ ,  $N_y$  and  $N_z$ , given by eqs. (48), are transformed through analytical calculations shown in APPENDIX, ITEM C.

IV.3. — By virtue of eqs. (50), (51), (52), (53) and results obtained in that ITEM C of APPENDIX, LAME's equations, applied to fluids, become

$$\begin{aligned}N_x &= p + \frac{2}{3} \mu \cdot \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \mu \frac{\partial u}{\partial x} \\N_y &= p + \frac{2}{3} \mu \cdot \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \mu \frac{\partial v}{\partial y} \\N_z &= p + \frac{2}{3} \mu \cdot \operatorname{div} \mathbf{V} - 2 \mu \frac{\partial w}{\partial z} \\T_x &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\T_y &= -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\T_z &= -\mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)\end{aligned} \quad (55)$$

Em conclusão, pelas hipóteses estabelecidas no ITEM III.1.6., as equações (55), dão os parâmetros dos esforços, em um ponto, como funções contínuas, lineares e homogêneas, das derivadas das componentes da velocidade  $\mathbf{V}$ , na direção dos eixos coordenados. Acrescentamos que, para os fluidos:

To conclude, on the basis of hypotheses established in ITEM III.1.6., eqs. (55) give the stress components (parameters) as continuous, linear and homogeneous function of velocity  $\mathbf{V}$  derivatives, in the direction of coordinate axes. It is to be added that, with regard to fluids:

- não existe o estado inicial de referência, correspondente a uma configuração molecular definida (ver ITEM III.1.6);
- o estado de isotropia — conforme constatações experimentais — é atingido, parando o movimento, em um intervalo de tempo de extrema brevidade.

Parece, então, natural e lógico admitir-se que as diferenças em relação ao estado isotrópico, dependam, apenas, das *características instantâneas do escoamento*.

A velocidade  $\mathbf{V}$ , é, por consequência, a velocidade instantânea.

#### AS EQUAÇÕES (55), SATISFAZEM AS HIPÓTESES, ADMITIDAS NA MECÂNICA DOS FLUIDOS (NAVIER).

#### IV.4. — OBSERVAÇÃO

Dividindo ambos os membros das equações (31), (32), (33), pelo tempo  $t$  e, aplicando as (53), teremos os ângulos de rotação pela unidade de tempo, isto é, as velocidades angulares componentes, nos planos normais aos eixos coordenados.

Essas componentes coincidem com aquelas da velocidade de deslocamento, sobre a circunferência de raio unitário, ou também do rotor da velocidade  $\mathbf{V}$ . Sintéticamente pode se escrever:

$$2 \text{ rotor } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

Isto é:

$$2 \text{ rotor } \mathbf{V} = \mathbf{i} \left( -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \mathbf{j} \left( -\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mathbf{k} \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (56)$$

#### V. — EQUAÇÕES GERAIS OU INDEFINIDAS PARA OS FLUIDOS

V.1. — Substituindo nas (21) os símbolos  $N_i$  e  $T_i$ , pelas expressões analíticas correspondentes (55), (ver APÊNDICE ITEM D.1) e recordando que:

$$\mathbf{A} = \frac{d \mathbf{V}}{dt}$$

$$A_x = \frac{du}{dt}, \quad A_y = \frac{dv}{dt}, \quad A_z = \frac{dw}{dt}$$

- there is no initial reference state, corresponding to a defined molecular configuration;
- according to experiential evidence isotropic state from motion cessation is reached in an extremely short time.

Therefore it should be logically assumed that *differences from isotropic state*, only depend upon *instantaneous flow characteristics*.

Velocity  $\mathbf{V}$ , consequently, is the instantaneous velocity.

#### Eqs. (55) COMPLETELY FULFILL THE HIPOTHESES ASSUMED IN FLUID MECHANICS.

#### IV.4. — OBSERVATION

Dividing eqs. (31), (32), (33) by time  $t$  and applying eqs. (53), rotation angles per unit of time are obtained, namely, angular velocity components, on planes normal to the coordinate axes.

These components identify themselves with those of the displacement velocity on a unit radius circle, or also with velocity  $\mathbf{V}$  rotation components. It may be written synthetically.

That is to say

#### V. — FLUID GENERAL EQUATIONS

V.1. — Substituting into eqs. (21) the corresponding expressions (55) for the symbols  $N_i$  and  $T_i$  — see APPENDIX, ITEM D.1 — and recalling that

obtemos as três equações indefinidas, conhecidas sob o nome de equações de NAVIER-STOKES:

$$\begin{aligned}\rho \left( X - \frac{du}{dt} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{V} - \mu \nabla^2 u \\ \rho \left( Y - \frac{dv}{dt} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{V} - \mu \nabla^2 v \\ \rho \left( Z - \frac{dw}{dt} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\mu}{\beta} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{V} - \mu \nabla^2 w\end{aligned}\quad (57)$$

As (57) podem ser sintetizadas na equação vetorial:

$$\left( \mathbf{F} - \frac{d \mathbf{V}}{dt} \right) = \operatorname{grad} \left( p - \frac{\mu}{\beta} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) - \mu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (58)$$

Deverão, outrossim, ser satisfeitas, as equações de contorno (22'), a equação de estado e a equação da continuidade.

V.2. — Se nas (57), (58) pomos

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (59)$$

teremos as equações gerais para os fluidos *incompressíveis*.

Tomando:

$$\mu = 0 \quad (59-a)$$

teremos as equações para os fluidos não viscosos ou *perfeitos*.

Admitindo-se, entretanto:

Therefore, utilizing both

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{V} &= 0 \\ \mu &= 0\end{aligned}\quad (60)$$

obtemos as equações dos fluidos *perfeitos incompressíveis* (equações de EULER).

A condição de repouso, corresponde, evidentemente,  $\mathbf{V} = 0$ , ( $u = v = w = 0$ ).

## VII. — MOVIMENTO DE UMA PARTÍCULA FLUIDA SÔBRE UMA TRAJETÓRIA

VII.1. — Projetando a (58), na direção do elemento infinitesimal  $ds$ , da trajetória de uma partícula fluida, em movimento (APÊNDICE — ITEM D.2), tiramos outra equação, chamada *equação única*; isto é:

$$\mathbf{F} - \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{p}{\rho} - \frac{I}{\beta} - \frac{\mu}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{V} + \frac{V^2}{2} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\psi}{V} \quad (61)$$

yields three differential equations, called NAVIER-STOKES' equations

Eqs. (57) may be synthesized in the vectorial equation

Moreover, boundary equations, state equations and continuity equations, should be satisfied.

V.2. — Considering eqs. (57), (58) with

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \quad (59)$$

the *incompressible* fluid general equations are obtained.

