Método de Cálculo das Rêdes Hidráulicas por Computação Digital

TUFI MAMED ASSY (*)
MILTON GONÇALVES SANCHEZ (**)
ALEXANDRE YUDENITSCH (***)

Setor de Planejamento Técnico da Companhia Metropolitana de Água de S. Paulo — COMASP

Em um trabalho publicado por um dos autores (1), ficou demonstrado que as rêdes hidráulicas, projetadas em forma de malhas, são regidas por sistemas de equações lineares em que as incógnitas são acréscimos de vazão nos tramos ou de cargas piezométricas nos nós, para cuja solução foram aventadas técnicas de resolução por via numérica e analógica.

Propomo-nos, nêste trabalho, abordar o referido método tendo em vista a técnica da computação digital. O procedimento que se segue é o do balanceamento das vazões, que ocorre com mais freqüência na prática. A extensão da técnica à resolução do balanceamento das cargas piezométricas não oferece dificuldades. O leitor desejoso de conhecer os fundamentos teóricos do método poderá fazê-lo consultando a bibliografia citada no final do presente trabalho.

O MÉTODO

a) Tendo sido traçada a rêde de malhas, feitas as estimativas dos diâmetros, e indicadas nas seções e nos vários nós as vazões (de entrada ou saída), atribui-se um sentido de percurso às malhas (igual para tôdas), conforme se vê na fig. 1.

b) Em seguida, elabora-se uma distribuição inicial das vazões nos diversos tramos da rêde de um modo arbitrário, satisfazendo porém, à equação da continuidade (tanto em nós quanto em seções), convencionando-se positivas as vazões nos tramos quando o sentido de circulação de água nesse tramo é coincidente com o sentido de percurso adotado para a malha a que o tramo pertence.

Assim, se na fig. 1 a circulação da água no tramo (1) se dá no sentido aí indicado, a vazão é positiva nesse tramo para quem a vê da malha n.º 1, e negativa para quem a vê da malha n.º 3.

c) Finalmente, são lidos como dados os valores dos comprimentos, diâmetros, e vazões iniciais adotadas (com sinal) para todos os tramos de tôdas as malhas.

Para êste fim, todo o meio exterior à rêde de malhas é considerado como uma malha fictícia, a fim de manter a coerência da nomenclatura adotada:

(*) Professor da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
(**) Engenheiro Mecânico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
(***) Engenheiro Eletricista pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Uma variável genérica seria indexada do seguinte modo:

$$X_{i,\,j,\,k} \quad \text{onde:}$$

i = número da malha estudada (varia de 1 a p).

j = número da malha adjacente à malha "i" que se está considerando (varia de 1 a p).

k = número do tramo do trecho em comum entre as malhas "i" e "j" considerado (varia de 1 a r).

