

# Estudo sobre aqueduto de concreto armado apoiado sobre base compressível

*Prof. Antonio Lutz Ippólito*

Engenheiro Ajudante da 3.<sup>a</sup> Seção Técnica

"Atendendo às solicitações de varios colegas resolvemos transcrever no Boletim da R. A. E. o presente artigo publicado ha dois anos numa revista academica. Entretanto, dado o carater tecnico deste boletim, julgamos conveniente fazer algumas modificações e córtes, visto como este artigo fora inicialmente escrito para estudantes de engenharia.

Em compensação, porém, resolvemos incluir desta vez um exemplo numérico completo e respectivo projéto, afim de esclarecer completamente o assunto".

## SUMÁRIO

### Introdução

### Primeira Parte:

#### **Teoria: Estudo dos esforços**

##### **A — Vigas apoiadas sobre bases compressíveis**

- 1 — Estabelecimento da equação geral das deformações.
- 2 — Expressões gerais para deflexão, momento fletor e força cortante.
- 3 — Formulas para a determinação das constantes de integração.
  - a) Estabelecimento das equações de condição.
  - b) Constantes de integração em função dos esforços.
- 4 — Formulas para a determinação do momento fletor maximo.
- 5 — Considerações finais.

##### **B — Estudo dos esforços num aqueduto em córte**

###### **I — Generalidades**

- 1 — Apresentação do problema.
- 2 — Cargas a considerar.
- 3 — Subdivisão do estudo.
- 4 — Considerações relativas ao projéto.
  - a) Elementos geométricos.
  - b) Hipoteses mais desfavoraveis de carga.
- 5 — Dados gerais do problema.
  - a) Seção transversal e longitudinal do aqueduto -- Esquema do quadro rígido.
  - b) Notação geral.

**II — Caso A: Cargas verticais uniformemente distribuidas**

- 1 — Diagrama das cargas e dos esforços (croquis).
- 2 — Fórmulas para a determinação das reações, forças cortantes e momentos fletores nas extremidades.
  - a) Reações verticais e forças cortantes.
  - b) Momentos fletores.
- 3 — Expressões gerais para os momentos fletores.
- 4 — Formulas para a determinação dos pontos de momento nulo.
- 5 — Formulas para momentos fletores maximos.

**III — Caso B: Pressão hidrostática interior**

- 1 — Diagrama das cargas e dos esforços (croquis)
- 2 — Formulas para a determinação dos momentos fletores e das reações nas extremidades.
  - a) Pressões unitarias.
  - b) Pressões totais e respectivos momentos.
  - c) Formulas para momentos fletores.
  - d) Formulas para as reações horizontais.
- 3 — Expressões gerais para momentos fletores.
- 4 — Formulas para a determinação dos pontos de momento nulo.
- 5 — Formulas para momentos fletores maximos.

**IV — Caso C: Empuxo horizontal das terras — Carga simétrica**

- 1 — Diagrama das cargas e dos esforços.
- 2 — Formulas para a determinação dos momentos fletores e das reações nas extremidades.
  - a) Empuxo total.
  - b) Pressões unitarias.
  - c) Pressão total e momentos nas bases.
  - d) Formulas para momento fletores.
  - e) Formulas para as reações horizontais.
- 3 — Expressões gerais para momentos fletores.
- 4 — Formulas para a determinação dos pontos de momento nulo.
- 5 — Formulas para momentos fletores maximos.

Nota: O sumario da SEGUNDA PARTE será apresentado no proximo numero.

## INTRODUÇÃO

Considerado sob o ponto de vista do tipo e fórma da estrutura e quanto á determinação dos esforços devidos á varios sistemas de carga, este trabalho não apresentaria, realmente, novidade alguma, porquanto os estudos sobre estruturas hiperestaticas têm sido amplamente desenvolvidos em tratados modernos sobre Estabilidade das Construções.

Assim sendo, o presente estudo teria pouco ou nenhum valor pratico, e, consequentemente, não seria justificavel a sua publicação. Considerado, porém, o problema quanto á forma de distribuição das pressões sobre o terreno subjacente, temos em vista apresentar um trabalho de particular interesse, visto como, no processo de eliminação das incognitas hiperestaticas, iremos admitir que as referidas pressões se exerçam segundo a lei das deformações elasticas da lage do fundo do aqueduto.

Até á presente data, na solução de problemas desta natureza, têm sido sempre applicadas as classicas leis do trapezio e do triangulo e, ás vezes, variantes destas, as quais, a nosso ver, não passam de hipoteses puramente arbitrarías. A favoravel aceitação dessas regras e a sua quasi exclusiva applicação pelos técnicos só póde ser attribuída á grande simplificação que introduz nos calculos, emquanto que, por outro lado, com a applicação do principio acima preconizado, a solução dos problemas seria bem mais complexa e laboriosa. Mesmo assim, julgamos não ser justificavel a preferencia dada a regras que até agora não foram cabalmente sancionadas pela experiencia e, menos ainda, se justifica a condenação feita á lei acima referida que, pelo contrario é baseada em principios científicos que já foram comprovados por ensaios feitos por insignes mestres e que, por conseguinte, devem fornecer a solução mais satisfatória dos problemas sobre fundações, em geral.