Taking

the perfect or *non viscous* fluid equations are obtained.

Therefore, utilizing both

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{V} &= 0 \\ \mu &= 0\end{aligned}\quad (60)$$

the *incompressible perfect* fluid equations (EULER's equations) are obtained.

The rest state evidently corresponds to  $\mathbf{V} = 0$ , ( $u = v = w = 0$ ).

## VIII. — FLUID PARTICLE ON STREAMLINE MOTION

VIII.1. — Eq. (58) projected along the direction of flow of an element  $ds$  (APPENDIX, ITEM D.2), yields another equation, called the *single equation*, that is

na qual  $\frac{\partial V}{\partial t}$  é a derivada local da velocidade e

where  $\frac{\partial V}{\partial t}$  is the local derivative of velocity and

$$\psi = u\nabla^2 u + v\nabla^2 v + w\nabla^2 w$$

São válidas as considerações feitas no ITEM V.2.

## VI.2. — FLUIDOS PESADOS

No campo conservativo da gravidade, a equação (61) — após transformações analíticas (ver APÊNDICE, ITENS D.3.1.2.) — integrada entre as posições ( $s = s_1$ ) e ( $s = s_2$ ), se identifica com a expressão geral do princípio de BERNOULLI, para os *fluidos viscosos compressíveis*, em movimento variado, isto é:

$$-\frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \int_{s_1}^{s_2} -\frac{\partial}{\partial s} \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} - \frac{\mu \cdot \operatorname{div} \mathbf{V}}{3\gamma} \right) ds - \mu \int_{s_1}^{s_2} \frac{\psi}{\gamma \cdot V} ds \quad (62)$$

O caso do movimento permanente, corresponde  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ .

Se, outrossim, o fluido for *incompressível* então, por ser  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  e  $\gamma = \text{const}$ , a (62), tornar-se-á:

$$(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \mu \int_{s_1}^{s_2} \frac{\psi}{\gamma \cdot V} ds \quad (63)$$

A condição  $\mu = 0$ , dá a equação para *fluidos perfeitos incompressíveis*.

Por outra parte, a equação (62), sob as condições;  $\mu = 0$  e  $V = 0$ , tomando o sentido positivo do eixo  $z$ , dirigido para baixo, torna-se:

$$(z_2 - z_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dp}{\gamma} \quad (64)$$

que é a lei de STEVIN, generalizada, para os *fluidos compressíveis*.

## VII. — A EQUAÇÃO GLOBAL

VII.1. — Pela integração da equação (58), em um volume  $\tau$  limitado por uma superfície  $\sigma$  (ver APÊNDICE, ITEM E.1.2.), obtém-se a equação global:

Considerations shown in ITEM V.2 may be extended to eq. (61).

## VI.2. — FLUID IN A GRAVITY FIELD

Eq. (61) — after transformations suitable to gravity field properties (see APPENDIX, ITEMS D.3.1.2.) — integrated over the interval  $s = s_1$  and  $s = s_2$ , results in the general expression of BERNOULLI's principle, for *compressible viscous fluids in nonsteady state motion*, that is

Steady state motion corresponds to  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ .

Moreover, if the fluid is considered incompressible, it will be  $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$  and  $\gamma = \text{const}$ , and eq. (62) becomes

$$(z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \mu \int_{s_1}^{s_2} \frac{\psi}{\gamma \cdot V} ds \quad (63)$$

Taking  $\mu = 0$  the equation for ideal incompressible fluids is obtained.

On the other hand, assuming  $\mu = 0$ ,  $V = 0$ , and taking axis  $z$  directed downward as positive, eq. (62) becomes

$$(z_2 - z_1) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dp}{\gamma} \quad (64)$$

which is STEVIN's law generalized and applicable to *compressible fluids*.

## VII. — MOMENTUM EQUATION

VII.1. — Integrating eq. (58) with respect to a volume  $\tau$  limited by a surface  $\sigma$  (see APPENDIX, ITEM 1.2.), results in the *momentum equation* which is

$$\int_{\tau} \rho \left[ \left( \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) - \mathbf{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] d\tau + \int_{\sigma} (p \cdot \mathbf{n} + \rho \mathbf{V} \mathbf{V}_n) d\sigma \\ = \mu \int_{\sigma} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial n} d\sigma + \frac{\mu}{3} grad Q \quad (65)$$

onde:

$Q$ , é a diferença dos fluxos de fluido, que entram e saem da superfície  $\sigma$ , na unidade de tempo; a essa diferença, corresponde uma variação de volume, relacionada (ver APÉNDICE, ITEM E.2, cálculo de  $Q$ ) com a  $\operatorname{div} \mathbf{V}$ , isto é, com a deformação cúbica unitária, aplicada a todo o volume  $\tau$ .

A (65) consubstancia o princípio das *quantidades de movimento*, para os *fluidos viscosos compressíveis*, em escoamento com *regime variado*.

A mesma (65) pode ser extendida aos movimentos turbulentos, tomando, para as pressões e velocidades, e para o produto  $\rho (\mathbf{V} \mathbf{V}_n)$ , valores médios, em um determinado intervalo de tempo  $\Delta t$ , oportunamente escolhido.

VII.2. — A equação (65), contém 5 parcelas que independem da compressibilidade. Isto é:

a) As forças de massa, ou melhor, o peso  $G$  do volume  $\tau$ , quando  $\mathbf{F} = g = \text{aceleração de gravidade}$ .

$$G = \int_{\tau} \rho \mathbf{F} d\tau = \int_{\tau} \rho \mathbf{g} d\tau \quad (66)$$

b) As forças de inércia (de D'ALEMBERT):

$$I = \int_{\tau} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} d\tau \quad (67)$$

c) A resultante dos empuxos normais, sobre a superfície  $\sigma$ :

$$E = \int_{\sigma} p \cdot \mathbf{n} d\sigma \quad (68)$$

d) As resultantes das quantidades de movimento, dos fluxos de massa que entram e saem da superfície

$$M = \int_{\sigma} \rho \mathbf{V} \mathbf{V}_n d\sigma = \int_{\sigma} \rho \mathbf{V} dQ \quad (69)$$

where:

$Q$  is the difference between fluid flows, entering and going out across the surface  $\sigma$ , in the unit of time; this difference is to be related to the volume variation, corresponding (see APPENDIX, ITEM E.2, calculation of  $Q$ ) to  $\operatorname{div} \mathbf{V}$ , that is, to the unitary volumetric expansion, applied to the whole volume  $\tau$ .

Eq. (65) expresses the *momentum principle* applied to *compressible unsteady viscous fluid flow*.