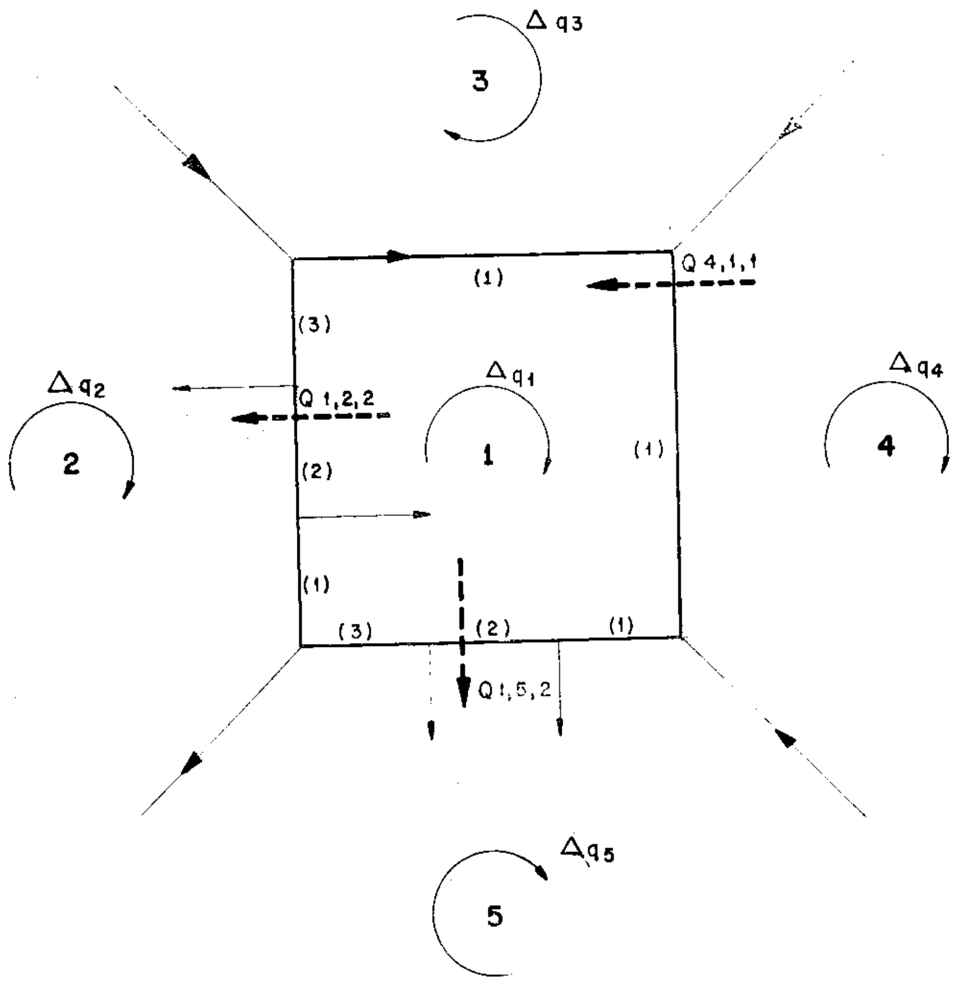
NOTA: m = n.º de malhas.

p = m + 1 = n.º total de malhas (= m + 1 malha fictícia externa).

r = n.º máximo de tramos por trecho, em qualquer ponto da rêde.

Assim, conforme indicado na fig. 1, a vazão do tramo (2) do trecho da rêde compreendido entre as malhas 1 e 5 seria, em relação à malha 1, representado por $Q_{1,5,2}$, e seria um número positivo se fôsse do tramo (1) ao tramo (3) (adjacentes).

Como (ainda fig. 1) não há ligação entre as malhas 2 e 4, teríamos, por exemplo, $Q_{2,4,1} = 0$ (ou seja, os $Q_{i,j,k}$ serão nulos para todos os pares de malhas (i, j) que não têm condutos em comum.



Esquema de uma malha da rêde hidráulica

d) Todos êstes valores dados são, em seguida, impressos para que se tenha um registro permanente das condições do processamento.

e) Em seguida, inicia-se o processo iterativo, calculando-se as perdas de carga distribuidas para os tramos k vistos da malha i para a malha j por uma adaptação da fórmula geral de resistência do tipo:

$$h_{f_{i,j,k}} = K_{i,j,k} \cdot Q_{i,j,k} \, |Q_{i,j,k}|^{n-1}$$

o que nos assegura que o sinal de $h_{f_{i,j,k}}$ será o mesmo de $Q_{i,j,k}$. Os coeficientes desta fórmula são dados por:

$$n = 1{,}852; \quad K_{i,j,k} = \frac{0{,}0021 \cdot L_{i,j,k}}{D_{i,j,k}^{4,87}},$$ para C = 100 (Fórmula de Hazen-Williams) (L e D em metros).

f) Veficam-se os êrros de fechamento para as m malhas pela fórmula:

$$\Delta H_{f_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \left(\sum_{k=1}^{r} h_{f_{i,j,k}} \right)$$

É importante notar que se trata de uma soma algébrica, isto é, os valores $h_{f_{i,j,k}}$ entram com seus respectivos sinais de fórmula.

g) Se todos os ΔH_{f_i} forem desprezíveis (isto é, menores que um certo limite pré-fixado) então a distribuição inicialmente adotada já é a solução do problema. Caso contrário, corrigimos os valores adotados pelo processo descrito a seguir:

h) Calculam-se os coeficientes de distribuição através dos trechos (i, j) que delimitam as malhas vizinhas i e j, através de:

$$\alpha_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} \frac{h_{f_{i,j,k}}}{Q_{i,j,k}}$$

que são, evidentemente, todos números positivos (já que $h_{f_{i,j,k}}$ e $Q_{i,j,k}$ têm mesmo sinal).