Praticariamos um ato de injustiça e, ao menos tempo, de deslealdade, si deixassemos de citar aqui que não nos cabe a paternidade da applicação desse principio. De fato, o celebre Föppl, em seu livro sobre Resistencia dos Materiais, que, inegavelmente, é uma das melhores obras escritas sobre a Teoria da Elasticidade, dedica um inteiro capitulo ao estudo da mencionada lei de distribuição das pressões, applicada ao caso dos dormentes de estrada de ferro. E, mesmo, recentemente, o illustre Engenheiro Toledo Malta, um dos mais abalisados técnicos da moderna engenharia nacional, apresentou um bellissimo estudo sobre tensões elasticas nas fundações, em artigo publicado pela Revista Politecnica. Nesse estudo o conceituado profissional, além de expôr a teoria, introduz alguns artificios geniais, por meio dos quais os calculos ficam sensivelmente simplificados. Lamentando que esse trabalho não tenha sido levado a termo, fazemos votos para que o mesmo não fique definitivamente interrompido, afim de se tirar, futuramente, todo o possível proveito.

A bem da verdade desejamos mencionar tambem que, na elaboração do projéto de aquedutos para a Adutora do Rio Claro, o saudoso e douto Engenheiro Theodoro Ramos, então Chefe da Comissão de Obras Novas da Capital, teve ensejo de aplicar essa lei em alguns casos. Infelizmente os trabalhos do referido engenheiro não foram divulgados, tendo deixado apenas algumas ligeiras notas sobre esse projéto, consignadas, em forma demasiado sucinta, no Relatório final da citada Commissão.

Por conseguinte, em face da importância deste assunto e desejando tornar mais conhecido os principios nele envolvidos, resolvemos apresentar este trabalho, no qual, outra pretensão não temos, se não a de ter ampliado os estudos já feitos, descrevendo detalhadamente a parte relativa á estabilidade, aplicada ao caso de um aquedúto de concreto armado, e desenvolvendo a parte matemática de fôrma acessível a todo profissional.

Dividimos o presente trabalho em duas partes. Na primeira, faremos a exposição teórica de todos os principios e a dedução de todas as fórmulas para a determinação dos esforços em aquedútos em cortes. Todavia, afim de facilitar a compreensão deste assunto, faremos inicialmente um estudo sobre as deformações elasticas em vigas apoiadas sobre terrenos compressiveis. Na segunda parte apresentaremos um exemplo numerico completo, no qual serão executados, em primeiro logar, os calculos dos esforços segundo um plano préviamente organizado, e traçados os diagramas de esforços para os diversos casos de cargas, e, em seguida, será elaborado o projéto definitivo de um aquedúto de concreto armado.

..\*

## PRIMEIRA PARTE

### Teoria: Estudo dos esforços

#### A) Vigas apoiadas sobre bases compressiveis

##### **1) Estabelecimento da equação geral das deformações elasticas.**

Por se tratar de uma equação geral, vamos, para facilitar, fazer a demonstração para o caso de uma viga, de largura e momento de inercia constante, repousando, em toda a superficie de sua base, sobre um terreno compressivel, sendo a viga submetida a uma carga vertical uniformemente distribuida.

A dedução da equação geral será feita tendo em vista a hipótese fundamental que a compressão do solo provoque deformações elasticas segundo a lei de Hooke.

Sejam :

$x$  = abscissa de uma secção transversal qualquer da viga.

$y$  = ordenada correspondente da linha elastica.

$q$  = pressão exercida sobre o sólo, por unidade linear.

$\theta_x$  = deflexão da linha elastica no ponto  $x$  da viga.

$M_x$  = momento fletor na secção  $x$  da viga.

$T_x$  = força cortante na mesma secção.

Pela hipótese fundamental acima estabelecida a ordenada  $y$  é proporcional á pressão  $q$  exercida sobre o terreno, e a lei pode ser assim expressa :

$$q = k y \quad (1)$$

onde  $k$  é um fator que depende da largura da viga e da compressibilidade do solo.

Pela Teoria da Elasticidade e Resistencia dos Materiais, sabemos que:

$$\theta_x = \frac{dy}{dx} \quad (2)$$

$$- M_x = EJ \frac{d\theta_x}{dx} \quad (3)$$

$$T_x = \frac{dM_x}{dx} \quad (4)$$

$$q = \frac{dT_x}{dx} \quad (5)$$

Donde, combinando as expressões (2) e (3), temos:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = - M_x \quad (6)$$

Combinando as expressões (4) e (6):

$$EJ \frac{d^3 y}{dx^3} = - T_x \quad (7)$$

Combinando as expressões (5) e (7):

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = - q \quad (8)$$

E, finalmente, combinando as equações (1) e (8), temos :

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + k y = 0 \quad (9)$$

Esta é, pois, uma equação diferencial linear, com coeficientes constantes, de quarta ordem, sem segundo membro.

Por meio de integrações sucessivas podemos determinar a integral geral:

$$y = C_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} \cos \frac{x}{\epsilon} + C_2 e^{\frac{x}{\epsilon}} \sin \frac{x}{\epsilon} + C_3 e^{-\frac{x}{\epsilon}} \cos \frac{x}{\epsilon} + C_4 e^{-\frac{x}{\epsilon}} \sin \frac{x}{\epsilon} \quad (10)$$

Esta expressão representa a *equação geral das deformações elasticas*, onde:

$C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  designam constantes de integração que serão posteriormente determinadas mediante as equações de condição.