The proper eq. (65) may be extended to turbulent flows, by considering average values of pressures, velocities and products  $\rho (\mathbf{V} \mathbf{V}_n)$ , in a certain lapse of time  $\Delta t$ , suitably selected.

VII.2. — Eq. (65) consists of 5 terms, which do not depend upon compressibility. That is to say:

a) Mass force, or better, weight  $G$  of the volume  $\tau$ , when  $\mathbf{F} = g = \text{gravity acceleration}$ .

c) Resultant of normal internal forces, acting on the surface  $\sigma$

d) Resultant of momentum of the masses flowing across the surface

- e) A resultante das forças tangenciais sobre toda a superfície  $\sigma$ , em virtude da viscosidade  $\mu$  do fluido:

$$\mu \int_{\sigma} \frac{\rho \mathbf{V}}{\partial n} d\sigma \quad (70)$$

As parcelas que sofrem a influência da compressibilidade do fluido, entretanto, são, respectivamente:

$$-\mathbf{V} \int_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (71)$$

A primeira, (70), depende da variação local da densidade e do movimento e, torna-se nula, nas condições de repouso ( $\mathbf{V} = O$ ) ou de permanência ( $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$ ).

A segunda (71) se relaciona com a viscosidade e com o gradiente de  $Q$ . Trata-se de uma força, pela qual são responsáveis os atritos internos, que se opõem às variações volumétricas do corpo, na unidade de tempo, dentro do princípio de conservação da massa.

- e) Resultant of tangential forces on the surface  $\sigma$ , by virtue of the fluid viscosity  $\mu$

The terms influenced by fluid compressibility, are respectively

$$\frac{\mu}{3} \text{grad } Q \quad (71')$$

The former (70) depends on local variation of density and motion and vanishes in the rest state ( $\mathbf{V} = O$ ) or for steady flow  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) = 0$

The latter (71) relates viscosity and gradient of discharge  $Q$ . It is a force, generated by internal friction, which opposes volumetric variation of the body per unit of time, according to the principle of conservation of mass.

### VIII. — CONCLUSÕES

VIII.1. — As fórmulas de LAMÉ (48), que fundamentam a teoria da elasticidade dos corpos sólidos, relacionando esforços normais  $N_i$  e tangenciais  $T_i$  ( $i = x, y, z$ ), com as deformações correspondentes (derivadas parciais dos deslocamentos), são obtidas aplicando, somente, o princípio experimental, equacionado pela lei de Hooke generalizada (34).

### VIII.2. — EXTENSÃO DAS EQUAÇÕES DE LAMÉ PARA OS FLUIDOS.

A extensão das fórmulas de LAMÉ para os fluidos, foi feita, simplesmente, substituindo-se o módulo de elasticidade tangencial  $G$  dos sólidos, pela viscosidade  $\mu$  dos fluidos, levando, porém, em conta as equações dimensionais, das duas referidas magnitudes (ITEM IV.1). As componentes do deslocamento  $\delta$  resultam substituídas, automaticamente, pelos componentes da velocidade  $\mathbf{V}$ . As expressões dos parâmetros normais  $N_i$ , sofrem ulterior modificação, considerando que, nos casos específicos dos fluidos, é lícito admitir que a pressão isotrópica  $p$ , é a média aritmética dos próprios  $N_i$ .

### VIII. — CONCLUSIONS

VIII.1. — LAME's formulae, which are the bases of the theory of solid body elasticity, establish the relations extant between normal ( $N_i$ ) and tangential ( $T_i$ ) stresses ( $i = x, y, z$ ) and corresponding strains (displacement partial derivatives). They are obtained, by applying, exclusively, the experimental principle, put into equation by HOOKE's generalized law.

### VIII.2. — LAME'S EQUATIONS EXTENDED TO FLUIDS

The extension of LAME's equations were made by merely substituting fluid viscosity  $\mu$  for the coefficient of elasticity in shear  $G$  of solid bodies; dimensional equations of said magnitudes were nevertheless taken into consideration (ITEM IV.1). Velocity  $\mathbf{V}$  components are automatically substituted, for displacement  $\delta$  components.

Assim, pois, as considerações expostas no ITEM IV.2., permitem concluir que as fórmulas (55) obtidas para  $N_i$  e  $T_i$ , satisfazem completamente as chamadas hipóteses de NAVIER.

VIII.3. — As equações de LAME (48), são válidas, portanto, para todos os sistemas continuos, e a sua aplicação a corpos diferentes, depende das características físicas dos mesmos.

São obtidas, pois, as equações gerais (indefinidas), para todos os sistemas que se enquadram no meio contínuo, isto é:

- para os corpos sólidos, as equações (49), a serem combinadas com as equações de compatibilidade e de contorno;
- para os fluidos, as equações de NAVIER e STOKES (57), combinadas com as equações de contorno, de continuidade e de estado.

As equações (57) integradas ao longo da trajetória de uma partícula do fluido pesado, dão, como resultado, o princípio de BERNOULLI ou da energia (62). As mesmas (57), integradas em um volume  $\tau$  limitado por uma superfície  $\sigma$ , se identificam com o princípio da quantidade de movimento (65).

Cabe-nos salientar que, as fórmulas (62) e (65), determinadas no presente estudo, equacionam os dois referidos princípios, para o caso, mais geral, dos fluidos viscosos compressíveis, em escoamento com regime variado.

VIII.4. — O estudo analítico unificado do meio contínuo estabelece, duma vez, os princípios fundamentais da ciência das construções, da teoria da elasticidade e da mecânica dos fluidos; representa, por consequência, uma racionalização de metodologia, seja no campo científico, seja no campo didático. Pode ser realizada, outrossim, uma economia não desprezível no ministro de cursos, uma vez que os programas sejam convenientemente entrosados.

Normal parameter  $N_i$  expressions, undergo further modification, considering that — in the specific case of fluids — it is valid to assume that the isotropic pressure  $p$ , is the arithmetical average of the proper  $N_i$ .

VIII.3. — LAME's equations, consequently, are valid for whatever continuum, their application procedure depending upon the characteristics of the body.

Thus, general (indefinite) equations for all systems within the continuum were obtained. Namely:

- for solid bodies, equations (49), when combined with compatibility and boundary equations;
- for fluid bodies, NAVIER and STOKES' equations (57), combined with boundary, continuity and state equations.

From eqs. (57), when integrated along a stream-line in a gravity field, BERNOULLI's (or energy) principle (62) results. The same eqs. (57) integrated with regard to a volume  $\tau$  limited by a surface  $\sigma$ , identify themselves to the momentum principle (65).

