MÉTODO GERAL DE CÁLCULO DAS RÊDES HIDRÁULICAS

Por Tufi M. Assy *

1 — SUMÁRIO

Até há pouco tempo a preocupação dominante dos trabalhos versando sôbre a análise das rêdes de distribuição, consistia em resolver um conjunto de equações não lineares que regem o seu comportamento hidráulico. Os diâmetros dos condutos, os coeficientes de resistência e as vazões nos nós eram considerados dados e o problema era resolvido por linearização mais ou menos engenhosa daquelas equações em relação às incógnitas que podiam ser ou as cargas piezométricas nos nós ou as vazões nos diversos tramos da rêde. Êste tipo de solução é apenas um aspecto particular de uma análise bem mais ampla que os sistemas de transporte para adução e distribuição podem suscitar. Aspectos operacionais, contrôle e outros são igualmente importantes, e precisam ser analisados. Com vistas a êste objetivo, o Autor propõe um método geral de cálculo capaz de determinar o comportamento hidráulico da rêde para uma combinação qualquer de incógnitas. As rêdes podem conter elementos hidráulicos quaisquer (condutos, válvulas, bombas, reservatórios) de curvas caracteristicas conhecidas, e as incógnitas podem ser combinações de vazões nos tramos e/ou vazões nos nós e/ou coeficientes de resistência. As equações são desenvolvidas para as malhas (1) e o balanceamento é feito com as diversas incógnitas em jôgo pela introdução sucessiva de correções, raízes de sistemas de equações lineares (2).

* Da Consultoria de Estudos Especiais da Comasp.

(1) Com objetivos idênticos foi proposto recentemente (1968) um método geral em que o equacionamento se desenvolve nos nós da rêde e entre as incógnitas se incluem cargas piezométricas. Cf. Shamir, U. e Howard, C., Water Distribution Systems Analysis. Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Jan-1968.

(2) O presente trabalho é em essência, um método apresentado pelo Autor acrescido de um desenvolvimento complementar. Cf. Assy, T. M., Rêdes de Distribuição de Água. Cálculo Numérico e Analógico. Tese ao concurso de Livre Docência EPUSP - 1959. Ver também Assy, T. M. — Métodos de Cálculo das Rêdes Hidráulicas. Revista D.A.E. Ano XXVIII - n.º 70 - dez. 1968.

2 — FUNDAMENTOS TEÓRICOS E CONVENÇÕES

A rêde hidráulica compreende L condutos de diâmetros dados, M malhas independentes, N nós e sua geometria é conhecida. Q_{ij} e $\triangle H_{i,j}$ indicam respectivamente a vazão e o gradiente de energia referentes ao elemento hidráulico comum à malha de n.º i e à malha de n.º j. Se entre i e j não há elemento hidráulico que lhes seja comum, então $Q_{ij} = 0$ ou $\triangle H_{i,j} = 0$. (V. n.º 6).

O equacionamento das rêdes hidráulicas pressupõe um sentido de percurso a ser atribuído às malhas, igual para tôdas. O usual é considerar êsse sentido coincidente com o dado pela marcha dos ponteiros do relógio. Convencionam-se positivas as vazões (e não necessàriamente os gradientes de energia), nos tramos ij (comuns às malhas i e j) quando o sentido de circulação do líquido nesse tramo é coincidente com o sentido de percurso para a malha a que pertence o referido tramo. Se Q_{ij} é a vazão vista da malha i e Q_{ji} a vazão vista da malha j, ambas estabelecidas nas mesmas seções do tramo ij, tem-se evidentemente $Q_{ij} = - Q_{ji}$.

Em decorrência desta convenção as vazões saindo e entrando nos nós passam a ser precedidas de sinais algébricos apropriados. Cercando o nó por uma superfície de contrôle que secciona todos os condutos que nêle concorrem, ver-se-á que as vazões são positivas se, vistas da malha i, e saindo do nó s = 1,2, N, o líquido circula no sentido do percurso adotado para a referida malha i. Ao contrário, são negativas se, vistas da malha i, e entrando no nó o líquido circula no sentido do percurso adotado para a referida malha i.