$e$  = base dos logaritmos neperianos = 2.718

$\epsilon$  = uma constante que se obtem pela formula seguinte:

$$\epsilon = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{k}}$$

Sendo, por definição anterior:

$$k = \lambda b$$

$$\epsilon = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{\lambda b}}$$

onde:

$\lambda$  = fator de compressibilidade do solo

$b$  = largura da viga

Este valor de  $\epsilon$  representa uma medida linear, como é facil de se verificar. De fato, sendo dados os valores de  $E$  em  $\text{Ks/cm}^2$ ,  $J$  em  $\text{cm}^4$ ,  $\lambda$  em  $\text{Ks/cm}^3$  e  $b$  em cms., verificamos que para  $\epsilon$  resulta um valor em cms.

### Observação importante

A titulo de curiosidade vamos mostrar em que condições especiais póde ser valida a famosa *lei do trapezio*, tendo em vista a expressão geral das deformações elasticas, acima deduzida.

Si supuzermos a viga como sendo um solido *perfeitamente rigido*, o valor de  $E$  tende para o infinito.

Si supuzermos o terreno como sendo um *liquido perfeito*, o valor de  $\lambda$  tende para zero.

Em qualquer dos casos o valor de  $\epsilon$  tende para o infinito, e, consequentemente, o valor de  $\frac{x}{\epsilon}$  tenderá para zero, no limite.

Portanto:

$\cos \frac{x}{\epsilon}$ ,  $e^{\frac{x}{\epsilon}}$  e  $e^{-\frac{x}{\epsilon}}$  tendem para a unidade, e no limite  $\sin \frac{x}{\epsilon}$  confunde-se com o arco.

Substituindo-se esses valores limites na expressão (10), teremos:

$$y = C_1 + C_2 \frac{x}{\epsilon} + C_3 + C_4 \frac{x}{\epsilon}$$

simplificando:

$$y = (C_1 + C_3) + \left( \frac{C_2 + C_4}{\epsilon} \right) x$$

que é uma equação linear da forma  $y = A + Bx$ , e que representa, na realidade, a lei do trapézio.

Como, porém, as condições especiais inicialmente estabelecidas são raramente conseguidas na pratica, concluímos que essa regra é, inegavelmente, uma hipótese imperfeita e insuficiente para os casos praticos, sendo, pois, erronea a sua aplicação, na maioria dos casos.

## 2) Expressões gerais para deflexão, momento fletor e força cortante.

Para se conseguir as expressões gerais supra mencionadas devemos achar a 1.<sup>a</sup>, 2.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup> derivada, respectivamente, da equação geral das deformações elasticas (expressão 10).

Vamos, pois, determina-las:

### a) Deflexão angular

Pela equação (2)

$$\theta_x = \frac{dy}{dx}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \theta_x = \frac{1}{\epsilon} [ & C_1 (e^{\frac{x}{\epsilon}} \cos \frac{x}{\epsilon} - e^{\frac{x}{\epsilon}} \sin \frac{x}{\epsilon}) + C_2 (e^{\frac{x}{\epsilon}} \cos \frac{x}{\epsilon} + e^{\frac{x}{\epsilon}} \sin \frac{x}{\epsilon}) - \\ & - C_3 (e^{-\frac{x}{\epsilon}} \cos \frac{x}{\epsilon} + e^{-\frac{x}{\epsilon}} \sin \frac{x}{\epsilon}) + C_4 (e^{-\frac{x}{\epsilon}} \cos \frac{x}{\epsilon} - e^{-\frac{x}{\epsilon}} \sin \frac{x}{\epsilon}) \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\begin{aligned} \theta_x = \frac{1}{\epsilon} [ & C_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} (\cos \frac{x}{\epsilon} - \sin \frac{x}{\epsilon}) + C_2 e^{\frac{x}{\epsilon}} (\cos \frac{x}{\epsilon} + \sin \frac{x}{\epsilon}) - \\ & - C_3 e^{-\frac{x}{\epsilon}} (\cos \frac{x}{\epsilon} + \sin \frac{x}{\epsilon}) + C_4 e^{-\frac{x}{\epsilon}} (\cos \frac{x}{\epsilon} - \sin \frac{x}{\epsilon}) \end{aligned} \quad (11)$$

b) *Momento fletor*

Pela equação (3)

$$- M_x = EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} - M_x = & \frac{EJ}{\varepsilon^2} [C_1 e^{\frac{x}{\varepsilon}} (\cos \frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} - \cos \frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon}) + \\ & + C_2 e^{\frac{x}{\varepsilon}} (\operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} + \cos \frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} + \cos \frac{x}{\varepsilon}) + \\ & + C_3 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (\cos \frac{x}{\varepsilon} + \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} + \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} - \cos \frac{x}{\varepsilon}) - \\ & - C_4 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (\cos \frac{x}{\varepsilon} + \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} + \cos \frac{x}{\varepsilon})] \end{aligned}$$

Simplificando e fazendo  $\frac{\varepsilon^2}{2 EJ} = K_2$ , teremos:

$$\begin{aligned} - M_x = & \frac{1}{K_2} [- C_1 e^{\frac{x}{\varepsilon}} \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} + C_2 e^{\frac{x}{\varepsilon}} \cos \frac{x}{\varepsilon} + \\ & + C_3 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} - C_4 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \cos \frac{x}{\varepsilon}] \end{aligned} \quad (12)$$