Por isso mesmo, nota-se que $\alpha_{i,j} = \alpha_{j,i}$.

i) Depois, calculam-se os resíduos de vazões Δq_i para as malhas m através de expressões da forma:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} \alpha_{ij} \, \Delta q_j + \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} - \alpha_{ij} \right) \Delta q_i = \frac{\Delta H_{f_i}}{n}$$

Assim, por exemplo, para a malha n.º 1 (fig. 1) a equação seria:

$$\alpha_{12} \, \Delta q_2 + \alpha_{13} \, \Delta q_3 + \alpha_{14} \, \Delta q_4 + \alpha_{15} \, \Delta q_5 + \left(\sum_{j=2}^{5} - \alpha_{1j} \right) \Delta q_1 = \frac{\Delta H_{f_1}}{n}$$

Teremos, assim, um sistema de m equações lineares a m incógnitas, simétrico em relação à diagonal principal. Podemos resolvê-lo por diversos métodos (p. ex., eliminação de Gauss-Jordan, iterativo de Gauss-Seidel, etc.).

Depois de resolvê-lo, teremos os resíduos Δq_i das m malhas.

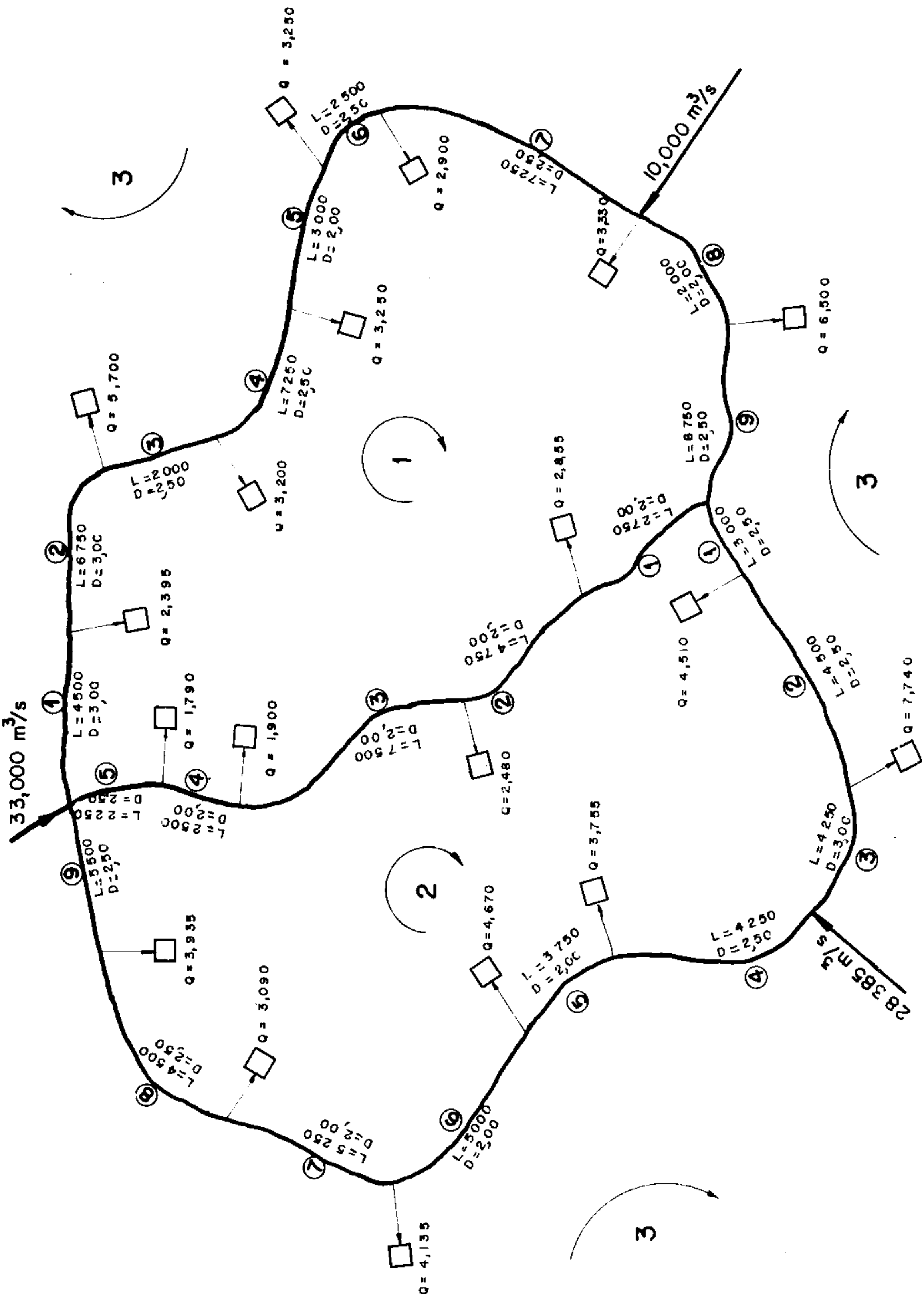


Fig. 2

Anel de Distribuição de Água para o Grande São Paulo

L — comprimento em metros