Pela mesma razão as vazões externas que concorrem no nó são positivas se saem do nó e negativas em caso contrário. Respeitadas estas convenções de sinais o problema das rêdes hidráulicas pode ser enunciado como segue: determinar uma distribuição de vazões Q_{ij} e C_s que, satisfazendo à equação da continuidade em todos os nós, os gradientes de energia resultantes para todos os elementos hidráulicos intervenientes (condutos, bombas, válvulas, reservatórios) devem ser tais que:

$$\sum_{j=1}^{\overline{M}} \Delta H_{ij} = 0 \qquad i = 1,2, \ldots\ldots M$$

onde ΔH_{ij} representa uma perda de carga h_{fij} se o elemento hidráulico é um conduto ou uma válvula e representa um ganho de energia se o elemento hidráulico é uma bomba.

A perda de carga está ligada à vazão por fórmulas do tipo, que preservam o mesmo sinal a ambas as variáveis

$$h_{f_{ij}} = K_{ij} \left| Q_{ij} \right|^{n-1} Q_{ij}$$

onde n é um número dado e K_{ij} é o coeficiente de resistência. No caso de um conduto e empregando a fórmula universal de perda de carga, tem-se n=2 e

$$K = f \frac{8}{g \pi^2} \frac{L_o}{D^5}$$

onde L_o é o comprimento do conduto, D o diâmetro e f é dado pela fórmula de Colebrock e White

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1{,}74 - 2{,}0 \log_{10} \left[\frac{2K_o}{D} + \frac{18{,}7}{R\sqrt{f}} \right]$$

onde K_o é a rugosidade uniforme equivalente e R é o n.º de Reynolds.

No caso de uma bomba, incorporada à rêde entre as seções extremas do conduto ij, o gradiente de energia é dado pela carga manométrica da bomba. Supõe-se que a bomba é um conduto fictício cujas seções extremas são as seções de entrada e saída da bomba e cuja curva característica é a curva característica da bomba que se pode pôr sob a forma:

$$H_{ij} = \begin{cases} H_o & \text{Para } Q_{ij} = O \\ H_o + m\, Q_{ij}^n & \text{para } Q_{ij} > O \end{cases}$$

H_o, m, n são constantes a determinar a partir da curva característica da bomba. Se são M malhas engendradas pelo sistema de transporte para adução ou distribuição, então M equações simultâneas não lineares podem ser escritas e portanto M incógnitas podem ser determinadas. Parte destas incógnitas são auxiliares, introduzidas para gerar um maior número de incógnitas principais como vazões nos nós e nos tramos.

Para a rêde a ser resolvida, a combinação das incógnitas principais deve atender a determinadas condições, examinadas mais adiante. Como as equações simultâneas não são lineares, a solução pode ser obtida por iterações sucessivas, usando, como se expõe a seguir, um método adequado que conduz à convergência.

3 — O MÉTODO

Construa-se a seguinte função, associada à malha i,

$$H_i = \sum_{j=1}^{\overline{M}} \Delta H_{ij} \qquad i = 1, 2, \ldots M \qquad (2)$$

que reúne sob o sinal da soma os gradientes de energia, ligadas aos tramos que cercam a referida malha. Quando as malhas i e j não possuem tramos em comum, pomos