(c) *Força cortante*

Pela equação (4)

$$T_x = \frac{dM_x}{dx}$$

Portanto, derivando e fazendo  $\frac{\varepsilon^3}{2 EJ} = K_3$ , teremos:

$$\begin{aligned} T_x = & \frac{1}{K_3} [- C_1 e^{\frac{x}{\varepsilon}} (\operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon} + \cos \frac{x}{\varepsilon}) + C_2 e^{\frac{x}{\varepsilon}} (\cos \frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon}) + \\ & + C_3 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (\cos \frac{x}{\varepsilon} - \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon}) + C_4 e^{-\frac{x}{\varepsilon}} (\cos \frac{x}{\varepsilon} + \operatorname{sen} \frac{x}{\varepsilon})] \end{aligned} \quad (13)$$

**3) Fórmulas para a determinação das constantes de integração.**a) *Estabelecimento das equações de condição*

Para a determinação das constantes de integração que, no nosso caso, são quatro, devemos estabelecer quatro equações de condição, de conformidade com a natureza do problema.



Como exemplo, vamos supor que se trate de uma viga *engastada em suas extremidades*, assimilando-se, desta fórma, ao caso da lage do fundo de um aqueduto, que representa justamente o problema que nos propomos estudar.

### 1.<sup>a</sup> Condição

Na extremidade inicial da viga o momento fletor é igual a  $M_1$ . Portanto, na expressão geral dos momentos, pondo  $x = 0$  e  $-M_x = M_1$ , obteremos uma equação para  $M_1$  em função das constantes de integração.

Assim, efetuando as citadas substituições na expressão (12), temos:

$$K_1 M_1 = C_2 - C_4 \quad (14)$$

### 2.<sup>a</sup> Condição

Na extremidade inicial da viga a força cortante é igual a  $T_1$ . Portanto, na expressão geral da força cortante, pondo  $x = 0$  e  $T_x = T_1$ , obteremos uma equação para  $T_1$  em função das constantes de integração.

Assim, pela expressão (13), teremos:

$$K_3 T_1 = -C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \quad (15)$$

### 3.<sup>a</sup> Condição

No meio da viga, devido á simetria da carga, a força cortante é nula. Portanto, pondo  $x = \frac{l}{2}$  e  $T_x = 0$ , na mesma expressão geral, obteremos uma relação entre as constantes de integração.

Assim, na expressão (13) fazendo por brevidade,  $v = \frac{l}{2\epsilon}$  teremos:

$$-C_1 e^v (\cos v + \sen v) + C_2 e^v (\cos v - \sen v) + C_3 e^{-v} (\cos v - \sen v) + C_4 e^{-v} (\cos v + \sen v) = 0 \quad (16)$$

### 4.<sup>a</sup> Condição

No meio da viga, devido á simetria da carga, a tangente á linha elastica é horizontal, e, portanto, o valor da deflexão angular nesse ponto é nula. Por conseguinte, pondo  $x = \frac{l}{2}$  e  $\theta_x = 0$ , na expressão geral da deflexão, obteremos uma nova relação entre as constantes de integração.

Assim, pela expressão (11):

$$+ C_1 e^v (\cos v - \sen v) + C_2 e^v (\cos v - \sen v) + C_3 e^{-v} (\cos v + \sen v) + C_4 e^{-v} (\cos v - \sen v) = 0 \quad (17)$$

Sendo estas duas ultimas relações (16) e (17) algo complexas, poderemos obter duas outras equações mais simples pela soma e subtração das mesmas.

Assim, somando as referidas expressões e dividindo todos os termos por  $-2$ , teremos:

$$C_1 e^v \operatorname{sen} v - C_2 e^v \operatorname{cos} v + C_3 e^{-v} \operatorname{sen} v - C_4 e^{-v} \operatorname{cos} v = 0 \quad (18)$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira e dividindo todos os termos por  $-2$ , teremos:

$$C_1 e^v \operatorname{cos} v + C_2 e^v \operatorname{sen} v - C_3 e^{-v} \operatorname{cos} v - C_4 e^{-v} \operatorname{sen} v = 0 \quad (19)$$

b) *Constantes de integração em função dos esforços*

Esta determinação é feita resolvendo simultaneamente as quatro equações de condição acima estabelecidas, isto é, as equações (14), (15), (18) e (19). Para facilitar esta operação vamos transcrever essas quatro expressões, substituindo alguns termos complexos por novos simbolos.