D — diâmetro em metros
Q — Vazão média na sangria em m³|seg.

COMASP - DEPARTAMENTO DE PLANEJAMENTO

SECAO DE PROCESSAMENTO DE DADOS

BALANCEAMENTO DE VAZOES

ANEL DE DISTRIBUICAO DE AGUA - SAO PAULO - 2 MALHAS

I	J	K	Q	L	D
1	2	1	1.345	2750.0	2.00
1	2	2	-1.510	4750.0	2.00
1	2	3	-3.990	7500.0	2.00
1	2	4	-5.890	2500.0	2.00
1	2	5	-7.680	2250.0	2.50
1	3	1	15.825	4500.0	3.00
1	3	2	13.430	6750.0	3.00
1	3	3	7.730	2000.0	2.50
1	3	4	4.530	7250.0	2.50
1	3	5	1.280	3000.0	2.00
1	3	6	-1.970	2500.0	2.50
1	3	7	-4.870	7250.0	2.50
1	3	8	1.800	2000.0	2.00
1	3	9	-4.700	8750.0	2.50
2	3	1	-6.045	3000.0	2.50
2	3	2	-10.555	4500.0	2.50
2	3	3	-18.295	4250.0	3.00
2	3	4	10.090	4250.0	2.50
2	3	5	6.335	3750.0	2.00
2	3	6	1.665	5000.0	2.00
2	3	7	-2.470	5250.0	2.00
2	3	8	-5.560	4500.0	2.50
2	3	9	-9.495	5500.0	2.50

1) Distribuição inicial das vazões.

```
      *            COMASP - DEPARTAMENTO DE PLANEJAMENTO
     * *
    *   *          SECAO DE PROCESSAMENTO DE DADOS
   *     *
  *  * *  *           BALANCEAMENTO DE VAZOES
 * * * * * *
```