$$\Delta H_{ij} = O$$

Como o número de incógnitas que comparecem no sistema de equações (1), em têrmos de K_{ij} e Q_{ij} é excessivamente grande em relação ao número de equações, que por sua vez é o número de malhas engendradas pela rêde, recorremos a um artifício que é o de operar uma mudança de incógnitas de maneira que as novas variáveis, ditas agora incógnitas auxiliares, sendo de número reduzido ao mínimo é capaz de gerar o maior número possível de incógnitas principais a serem estabelecidas para a rêde. A mudança de incógnitas é mais indicada para as vazões Q_{ij}. Sejam Q_i, i= 1,2, ... M, vazões fictícias associadas às malhas i, que desempenham o papel de incógnitas auxiliares, e C_{ij}, constantes a determinar, dadas pela relação $Q_{ij} = Q_i - Q_j + C_{ij}$ e sujeitas às mesmas convenções de sinais dos Q_{ij}. As propriedades características desta relação e o significado dos C_{ij} serão adiante precisadas. Sejam agora $Q_i \, \varepsilon \, \bar{Q}$ e $K_{ij} \, \varepsilon \, \bar{K}$ o grupo de incógnitas selecionadas para uma dada rêde hidráulica. H_i é uma função dessas variáveis. Para linearizar o sistema de equações (2) desenvolvemos H_i, pela fórmula de Taylor adstrita à derivada de 1.ª ordem. Sendo $Q_i^{(\alpha)} \, \varepsilon \, \bar{Q}$ e $K_{ij}^{(\alpha)} \, \varepsilon \, \bar{K}$ os valores das incógnitas decorrentes da iteração de ordem (α) e pondo:

$$H_i^{(\alpha)} = H_i \left[Q_j^{(\alpha)}, K_{ij}^{(\alpha)} \right] \neq O$$

resulta:

$$H_i^{(\alpha+1)} = H_i^{(\alpha)} + \sum_{K_{ij} \varepsilon \bar{K}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial K_{ij}} \right)^{(\alpha)} \Delta K_{ij} + \sum_{Q_j \varepsilon \bar{Q}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} \right)^{(\alpha)} \Delta Q_j$$

donde o sistema de equações lineares nas incógnitas ΔQ_j e ΔK_{ij} [Cf. (1)]:

$$\sum_{K_{ij} \varepsilon \overline{K}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial K_{ij}}\right)^{(\alpha)} \triangle K_{ij} + \sum_{Q_j \varepsilon \overline{Q}} \left(\frac{\partial H_i}{\partial Q_j}\right)^{(\alpha)} \triangle Q_j =$$

$$= - H_i^{(\alpha)}, \qquad i = 1,2, \ldots \ldots M \qquad (3)$$

onde:

$$\frac{\partial H_i}{\partial K_{ij}} = \frac{h_{f_{ij}}}{K_{ij}} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial H_i}{\partial Q_{ij}} \cdot \frac{\partial Q_{ij}}{\partial Q_j} = - n \frac{h_{f_{ij}}}{Q_{ij}} \qquad j \neq J \qquad (5)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} = - \frac{\partial (\triangle H_{i,j})}{\partial Q_{ij}} \qquad j = J \qquad (6)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_i} = \frac{\partial H_i}{\partial Q_{ij}} \cdot \frac{\partial Q_{ij}}{\partial Q_i} = - \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{\overline{M}} \frac{\partial H_i}{\partial Q_j} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial H_j}{\partial Q_i} \qquad (8)$$

As equações (5) e (6) procedem quando no tramo iJ está instalado um elemento hidráulico, de curva característica especial (bomba, p. ex.) função contínua, porém com derivada descontínua. Tais pontos de descontinuidade das derivadas devem ser examinados em cada iteração para ajustar cuidadosamente os coeficientes que intervêm no sistema de equações(3). Ao fazer $Q_{ij} = Q_i - Q_j + C_{ij}$ (9)

está-se implicitamente admitindo que os C_{ij} satisfazem à equação da continuidade nos nós.