Façamos, pois:

$$n_1 = e^v \operatorname{cos} v \quad n_2 = e^v \operatorname{sen} v \quad n_3 = e^{-v} \operatorname{cos} v \quad n_4 = e^{-v} \operatorname{sen} v$$

As equações de condição serão, portanto:

$$C_2 - C_4 = K_2 M_1 \quad (20)$$

$$-C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = K_3 T_1 \quad (21)$$

$$C_1 n_2 - C_2 n_1 + C_3 n_4 - C_4 n_3 = 0 \quad (22)$$

$$C_1 n_1 + C_2 n_2 - C_3 n_3 - C_4 n_4 = 0 \quad (23)$$

Resolvendo simultaneamente essas equações, teremos:

Pela equação (21)  $C_2 + C_4 = K_3 T_1 - C_3 + C_1$  (24)

Pela soma das equações (20) e (24):

$$C_2 = \frac{1}{2} (K_2 M_1 + K_3 T_1 - C_3 + C_1) \quad (25)$$

Pela subtração das mesmas:

$$C_4 = \frac{1}{2} (-K_2 M_1 + K_3 T_1 - C_3 + C_1) \quad (26)$$

Substituindo-se os valores de  $C_2$  e  $C_4$ , acima obtidos, na equação (24):

$$C_1 n_2 - \frac{K_1 M_1}{2} n_1 - \frac{K_3 T_1}{2} n_1 + \frac{C_3}{2} n_1 - \frac{C_1}{2} n_1 + C_3 n_4 + \frac{K_2 M_1}{2} n_3 - \\ - \frac{K_3 T_1}{2} n_3 + \frac{C_3}{2} n_3 - \frac{C_1}{2} n_3 = 0$$

Agrupando os termos com fatores comuns e multiplicando todos os termos por 2:

$$C_1(2n_2 - n_1 - n_3) + C_3(n_1 + 2n_4 + n_3) = K_2 M_1(n_1 - n_3) + K_3 T_1(n_1 + n_3) \quad (27)$$

Substituindo os mesmos valores de  $C_2$  e  $C_4$ , na equação (23):

$$C_1 n_1 + \frac{K_2 M_1}{2} n_2 + \frac{K_3 T_1}{2} n_2 - \frac{C_3}{2} n_2 + \frac{C_1}{2} n_2 - C_3 n_3 + \frac{K_2 M_1}{2} n_4 - \frac{K_3 T_1}{2} n_4 + \frac{C_3}{2} n_4 - \frac{C_1}{2} n_4 = 0$$

Agrupando os termos com fatores comuns e multiplicando todos os termos por 2:

$$C_1(2n_1 + n_2 - n_4) + C_2(n_1 - 2n_3 - n_2) = K_2 M_1(n_2 + n_4) + K_3 T_1(n_4 - n_2) \quad (28)$$

Afim de simplificar as operações seguintes, façamos:

$$\begin{array}{ll} r_1 = 2n_2 - n_1 - n_3 & s_1 = n_1 - n_3 \\ r_2 = 2n_4 + n_1 + n_3 & s_2 = n_1 + n_3 \\ r_3 = 2n_1 + n_2 - n_4 & s_3 = n_2 + n_4 \\ r_4 = 2n_3 - n_2 + n_4 & s_4 = n_4 - n_2 \end{array}$$

E as equações (27) e (28) são assim escritas:

$$C_1 r_1 - C_3 r_2 = K_2 M_1 s_1 + K_3 T_1 s_2 \quad (29)$$

$$C_1 r_3 - C_3 r_4 = -K_2 M_1 s_3 + K_3 T_1 s_4 \quad (30)$$

Resolvendo simultaneamente estas duas equações, teremos:

$$C_1 = K_2 M_1 \frac{s_1 r_4 + s_3 r_2}{r_1 r_4 - r_2 r_3} + K_3 T_1 \frac{s_2 r_4 - s_4 r_2}{r_1 r_4 - r_2 r_3} \quad (31)$$

$$C_3 = -K_2 M_1 \frac{s_1 r_3 + s_3 r_1}{r_1 r_4 - r_2 r_3} - K_3 T_1 \frac{s_2 r_3 - s_4 r_1}{r_1 r_4 - r_2 r_3} \quad (32)$$

Para simplificar ainda mais estas ultimas expressões, façamos:

$$a = r_1 r_4 - r_2 r_3 \quad z_1 = \frac{s_1 r_4 - s_3 r_2}{a} \quad z_3 = \frac{s_1 r_3 + s_3 r_1}{a}$$

$$z_2 = \frac{s_2 r_4 - s_4 r_2}{a} \quad z_4 = \frac{s_2 r_3 - s_4 r_1}{a}$$

As expressões (31) e (32) serão, finalmente, assim escritas:

$$C_1 = K_2 M_1 z_1 + K_3 T_1 z_2 \quad (33)$$

$$C_3 = -K_2 M_1 z_3 - K_3 T_1 z_4 \quad (34)$$

Substituindo na expressão (25) os valores de  $C_1$  e  $C_3$ , acima obtidos:

$$C_2 = \frac{1}{2} (K_2 M_1 + K_3 T_1 + K_2 M_1 z_3 + K_3 T_1 z_4 + K_2 M_1 z_1 - K_3 T_1 z_2)$$

Agrupando os termos com fatores comuns:

$$C_2 = \frac{K_2 M_1}{2} (1 + z_3 + z_1) + \frac{K_3 T_1}{2} (1 + z_4 + z_2) \quad (35)$$

Substituindo na expressão (26) os mesmos valores de  $C_1$  e  $C_3$ :

$$C_4 = -\frac{1}{2} (K_2 M_1 - K_3 T_1 - K_2 M_1 z_3 - K_3 T_1 z_4 - K_2 M_1 z_1 - K_3 T_1 z_2)$$

Agrupando os termos com fatores comuns:

$$C_4 = \frac{K_2 M_1}{2} (-1 + z_3 + z_1) + \frac{K_3 T_1}{2} (1 + z_4 + z_2) \quad (36)$$

As expressões (33), (34), (35) e (36) representam, pois, as formulas para a determinação das constantes de integração, em função do momento fletor  $M_1$  e da força cortante  $T_1$  previamente determinados.