It should be emphasized that, equations (62) and (65), derived in the present study, put into equation the foregoing principles, for the most general case, considering unsteady flow of compressible viscous fluid.

VIII.4. — The unified analytical study of the continuum, establishes altogether the basic principles of Construction Science, Theory of Elasticity and Mechanics of Fluids; consequently it represents a methodology rationalization, either in the science or in the teaching field. Moreover an appreciable saving of time can be derived, as far as course performance is concerned, provided that the programs be suitably coordinated.

## BIBLIOGRAFIA (BIBLIOGRAPHY)

E. TORROJA — "Elasticidad". Editorial Dossat, Madrid, 1951.

A. BANDINI — "Síntese de Mecânica dos Fluidos". Serviço de Publicações da E.E.S.C. da USP, São Carlos, 1963.

T. LEVI CIVITA — "Meccanica Razonale". Ed. N. Zanichelli, Bologna.

## APÊNDICE

### A — CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO. DESLOCAMENTOS. DEFORMAÇÕES

#### A.1. — EQUAÇÕES DO EQUILÍBRIO INTERNO.

##### A.1.1 — OBTEÇÃO DA EQUAÇÃO (11) (ver ITEM II.1.2).

As forças de massa e de inércia aplicadas ao paralelepípedo de massa  $dm$ , são respectivamente:

$$\mathbf{F} \cdot dm = \mathbf{F} \cdot \rho \cdot d\tau$$

$$\mathbf{A} \cdot dm = \mathbf{A} \cdot \rho \cdot d\tau$$

As resultantes dos empuxos atuantes, sobre os três pares de faces (FIGURA N.º 3), normais, respectivamente aos eixos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , são, recordando também a (7):

$$- \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} \cdot d\tau; \quad - \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} \cdot d\tau; \quad - \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \cdot d\tau \quad (73)$$

Somando as (72) e (73) e dividindo-se por  $d\tau$ , obtém-se a equação (11).

##### A.1.2 — OBTEÇÃO DAS IGUALDADES (13), (14), (15) (ver ITEM II.1.3).

Consideremos por exemplo, os momentos em relação ao eixo de simetria, paralelo a  $z$  (FIGURA N.º 4).

As únicas forças que podem dar um momento, são, evidentemente, as componentes  $p_{xy}$  e  $p_{yz}$ .

Considerando positivos os momentos que produzem uma rotação anti-horária, ter-se-á:

$$\left[ p_{xy} + \left( p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \cdot dx \right) dy \cdot dz \frac{dx}{z} \right] - \left[ p_{yz} + \left( p_{yz} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} \cdot dy \right) dx \cdot dz \frac{dy}{z} \right] = 0$$

## APPENDIX

### A — EQUILIBRIUM STATE — DISPLACEMENTS — DEFORMATIONS (STRAINS)

#### A.1 — INTERNAL EQUILIBRIUM EQUATIONS.

##### A.1.1 — EQUATION (11) DETERMINATION (see ITEM II.1.2).

The mass and inertial forces, applied to parallelepipedon having mass  $dm$ , are respectively

$$\mathbf{F} \cdot dm = \mathbf{F} \cdot \rho \cdot d\tau$$

(72)

$$\mathbf{A} \cdot dm = \mathbf{A} \cdot \rho \cdot d\tau$$

Internal force resultants, acting on the three couples of faces (FIGURE No. 3), normal to the respective axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , recalling eq. (7), are

Summing eqs. (72) and (73) and dividing through by  $d\tau$ , eq. (11) is obtained.

##### A.1.2 — TO OBTAIN EQUALITIES (13), (14), (15) (see ITEM II.1.3).

Consider, for instance, the moments about the symmetry axis, parallel to  $z$  (FIGURE No. 4).

The only forces, which can give rise to a moment, are evidently, the components  $p_{xy}$  and  $p_{yz}$ .

If moments yielding counterclockwise rotations are considered positive, then

E, desprezando, os infinitesimais da 4.º ordem:

$$p_{xy} = p_{yx} \quad (74) = (15)$$

Analogamente, calculando os momentos em relação a eixos de simetria, paralelos, respectivamente aos eixos  $y$  e  $x$ , obteria-se-ão, a (14) e a (15).

#### A.1.3 — OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO (22) (ver ITEM II.2.2).

Considere-se (FIGURA N.º 5) uma das faces, por exemplo, a face  $OBC = da_r$ , normal ao eixo  $x$ . Podem-se verificar duas eventualidades: a aresta  $OA$  está orientada na direção positiva do eixo  $x$ , ou na direção contrária.

No primeiro caso (FIGURA N.º 12), a normal interna  $\mathbf{n}_x$  ao elemento  $da_x$ , tem o mesmo sentido do eixo  $x$ , logo (ITEM II.1.1) o esforço  $\mathbf{p}_x$  é positivo e o empuxo será:

$$d\mathbf{E}_x = \mathbf{p}_x \ da_x$$

Mas:

$$da_r = da \cos(180^\circ - \hat{n}x) = -da \cos \hat{n}x$$

Logo:

But

Therefore

$$d\mathbf{E}_x = -\mathbf{p}_x da \cos \hat{n}x \quad (75)$$

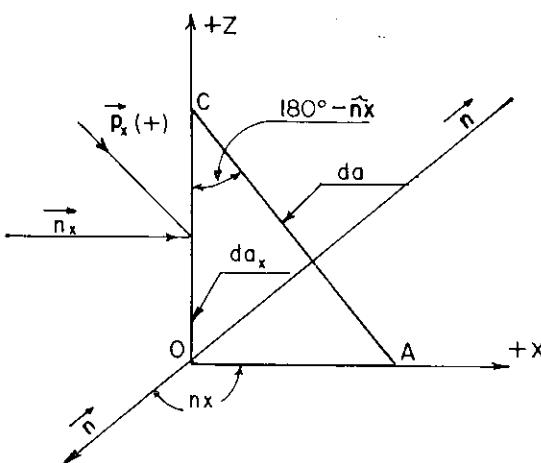


FIGURA N.º 12

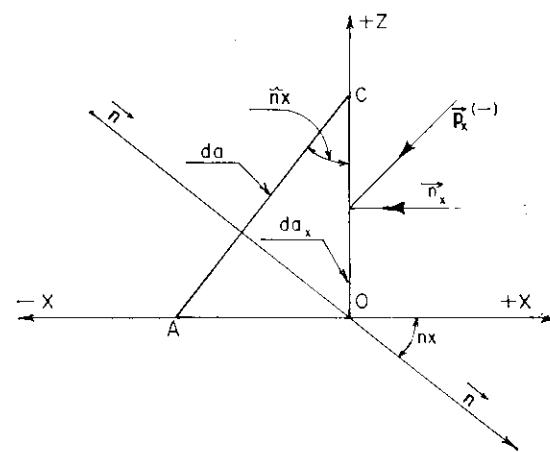


FIGURA N.º 13

No segundo caso (FIGURA N.º 13), a normal interna  $\mathbf{n}_x$  ao elemento  $da_x$ , tem sentido oposto ao eixo  $x$ , logo (ITEM II.1.1) o esforço  $\mathbf{p}_x$  é negativo, e:

Since in most cases 4th degree infinitesimals are negligible:

$$(74) = (15)$$

Likewise, calculating the moments about axes of symmetry parallel to the respective axes  $y$  and  $x$ , equalities (14) and (12) are obtained.