As seguintes propriedades são então decorrentes:

a) Se a vazão Q_{ij} em um tramo ij é considerada um dado do problema, tem-se da relação (9): $\triangle C_{ij} = \triangle Q_j - \triangle Q_i$

Portanto, as vazões nos nós extremos do tramo ij consideram-se incógnitas se no decorrer das iterações fôr sempre admitido que $Q_i \neq Q_j$ e consideram-se dados do problema se fôr sempre admitido que $Q_i = Q_j$

b) Se a vazão C_{ij} num tramo ij é considerada um dado do problema, tem-se da mesma relação (9): $\triangle Q_{ij} = \triangle Q_i - \triangle Q_j$

à qual se aplicam as considerações anteriores. Conclui-se ainda que a vazão fictícia a ser associada a cada região exterior às malhas de rêde é uma constante arbitrária.

Estimada uma hipótese de funcionamento da rêde, determinam-se as incógnitas principais que devem figurar como intervenientes e em correspondência se esboçam as incógnitas auxiliares que juntamente com algumas incógnitas principais devem perfazer o total de M incógnitas (pois são M malhas e portanto M equações), para se escrever em seguida o sistema de equações (3). A matriz dos coeficientes deverá ter característica igual a M para que a solução exista e seja única em relação às referidas incógnitas.

A solução do sistema de equações (3) fornece uma nova distribuição das incógnitas, segundo as relações $Q_{ij}^{(\alpha+1)} \; Q_{ij}^{(\alpha)} - \triangle Q_{ij}$, $C_s^{(\alpha+1)} = C_s^{(\alpha)} + \triangle C_s$, $K_{ij}^{(\alpha+1)} = K_{ij}^{(\alpha)} + \triangle K_{ij}$, que será uma solução aceitável para a rêde se, para qualquer malha i, se verificar $| H_i^{(\alpha)} | < \varepsilon_o$, onde ε_o é um êrro prèviamente fixado. Em caso contrário, será preciso passar à iteração seguinte, recalculando sucessivamente os coeficientes do sistema (3), os acréscimos $\triangle K_{ij}$, $\triangle Q_i$, a nova estimativa das incógnitas principais e os valores $H_i^{(\alpha+2)}$ para cotejá-los com o êrro permitido ε_o.

Nota: Quando as vazões nos nós e os coeficientes de resistência intervêm como dados para uma fixada análise da rêde, e as vazões nos tramos se constituem em incógnitas para essa análise, o sistema de equações (3) assume a forma particular dada por

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{\overline{M}} n \frac{hf_{ij}}{Q_{ij}} \cdot \triangle Q_j - \left[\sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{\overline{M}} n \frac{hf_{ij}}{Q_{ij}} \right] \triangle Q_i = H_i \qquad (10)$$

onde os coeficientes são os dados pelas fórmulas (5) e (7). O sistema de equações (10) é precisamente o obtido anteriormente pelo Autor (3).

Exemplo: Para realçar as possibilidades do método, consideramos, como exemplo, uma rêde muito simples, formada por duas malhas como ilustrada na fig. 1. Os seguintes casos podem ser propostos:

a) As vazões nos nós e os coeficientes de resistência são fixos e as vazões nos tramos são incógnitas. Neste caso as correções serão dadas por:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial H_4}{\partial Q_4} & \dfrac{\partial H_4}{\partial Q_5} \\ \dfrac{\partial H_5}{\partial Q_4} & \dfrac{\partial H_5}{\partial Q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \triangle Q_4 \\ \triangle Q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - H_4 \\ - H_5 \end{bmatrix}$$