#### 4) Formula para a determinação do momento fletor maximo.

Para carga uniformemente distribuida o momento fletor maximo verifica-se no ponto central da viga. Por conseguinte, podemos obter a formula fazendo  $x = \frac{l}{2}$  na expressão geral dos momentos (expressão 12).

Assim, lembrando que  $v = \frac{l}{2\varepsilon}$  e feitas as devidas substituições:

$$M_{\max} = \frac{1}{K_2} [e^v (C_2 \cos v - C_1 \sin v) + e^{-v} (C_3 \sin v - C_4 \cos v)] \quad (37)$$

Simplificando e efetuando as ultteriores substituições, teremos:

$$M_{\max} = \frac{1}{K_2} (C_2 n_1 - C_1 n_2 + C_3 n_4 - C_4 n_3) \quad (38)$$

Mas, pela terceira equação de condição (expressão 22):

$$C_3 n_4 - C_4 n_3 = C_2 n_1 - C_1 n_2$$

Substituindo finalmente, esses valores na expressão (38):

$$M_{\max} = \frac{2}{K_2} (C_2 n_1 - C_1 n_2)$$

#### 5) Considerações finais

Pela exposição teórica acima feita notamos que, embora as formulas resultantes sejam aparentemente muito simples, as mesmas se compõem, na realidade, de termos obtidos atravez uma longa serie de substituições simplificadoras. Citaremos, como exemplo, o caso dos simbolos  $z$  (com indices de 1 a 4) que estão em termos de  $r$  e  $s$ , os

quais, por sua vez são funções de  $n$  (com os mesmos indices); estes, ainda, estão em termos do simbolo  $v$ , que é uma função de  $\epsilon$ , a qual finalmente, é uma constante expressa em termos dos valores conhecidos de  $E, J, \lambda$  e  $b$ .

Como é facil imaginar, si, de um lado, todas essas substituições facilitaram muito a dedução das formulas, por outro lado, dão ao calculista (especialmente aos jovens profissionais) a impressão de grande complexidade na sua aplicação. Comtudo julgamos que essa dificuldade é apenas aparente, porquanto ela póde ser facilmente removida, mesmo nos mais complexos problemas, adotando-se um processo de calculo que obedeça rigorosamente á um programa previamente organizado, baseado nos principios de ordem e clareza.

Consiste este programa na compilação prévia de todos os dados do problema, incluindo os elementos geometricos e os de estabilidade e, em seguida, na elaboração sistematica de todos os calculos auxiliares, compreendendo a determinação de todas as constantes que entram nas formulas definitivas.

No projeto que nos propomos apresentar na parte final de nosso trabalho, teremos ocasião de elaborar os calculos obedecendo ao programa acima preconizado, donde se verificará que a sua aplicação não só facilitará a marcha das operações como tambem eliminará a possibilidade de enganos e confusões, mas ainda, terá a vantagem de facultar a apresentação de um trabalho de facil e rapido controle.

## B — Estudo dos Esforços num Aqueduto em Côte

(Secção retangular)

### I — GENERALIDADES

#### 1.º — Apresentação do problema

Deduzidas as expressões geraes para momentos fletores e forças cortantes e as formulas para a determinação das constantes de integração e do momento maximo, relativas ao caso de uma viga apoiada sobre base compressivel, considerando as pressões distribuidas segundo a lei das deformações elasticas, vamos agora deduzi-las para o caso particular de um aqueduto de concreto armado, de secção retangular, o que constitue o objeto principal de nosso estudo.

Considerando-se, para efeitos de cálculo a extensão de um metro de aqueduto, representa esta estrutura um verdadeiro quadro rigido, cuja lage de fundo apoia diretamente sobre o terreno.

Mais adeante apresentaremos o esquema geral desse quadro rigido e a notação correspondente a todos os elementos gemetricos e de estabilidade, notação essa que será adotada para todos os casos de carga que iremos estudar.

## 2.º — Cargas a considerar

Para tornar mais interessante este trabalho, resolvemos considerar o caso de um aqueduto em córte, por ser mais complexo, e, mesmo, mais frequente na pratica.

Vamos supor, comtudo, que os empuxos horizontais da terra sobre as paredes verticais do aqueduto atúem simétricamente, sendo, pois, abandonadas as reações laterais do terreno. O caso de carga asimetrica (terra atuando de um só lado) é menos frequente, e, além disso, para os fins de nosso estudo não oferece nenhum interesse particular, visto como, sobre o ponto de vista de estabilidade, vigoram os mesmos principios fundamentais relativos ao caso de carga simetrica.

Entretanto, para dar ao problema um cunho de realidade, vamos considerar, de conformidade com as boas nórmas da pratica, a construção de um aterro sobre a lage superior de aqueduto, e, alem disso vamos admitir a possibilidade de desmoronamentos da terra do corte sobre a mesma lage.

Devemos, por conseguinte, introduzir nos calculos os efeitos devidos á terra sobreposta e á sobrecarga eventual sobre a lage superior.