#### A.1.3 — DERIVATION OF EQUATION (22) (see ITEM II.2.2).

Consider (FIGURE No. 5) one of the faces, for instance, the face  $OBC = da_r$ , normal to axis  $x$ . Two possibilities exist: the edge  $OA$  either has the same or opposite direction as axis  $x$ .

In the first case (FIGURE No. 12), the inward-drawn normal  $\mathbf{n}_x$  to the element  $da_x$ , has the same direction as axis  $x$ , therefore stress  $\mathbf{p}_x$  is positive and the internal force will be

But

Therefore

$$(75)$$

In the second case (FIGURE No. 13) the inward-drawn normal  $\mathbf{n}_x$  to the element  $da_x$  has a direction, opposite to axis  $x$ , thus (ITEM II.1.1), stress  $\mathbf{p}_x$  is negative and

$$d\mathbf{E}_x = - \mathbf{p}_x da_x$$

Por outra parte:

On the other hand

$$da_x = da \cos \hat{n}x$$

Por consequência:

Consequently

$$d\mathbf{E}_x = - \mathbf{p}_x da \cos \hat{n}x \quad (76)$$

As (75) e (76) mostram que a expressão de  $d\mathbf{E}_x$  é sempre negativa.

Eqs. (75) and (76) show that expression of  $d\mathbf{E}_x$  is always negative.

Analogamente, considerando os empuxos sobre elementos  $da_y$ ,  $da_z$ , normais aos eixos  $y$  e  $z$ , obtemos:

Likewise, considering internal forces on elements  $da_y$  and  $da_z$ , normal to axes  $y$  and  $z$ , yields

$$d\mathbf{E}_y = - \mathbf{p}_y da \cos \hat{n}y \quad (77)$$

$$d\mathbf{E}_z = - \mathbf{p}_z da \cos \hat{n}z \quad (78)$$

Será, em cada caso, o sinal do coseno, que fixa o sinal do empuxo.

For any case, the cosine sign will establish internal force sign.

Aplicando, então, o 1º princípio da Estática, isto é, somando os empuxos (76), (77), (78), e o empuxo  $ada$ , que age sobre a face  $ABC$ , obtemos a equação (22).

Then, applying the 1st principle of Statics — namely summing internal forces (76), (77), (78) and internal force  $ada$  acting on the face  $ABC$  — eq. (22) is obtained.

#### A.1.4 — OBTEÇÃO DAS EQUAÇÕES (31), (32), (33) (ver ITEM III.1.5).

#### A.1.4 — Eqs. (31), (32), (33) DETERMINATION (see ITEM III.1.5).

Consideraremos (FIGURA N.º 9) os pontos  $a$  e  $d$ , respectivamente, origens dos segmentos  $ac = dz$  e  $db = dy$ , uma vez que, partindo dos referidos pontos, os segmentos são percorridos na direção positivas dos eixos coordenados.

Consider (FIGURE No. 9) two positions  $a$  and  $d$ , starting from which, a point runs across — respectively — the segments  $ac = dz$  and  $db = dy$ , in the same positive direction as coordinate axes.

Quando o centro  $O$  se desloca para a posição  $O_1$ , o deslocamento horizontal da origem  $a$ , é  $aA = \delta y$  e o deslocamento vertical da origem  $d$  é  $DD = \delta z$ .

When the center  $O$  moves to a new position  $O_1$ , the horizontal displacement of the point  $a$  is  $aA = \delta_y$ , while the vertical displacement of the point  $d$  is  $DD = \delta_z$ .

Ter-se-á, então:

Then, we have

$$a'c_* = \frac{\partial \delta_y}{\partial z} dz; \quad d'b_* = - \frac{\partial \delta_z}{\partial y} dy$$

Logo, considerando positivas as rotações anti-horárias (FIGURA N.º 9):

Thus, if counterclockwise rotations are assumed positive (FIGURE No. 9)

$$-\omega_{x,1} = \frac{a'b_*}{dy} = -\frac{\partial \delta_z}{\partial y} \quad (79)$$

$$-\omega_{x,2} = \frac{d'c_*}{dz} = \frac{\partial \delta_y}{\partial z} \quad (80)$$

E, finalmente:

At last

$$\omega_x = -\frac{I}{2} \left( \omega_{x,1} + \omega_{x,2} \right) = -\frac{I}{2} \left( \frac{\partial \delta_z}{\partial y} - \frac{\partial \delta_y}{\partial z} \right) \quad (81)$$

que coincide com a (31).

which identifies itself to eq. (31).

De um modo análogo, calculam-se os ângulos de rotação  $\omega_y$  e  $\omega_z$ , nos planos normais, respectivamente, aos eixos  $y$  e  $z$ .

## B — RELAÇÕES ENTRE ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES

B.1 — RELAÇÕES ENTRE ESFORÇOS  $N_i$  E DEFORMAÇÕES  $i_i$  (ver ITEM III.1.7) — OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES (37), PARTINDO DAS (36).

Somando as equações (36), e posto:

$$i_c = i_x + i_y + i_z \quad (82)$$

temos:

$$-i_c = \frac{m-2}{mE} \left( N_x + N_y + N_z \right) \quad (83)$$

Dai:

$$-\frac{N_y + N_z}{mE} = -\frac{N_x}{mE} + \frac{i_c}{m-2} \quad (84)$$

Mas, da primeira das (36), tira-se:

$$-\frac{N_y + N_z}{mE} = -\frac{N_x}{E} - i_x \quad (85)$$

Igualando os segundos membros das (84) e (85), temos:

$$\frac{N_x}{E} + \frac{m+1}{m} = -i_x - \frac{i_c}{m-2} \quad (86)$$

E, finalmente:

$$N_x = -\frac{m \cdot E}{m+1} i_x - \frac{m \cdot E}{(m+1)(m-2)} i_c \quad (87)$$

E, posto:

And, at last

Taking

$$\frac{m \cdot E}{m+1} = 2 \cdot G \quad (88)$$

$$\frac{2G}{m-2} = \lambda \quad (89)$$

a (87) torna-se:

eq. (87) becomes

$$N_x = -2Gi_x - \lambda i_c \quad (90)$$

Analogamente, obtém-se as duas outras expressões:

Likewise, the following eqs. (91) and (92), are obtained.

$$N_y = -2Gi_y - \lambda i_c \quad (91)$$

$$N_z = -2Gi_z - \lambda i_c \quad (92)$$

### B.2 — RELAÇÕES ENTRE ESFORÇOS TANGENCIAIS $T_i$ E DEFORMAÇÕES ANGULARES $\gamma_i$ .

DETERMINAÇÃO DO ESFÓRÇO  $\sigma$ , NAS DIAGONAIS  $Ob, ac$  (ver ITEM III.1.8).