V. Fórmulas (5) a (7) ou (10).

b) Os coeficientes de resistência e a vazão

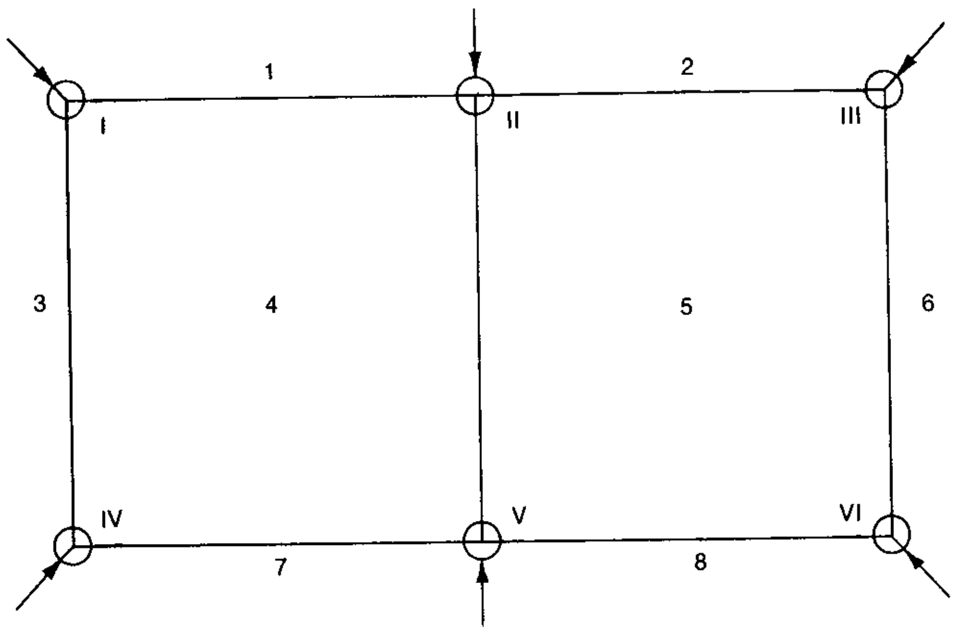
Q_{34} são fixos porém C_I, C_{IV}, e as vazões nos tramos (excluindo naturalmente Q_{34}) são incógnitas.

Neste caso as correções serão dadas pelo sistema de equações anterior, com $\partial H_4 / \partial Q_4$ desfalcado do têrmo relativo a Q_{43}.

c) As vazões Q_{45} e nos nós são fixos, as demais vazões nos tramos e o coeficiente de resistência K_{43} são incógnitas: Neste caso fazemos $Q_4 = Q_5$, donde:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_4}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_4}{\partial K_{43}} \\ 0 & \frac{\partial H_5}{\partial Q_5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta Q_4 \\ \Delta K_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_4 \\ -H_5 \end{bmatrix}$$

com $\frac{\partial H_4}{\partial Q_4}$ e $\frac{\partial H_5}{\partial Q_5}$ desfalcados do têrmo referente a Q_{45}.



4 — TESTE DE SENSIBILIDADE

O processo acima descrito permite avaliar o comportamento hidráulico da rêde para M variáveis, prèviamente selecionadas e suscetíveis de mudanças simultaneamente. O problema que ora se apresenta consiste em, sendo conhecida uma solução hidráulica $H_1 = 0$, $i = 1,2, \ldots \ldots$ M para uma dada hipótese de funcionamento da rêde, determinar as variações sofridas por um conjunto prèviamente selecionado de variáveis em função da variação sofrida por uma única variável não pertencente ao conjunto antes mencionado, e recìprocamente. A solução dêste problema tem interêsse, inclusive, para estabelecer regras operacionais para a rêde.

Selecionemos então as variáveis Q_j, K_{ij} ε X, genèricamente designados por x_p, $p = 1,2, \ldots \ldots$ M, suscetíveis de sofrer cada uma de per si a alteração Δx_p em consequência de uma alteração Δy_q sofrida por uma determinada variável y_q não pertencente ao conjunto mencionado X, sendo x_p e y_q tais que: $H_i (x_1 \ldots \ldots x_m, y_q) = O$. Estas alterações podem ser obtidas, pondo

$$\frac{dH_i}{dy_q} = O$$

relação que conduz a

$$\sum_{x_p \varepsilon X} \frac{\partial H_i}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial y_q} = - \frac{\partial H_i}{\partial y_q} \qquad i = 1,2, \ldots \ldots M \tag{11}$$