Em conclusão, vamos agora apresentar o resumo das cargas que vão ser consideradas no presente estudo :

Cargas verticais	{	1 — Peso proprio da estrutura
		2 — Peso da terra sobreposta
		3 — Sobrecarga eventual
Cargas horizontais	{	4 — Pressão hidrostática interior
		5 — Empuxo horizontal da terra —
		Carga simetrica

As tres primeiras cargas, como vemos, são verticais, uniformemente distribuidas, sendo que as reações do solo acompanham as deformações elasticas da lage do fundo.

A quarta é uma carga horizontal, atuando internamente, com distribuição triangular sobre o segmento maior das lages verticais.

A quinta é, tambem, uma carga horizontal, atuando externamente sobre as lages verticais, e, devido á terra sobreposta, é distribuida segundo a lei do trapésio.

## 3.º — Subdivisão do estudo

Para a demonstração das formulas referentes a estes cinco casos de carga, resolvemos dividir o nosso estudo em tres partes. Na primeira, estudaremos em conjunto, os tres primeiros casos de cargas verticais, visto como, por serem de idéntica atuação, obedecem aos mesmos principios, e, por conseguinte, as formulas resultantes são analogas. A unica diferença consiste na determinação da reação vertical,

a qual, no primeiro caso (peso proprio), além do termo  $\frac{g l}{2}$  correspondente ao peso da lage horizontal (uniformemente distribuido), deve tambem incluir o termo  $P$ , correspondente ao peso da lage vertical (concentrado).

Nas duas partes seguintes estudaremos as formulas relativas aos casos 4 e 5 acima referidos, isto é, á pressão hidrostática interior e ao empuxo horizontal da terra, respetivamente.

No estudo de cada uma dessas partes obedeceremos á seguinte ordem :

- 1 — Diagrama das cargas e dos esforços (croquis), mostrando todos os elementos relativos ao caso em questão.
- 2 — Dedução das formulas para a determinação das reações e momentos fletores nos cantos.
- 3 — Estabelecimentos das expressões gerais para momentos fletores, correspondentes á cada lage do aqueduto.
- 4 — Formulas para a determinação dos pontos de momento nulo, correspondentes a cada lage.
- 5 — Formulas para momentos maximos em cada lage.

O estabelecimento das expressões gerais dos momentos (item 3) tem por fim a determinação dos momentos nos pontos intermediarios de todas as lages do aqueduto, momentos esses que serão devidamente coligidos numa tabela e que servirão para a construção da curva dos momentos correspondentes ao caso em apreço. A determinação dos pontos de momento nulo (item 4) e dos momentos maximos (item 5) tem por objeto exclusivo melhorar a construção dessa curva.

#### 4.º — Considerações relativas ao projéto

Julgamos oportuno fazer algumas considerações importantes com relação ao projéto de aquedutos, afim de ficarem bem esclarecidos alguns pontos desta exposição teórica.

##### a) Elementos geométricos

Por se tratar de uma estrutura hiperestática, torna-se necessario, como sabemos, o conhecimento previo dos elementos geométricos da estrutura, os quais, como veremos, estão contidos em todas as formulas que nos propomos deduzir. Por outro lado esses elementos só podem ser exatamente conhecidos após a elaboração do projéto, que, por sua vez, é baseado nessas formulas. O calculo, portanto só poderia ser executado por meio de tentativas sucessivas, não fosse a particularidade inerente a projetos desta natureza, de permitir a escolha inicial das dimensões, tendo em vista condições suplementares de outra ordem.

Assim é que os valores de  $l$  e  $h$  (largura e altura do quadro rígido) são prefixados mediante a condição hidráulica que a secção interna do aqueduto deve satisfazer, especificada no problema, sendo

que a relação entre essas duas dimensões é escolhida obedecendo-se a condições de ordem pratica ou economica.

Quanto ás espessuras  $d$  das lages, pódem ser inicialmente admitidas tomando-se como base de comparação obras semelhantes já construidas, submetidas ás mesmas cargas, ou, na falta de outros elementos, podem ser determinadas, em via aproximada, por meio de um ante-projeto.

Identicamente, os valores dos momentos de inercia das secções das lages, devem ser previamente conhecidos, mas os seus valores exáctos, que são funções da secção homogeneisada, só podem ser determinados após o projéto definitivo (incluindo a armadura). Felizmente, porém, como as formulas envolvem apenas *relações* desses momentos de inercia, é usual determinar esses valores tendo em vista apenas a secção do concreto, sendo relativamente pequeno o erro introduzido nos calculos.

#### b) Hipoteses mais desfavoraveis de carga

Como vimos anteriormente, as cargas são de varias naturezas, e, consequentemente, atúam de maneira diferente. Alem disso não atúam simultaneamente. De fato, com exclusão das duas primeiras, que são de carater *permanente*, as outras todas são *accidentais* e pódem, portanto, não atúar conjuntamente. Assim é que o aqueduto póde estar *vasio* ou *cheio*; o empuxo das terras póde atúar ou deixar de atúar efetivamente, dependendo do grau de coesão das mesmas nas adjacencias do aqueduto, nos varios trechos.