B.2.1 — Admite-se que, sobre as faces, dos tetraedros, normais aos eixos  $x$  e  $z$ , age exclusivamente o esfôrço tangencial:

$$p_{xz} = p_{zx} = T_y \quad (93)$$

sendo:

$$N_x = N_y = N_z = T_x = T_z = 0$$

Os esforços  $\sigma$ , sobre a base de cada tetraedro, são calculados pelo teorema de CAUCHY (22), que no caso em tela, dá:

$$\sigma_x = T_y \left| \cos \hat{n}x \right| = \frac{T_y}{\sqrt{-2}} \quad (94)$$

$$\sigma_z = T_y \left| \cos \hat{n}z \right| = \frac{T_y}{\sqrt{-2}} \quad (95)$$

Logo

Thus

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_z^2} = T_y \quad (96)$$

Isto é, todos os esforços, se identificam com o valor único  $T_y$ , sendo, cada um, normal a base respectiva. O sentido de  $\sigma$ , será estabelecido pelos sinais — positivo ou negativo — de  $\sigma_x$  e  $\sigma_z$ , logo de  $\cos \hat{n}z$  e  $\cos \hat{n}x$ .

B.2.2 — Por brevidade, chamaremos *vértice principal* de um tetraedro de CAUCHY, o ponto de interseção das três arestas paralelas aos eixos coordenados e *base* a face, oposta ao próprio vértice principal. Façamos referência ao cubo da FIGURA N.<sup>o</sup> 11, e consideremos (FIGURA N.<sup>o</sup> 14) os 4 tetraedros — indicados a seguir — a base de cada um dos quais, tem inclinação de 45°, em relação as faces do cubo.

- 1 — Com vértice principal em  $O$  e base  $acd$ .
- 2 — Com vértice principal em  $b$  e base  $acf$ .
- 3 — Com vértice principal em  $c$  e base  $Obg$ .
- 4 — Com vértice principal em  $a$  e base  $Obe$ .

### B.2 — RELATIONS BETWEEN TANGENTIAL STRESSES $T_i$ AND ANGULAR DEFORMATIONS $\gamma_i$ . DETERMINATION OF STRESS $\sigma$ , ON DIAGONALS $Ob, ac$ (see ITEM III.1.8).

B.2.1 — It is assumed that, on tetrahedron faces, normal to axes  $x$  and  $z$ , tangential stress

only is acting, since

$$N_x = N_y = N_z = T_x = T_z = 0$$

Stresses  $\sigma$ , acting on the basis of each tetrahedron, were calculated by CAUCHY's theorem, which for this case is

Thus

This implies that all the stresses  $\sigma$ , are normal to the corresponding base and identify themselves to a single value  $T_y$ . The direction of  $\sigma$ , will be established by signs — positive or negative — of  $\sigma_x$  and  $\sigma_z$ , therefore, of  $\cos \hat{n}z$  and  $\cos \hat{n}x$ .

B.2.2 — Main vertex of CAUCHY's tetrahedron, will be called the point-intersection of three edges parallel to co-ordinate axes and the basis will be called the face opposite to said vertex. Consider the same cube as in FIGURE No. 11 and four tetrahedra (FIGURE No. 14), having respectively:

- 1 — Main vertex  $O$ , basis  $acd$ .
- 2 — Main vertex  $b$ , basis  $acf$ .
- 3 — Main vertex  $c$ , basis  $Obg$ .
- 4 — Main vertex  $a$ , basis  $Obe$ .

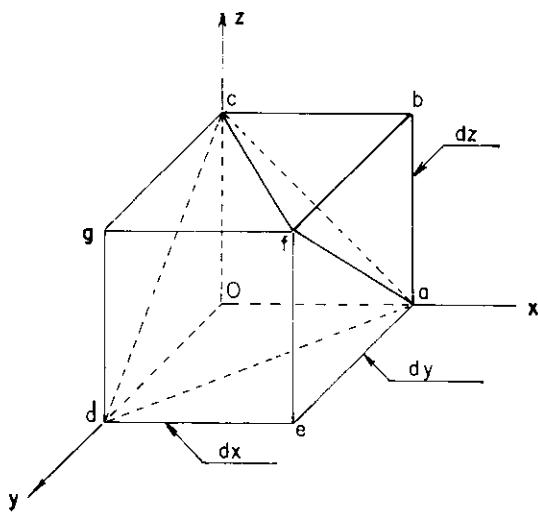


FIGURA N.º 14-a

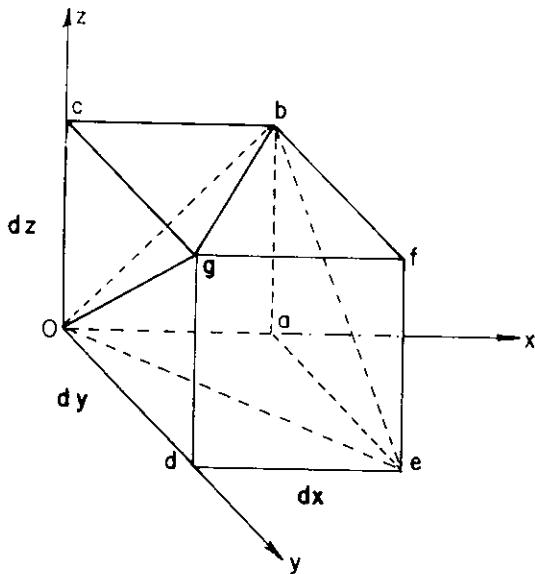


FIGURA N.º 14-b

A aresta  $ac$  é comum aos tetraedros 1) e 2), em quanto a aresta  $Ob$  é comum aos tetraedros 3 e 4. Por outra parte,  $Ob$  e  $ac$ , são as diagonais da face  $Oabc$  do cubo.