Resolvendo êste sistema de equações em relação às incógnitas $\partial x_p / \partial y_q$ as alterações procuradas serão dadas por $\triangle x_p = (\partial x_p / \partial y_q) \triangle y_q$. Os coeficientes $\partial H_i / \partial x_p$ e $\partial H_i / \partial y_q$ são obtidos da rêde suposta balanceada. Quando x_p é uma vazão fictícia Q_p, será lícito escrever:

$$\frac{\partial H_i}{\partial Q_p} = \frac{\partial H_i}{\partial Q_{ip}} \cdot \frac{\partial Q_{ip}}{\partial Q_p}.$$

O sistema de equações (11) adquire a seguinte forma matricial

$$\left[\frac{\partial H_i}{\partial Q_p}\right] \left[\frac{\partial x_p}{\partial y_q}\right] = \left[- \frac{\partial H_i}{\partial_y}\right] \qquad (12)$$

em que o 2º membro e o 2º fator do 1º membro indicam matrizes-coluna. Cabem aqui considerações idênticas às apresentadas para o sistema de equações (3).

Exemplo: Considere-se a rêde ilustrada na fig. 1, suposta balanceada. A uma manobra da válvula colocada no tramo 56 as vazões Q_4 e Q_5 sofrem variações $\frac{\partial Q_4}{\partial H_{56}}$ e $\frac{\partial Q_5}{\partial K_{56}}$ dados por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_4}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_4}{\partial Q_5} \\ \frac{\partial H_5}{\partial Q_4} & \frac{\partial H_5}{\partial H_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_4}{\partial K_{56}} \\ \frac{\partial Q_5}{\partial K_{56}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ - \frac{\partial H_5}{\partial K_{56}} \end{bmatrix}$$

onde os elementos da matriz quadrada são os configurados pelas fórmulas (3) a (8).

5 — CONCLUSÃO

Desenvolveu-se um método geral de cálculo das rêdes hidráulicas aplicável a uma diversidade de hipóteses de funcionamento. As incógnitas podem ser reunidas em um conjunto contendo isolada ou combinadamente vazões nos nós, vazões nos tramos e coeficientes de resistência. A solução de cada problema esfecífico é obtida por iterações sucessivas, corrigindo as incógnitas, em cada etapa, com incrementos que são raízes de um sistema de equações lineares. Como a ordem dêste sistema de equações é reduzida (pois é igual ao número de malhas, engendradas pela rêde), o método implica em economia de tempo se fôr utilizada a computação digital. Um teste de sensibilidade foi também apresentado. A técnica de computação é muito simples, consistindo, pràticamente, na solução de um sistema de equações lineares.

6 — CONVENÇÕES E NOTAÇÕES

As malhas são enumeradas de 1 a M. Consideram-se para efeito dessa numeração as M malhas internas e as malhas externas à rêde. Estas últimas são fictícias servindo apenas para individualizar um tramo comum a duas malhas contíguas.

- i — índice designativo dos números 1 a M.
- j — índice designativo dos números 1 a M.
- ij — par de índices que caracteriza um tramo comum às malhas i e j.
- Q_{ij} — vazão nas seções do tramo ij
- h_{fij} — perda de carga distribuida do tramo ij.
- $\triangle H_{ij}$ — gradiente de energia no tramo ij.
- C_s — vazão no nó s= 1,2, . . .N.
- Q_i — vazão fictícia associada à malha i.
- K_{ij} — coeficiente de resistência do conduto ou da válvula instalada no tramo ij.
- C_{ij} — vazão nas seções extremas (nós) por contribuição do tramo ij.
- $\overline{K}$ — conjunto das incógnitas K_{ij}.
- $\overline{Q}$ — conjunto das incógnitas Q_i
- ε_0 — é um número arbitrário, prèviamente fixado.
- ε — símbolo indicativo de pertinência.