ANEL DE DISTRIBUICAO DE AGUA - SAO PAULO - 2 MALHAS

I	J	K	Q	HF	L	D
1	2	1	1.293	0.31	2750.0	2.00
1	2	2	-1.561	-0.77	4750.0	2.00
1	2	3	-4.041	-7.15	7500.0	2.00
1	2	4	-5.941	-4.86	2500.0	2.00
1	2	5	-7.731	-2.40	2250.0	2.50
1	3	1	15.904	7.53	4500.0	3.00
1	3	2	13.509	8.35	6750.0	3.00
1	3	3	7.809	2.17	2000.0	2.50
1	3	4	4.609	2.97	7250.0	2.50
1	3	5	1.359	0.38	3000.0	2.00
1	3	6	-1.890	-0.19	2500.0	2.50
1	3	7	-4.790	-3.19	7250.0	2.50
1	3	8	1.879	0.46	2000.0	2.00
1	3	9	-4.620	-3.60	8750.0	2.50
2	3	1	-5.913	-1.95	3000.0	2.50
2	3	2	-10.423	-8.37	4500.0	2.50
2	3	3	-18.163	-9.10	4250.0	3.00
2	3	4	10.221	7.62	4250.0	2.50
2	3	5	6.466	8.54	3750.0	2.00
2	3	6	1.796	1.06	5000.0	2.00
2	3	7	-2.338	-1.81	5250.0	2.00
2	3	8	-5.428	-2.50	4500.0	2.50
2	3	9	-9.363	-8.38	5500.0	2.50

2) Resultados definitivos.

j) Com os valores assim obtidos, calculam-se as correções de vazão por:

$$\Delta Q_{i,j} = \Delta q_i - \Delta q_j$$

E, como a correção será a mesma para todos os tramos de um trecho, teremos as novas vazões em cada um dos tramos dadas por:

$$Q'_{i,j,k} = Q_{i,j,k} + \Delta Q_{i,j}$$

k) Com os novos valores $Q'_{i,j,k}$, calculam-se os novos $h'_{f_{i,j,k}}$ e depois os novos erros de fechamento das malhas.

Se êstes últimos resultarem todos inferiores ao limite pré-fixado, o problema estará resolvido; se não, voltamos ao item h e repetimos todos os itens subseqüentes até que a condição esteja satisfeita, ou seja excedido o número máximo de iterações permitido.

l) Quando todos os ΔH_{f_i} forem desprezíveis, imprimimos a solução obtida, dando, para cada tramo, seu comprimento e seu diâmetro, e a vazão e a perda de carga calculadas.

Também há a indicação do número de iterações que foram necessárias.

EXEMPLO

Como exemplo de aplicação, vamos resolver a rêde esquematizada na figura 2 que é o Anel de Distribuição de Água para o Grande São Paulo, objeto do trabalho "SISTEMA DE ADUÇÃO DE ÁGUA POTÁVEL PARA A GRANDE SÃO PAULO", também apresentado nêste Congresso. Resolveremos a rêde com C = 100 na fórmula de Hazen-Williams, diferentemente da solução apresentada no trabalho citado onde foi admitido C = 130.

Seguem-se os resultados na forma como são impressos pelo computador; primeiramente a distribuição inicial das vazões e depois as vazões e perdas de carga definitivas em todos os trechos. Nêste programa foram necessárias 27 iterações para que todos os erros de fechamento ΔH_{f_i} fôssem menores que 10^{-3} m, valor pré-fixado adotado.

Êstes resultados são coerentes com os obtidos pelo cálculo através do método de Cross no trabalho "SISTEMA DE ADUÇÃO DE ÁGUA POTÁVEL PARA A GRANDE SÃO PAULO", anteriormente citado, tendo em vista os diferentes valores de C adotados.

CONCLUSÕES:

Como vemos, dispomos de um método bastante geral para a resolução de rêdes hidráulicas e que se mostra muito eficiente no cálculo de rêdes complexas. Além disso, a resolução por computação digital permite o estudo *rápido* de várias alternativas de solução de uma rêde, variando-se os diâmetros, a disposição dos tramos, etc., o que não seria possível por um método de cálculo convencional.

BIBLIOGRAFIA

1 — TUFI MAMED ASSY — "Métodos de Cálculo das Rêdes Hidráulicas" — Revista DAE — n.º 70 — Dezembro de 1968.

2 — SHAN S. KUO — "Numerical Methods and Computers" — Addison-Wesley — 1965.

3 — D. D. McCRACKEN & W. S. DORN — "Numerical Methods and FORTRAN Programming" — John Wiley & Sons, Inc. — New York — 1966.