Para facilitar o exame, consideremos as projeções, sôbre a face  $Oabc$ , dos 4 tetraedros (FIGURA N.º 15), representados, respectivamente, pelos triângulos:  $cOa$  (1),  $cba$  (2),  $bcO$  (3),  $baO$  (4).

Traçadas as normais internas  $n$ , indicamos os ângulos  $nx$  e  $nz$ , para as quatro posições (1), (2), (3), (4).

Reunimos no QUADRO N.º 3, os valores dos cosenos, de  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ .

It is emphasized that the angles between those bases and faces of cube, are  $45^\circ$  angles.

Edge  $ac$  belongs to tetrahedra 1) and 2), while edge  $Ob$  is common element of tetrahedra 3) and 4). On the other hand,  $Ob$  and  $ac$  are diagonals of cube face  $Oabc$ .

To make easy the explanation, the projections of four tetrahedra — represented, respectively, by the triangles  $cOa$  (1),  $cba$  (2),  $bcO$  (3),  $baO$  (4) in FIGURE No. 15 — on the face  $Oabc$ , are considered.

The angles between inward-drawn normal  $n$  and axes  $x(nx)$  and  $z(nz)$  are shown for the positions (1), (2), (3), (4).

Values of  $\cos \hat{nx}$ ,  $\cos \hat{nz}$ ,  $\sigma_x$  and  $\sigma_z$  are united in TABLE No. 3.

Posição (Description)	$\cos \hat{nx}$	$\cos \hat{nz}$	$\sigma_x$	$\sigma_z$
1)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$
2)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$
3)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$
4)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$	$-\frac{T_y}{\sqrt{2}}$

Os dados do QUADRO N.<sup>o</sup> 3, nos permitem completar a FIGURA N.<sup>o</sup> 15, traçando  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  e  $\sigma$ , nos 4 triângulos e indicando o sentido do esforço  $\sigma = T_y$ , que age ao longo das duas diagonais do quadrado  $Oabc$ .

Data in TABLE No. 3, help to complete FIGURE No. 15, drawing  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  and  $\sigma$ , on 4 triangles and showing stress  $\sigma = T_y$  direction, acting along square  $Oabc$ 's two diagonals.

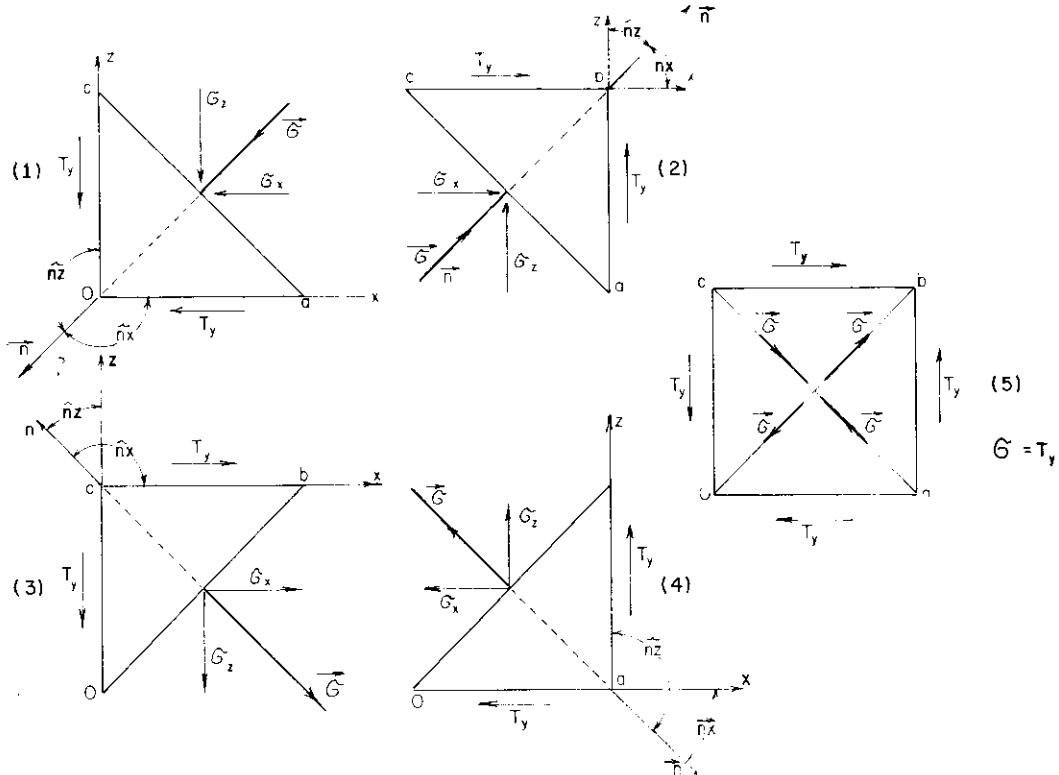


FIGURA N.<sup>o</sup> 15

C — DETERMINAÇÃO DE  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ , NA FORMA (55) (ver ITENS IV.2 e IV.3)

Das equações (90), (91) e (92), levando em conta as (53), tira-se:

$$N_x - N_y = 2\mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (97)$$

$$N_x - N_z = 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (98)$$

Ou melhor:

Or better

$$2N_x - (N_y + N_z) = 2\mu \left( \operatorname{div} \mathbf{V} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (99)$$

Porém, em virtude da (54):

But, by virtue of eq. (54)

$$\therefore (N_y + N_z) = N_x - 3p \quad (100)$$

Substituindo a expressão (100) na equação (99):

Combining eqs. (100) and (99)

C — DETERMINATION OF  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$ , EXPRESSED BY Eqs. (55) (see ITENS IV.2 AND IV.3)

Eqs. (90), (91), (92) and (53) combine to give

$$N_x = p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V} - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (101)$$

Tirando  $N_y$  e  $N_z$ , respectivamente, das equações (97) e (98), e, substituindo  $N_x$  pela expressão (101), teremos também:

$$N_y = p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V} - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (102)$$

$$N_z = p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{V} - 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (103)$$

## D — OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES GERAIS PARA OS FLUIDOS

**D.1 — EQUAÇÕES INDEFINIDAS** (ver ITEM V.1). Lancemos mãos da primeira das equações (21), e substituimos  $N_x$ ,  $T_z$  e  $T_y$  pelas (55): Ter-se-á:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{V} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x} \\ \frac{\partial T_z}{\partial y} &= -\mu \frac{\partial u}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial T_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

E, somando as 3 equações precedentes:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_z}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{V} - \mu \nabla^2 u \quad (104)$$

Operando de um modo análogo na 2.<sup>a</sup> e na 3.<sup>a</sup> equação, teremos:

$$\frac{\partial T_z}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T_x}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{V} - \mu \nabla^2 v \quad (105)$$

$$\frac{\partial T_y}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial y} + \frac{\partial N_z}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{V} - \mu \nabla^2 w \quad (106)$$

## D.2 — DETERMINAÇÃO DA EQUAÇÃO ÚNICA (ver ITEM VI.1).

As parcelas de equação (58), projetadas na direção do movimento de uma partícula, tornam-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot ds &= \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} = \frac{d|\mathbf{V}|^2}{2} = V \cdot dV = V \left( \frac{\partial V}{\partial s} ds + \frac{\partial V}{\partial t} dt \right) = \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial s} \frac{V^2}{2} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) ds \end{aligned}$$

Drawing  $N_x$  and  $N_z$ , respectively, from eqs. (97) and (98) and substituting eq. (101) for  $N_y$  it is also obtained

## D — CALCULATION OF GENERAL EQUATIONS FOR FLUIDS

**D.1 — INDEFINITE EQUATIONS** (see ITEM V.1). Consider the first of eqs. (21) and substitute eqs. (55) for  $N_x$ ,  $T_z$  and  $T_y$ . It will be

Summing the foregoing equations

Likewise, considering the 2nd and the 3rd of eqs. (21) we obtain

## D.2 — DETERMINATION OF THE "SINGLE" EQUATION (see ITEM VI.1).

The terms of eq. (58), projected along the trajectory of a particle, respectively become:

$$\frac{\partial p}{\partial s} ds ; \frac{\partial}{\partial s} (\operatorname{div} \mathbf{V}) ds - \frac{ds}{V} \left( \nabla^2 u \frac{dx}{dt} + \nabla^2 v \frac{dy}{dt} + \nabla^2 w \frac{dz}{dt} \right) =$$

$$\frac{ds}{V} (u \nabla^2 u + v \nabla^2 v + w \nabla^2 w) = - \frac{\psi}{V} ds$$

Substituindo na (58) para cada parcela, a nova expressão, obtemos a equação (61).

### D.3 — OBTENÇÃO DO PRINCÍPIO DE BERNOULLI (ver ITEM VI.2).

D.3.1 — Suponhamos que as forças externas:

$$\mathbf{F} = X \cdot \mathbf{i} + Z \cdot \mathbf{j} + Y \cdot \mathbf{k}$$

dependem de um potencial  $U(x, y, z)$ , sendo entanto:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z \quad (107) \quad \frac{\partial U}{\partial s} = \mathbf{F} \quad (107')$$

Substituindo a (107') na (61), teremos:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( -U + \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{\beta\rho} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) - \frac{\mu}{\rho} \frac{\psi}{V} \quad (108)$$

D.3.2 — No campo da gravidade, em que:

$$\mathbf{F} = g \quad X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = -g$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dz}$$

da 3.<sup>a</sup> equação (107), tira-se, integrando:

the third equation (107), integrated gives

$$U = -gz + \text{const.}$$

Substituindo-se, na (108), e integrando entre  $s_1$  e  $s_2$ , obtém-se a equação (62).

The foregoing expression of  $U$  must be introduced into eq. (108), which, integrated between  $s_1$  and  $s_2$ , becomes eq. (62).

### E — OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO GLOBAL (ver ITEM VII.1)

E.1 — A equação (58), substituindo-se a derivada total  $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ , pela sua expressão, e integrando no volume  $\tau$ , limitado pela superfície  $\sigma$ , torna-se:

$$\int_{\tau} \rho \left( \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) d\tau = \int_{\tau} \left[ \operatorname{grad} \left( p - \frac{\mu}{s} \operatorname{div} \mathbf{V} \right) - \mu \nabla^2 \mathbf{V} \right] d\tau +$$

$$+ \int_{\tau} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} u + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} v + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} w \right) d\tau \quad (109)$$

### E — DETERMINATION OF GLOBAL (see ITEM VII.1)

E.1 — Substituting the corresponding expression for the total derivative  $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$  and integrating with respect to volume  $\tau$ , limited by surface,  $\sigma$ , eq. (58) becomes

E.2 — Calculemos as integrais do 2º membro.

1) Em virtude da expressão de *gradiente* e pelo lema de GREEN, temos:

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right) d\tau = - \int_{\sigma} p \left( \mathbf{i} \cdot \cos \hat{n}x + \mathbf{j} \cdot \cos \hat{n}y + \mathbf{k} \cdot \cos \hat{n}z \right) d\sigma \quad (110)$$

2) Pela definição de *divergência* e pelo lema de GREEN:

$$-\frac{\mu}{3} \int_{\tau} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\tau = -\frac{\mu}{3} \int_{\sigma} (u \cdot \cos \hat{n}x + v \cdot \cos \hat{n}y + w \cdot \cos \hat{n}z) d\sigma \quad (111)$$

Logo:

Thus

$$-\frac{\mu}{3} \operatorname{grad} \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{V} \cdot d\tau = -\frac{\mu}{3} \operatorname{grad} Q \quad (111')$$

3) Recordando a expressão do operador de LAPLACE, e, aplicando o lema de GREEN:

$$-\mu \int \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \right) d\tau = \mu \int \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \cos \hat{n}x + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} \cos \hat{n}y + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} \cos \hat{n}z \right) d\sigma \quad (112)$$

4) Recordando o lema de GREEN e a definição de *divergência*:

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} w \right) d\tau &= \int_{\tau} \left[ \frac{\partial (\rho u \mathbf{V})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v \mathbf{V})}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial (\rho w \mathbf{V})}{\partial z} \right] d\tau - \int_{\tau} \mathbf{V} \left[ \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] d\tau = \\ &= - \int_{\tau} \rho \mathbf{V} (u \cos \hat{n}x + v \cos \hat{n}y + w \cos \hat{n}z) d\tau - \int_{\tau} \mathbf{V} \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) d\tau \end{aligned}$$

Mas, em virtude da equação da continuidade:

E.2 — Calculate the integrals of the second member.

1) By virtue of expression of *gradient* and GREEN's lemma, it is

But, by virtue of equation of continuity

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Assim pois poderemos escrever:

Therefore, it may be written

$$\int_{\tau} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} w \right) d\tau = - \int_{\sigma} \rho \mathbf{V} \cdot \mathbf{V}_n d\sigma + \int_{\tau} \mathbf{V} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (113)$$

Substituindo na (109), as expressões equivalentes (110), (111'), (112) e (113), obtemos a *equação global* (65).

Eqs. (109), (110), (111'), (112) and (113), combine to give the *global equation or momentum equation* (65).