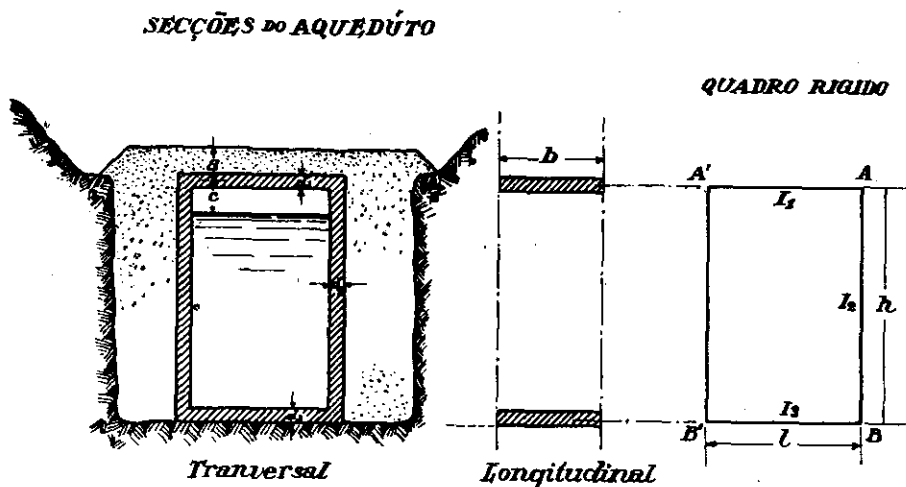
Tendo, portanto em vista, a desigualdade dos efeitos produzidos pelas varias cargas citadas, e em virtude de suas não simultaneas atuações, devemos tambem analizar os efeitos devidos ás varias *combinações* de cargas, para se deduzirem as *hipoteses mais desfavoraveis*; isto é, as combinações que provocam, ao longo de toda a secção, os *esforços máximos e mínimos*, para os quais devem ser projetadas as lages e respetivas armaduras. Para tal fim, após os calculos relativos à todos os casos de carga, devemos proceder á organização de um *quadro geral dos momentos*, contendo não só os valores correspondentes aos cinco casos de carga mencionados, como tambem os valores resultantes de todas as possiveis combinações de carga.

Alem disso, as curvas dos momentos, corrépondentes aos cinco casos, serão combinadas num só grafico, do qual se infere a *curva envolvente dos momentos*, a qual é indispensavel para o estudo da distribuição da armadura principal ao longo da secção do aqueduto, isto é, para a determinação dos pontos de *córtie e dobramento das barras*.



## 5.º — Dados gerais do problema

a) — Secção transversal e longitudinal do aqueduto — Esquema do quadro rígido.



( Fig. 1 )

b) — Notação geral.

A — Elementos geometricos

$b$  = profundidade da lage = 100 cms.

$d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  = espessuras das lages superior, vertical e inferior, respectivamente.

$l$  = largura media das lages horizontais

$h$  = altura media das lages verticais

$J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  = momentos de inercia das secções das lages superior, vertical e inferior, respectivamente.

B — Elementos de estabilidade

*Pesos especificos*

$w_c$  = peso especifico do concreto

$w_a$  = idem da agua.

$w_t$  = idem da terra

*Outros elementos*

$E$  = modulo de elasticidade do concreto, em Ks/cm<sup>2</sup>

$\lambda$  = fator de compressibilidade do terreno, em Ks/cm<sup>3</sup>

$\alpha$  = talude natural do terreno

$\varphi$  = angulo de atrito da terra

*Cargas unitarias*

$q$  = carga uniformemente distribuida sobre a lage superior, em Ks./m.

$g$  = pressão da agua na base, em Ks./m. l.

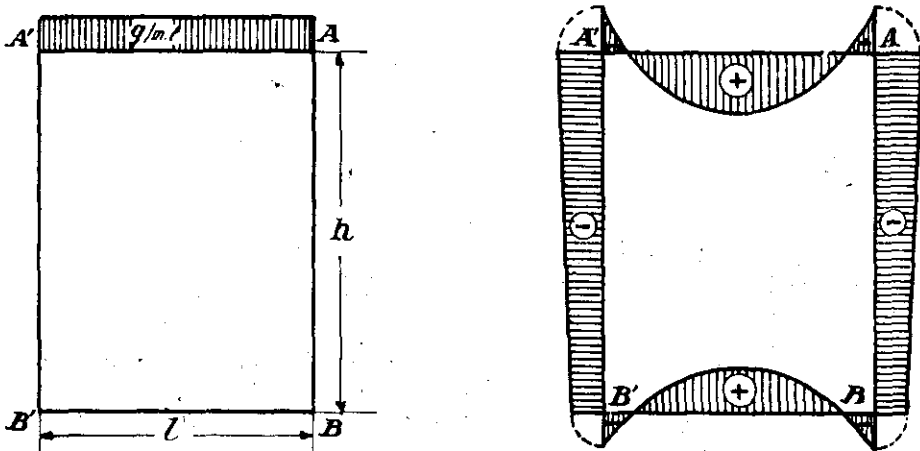
$p_1$  e  $p_2$  = pressões da terra nas bases superior e inferior, em Ks/m

*Reações e momentos fletores*

$H_A$ e $H_B$ = reações horizontais	} nas extremidades A e B
$V_A$ e $V_B$ = reações verticais	
$T_A$ e $T_B$ = forças cortantes	
$M_A$ e $M_B$ = momentos fletores	

**II — Caso A: Cargas verticais uniformemente distribuidas**

**1.º — Diagramma das cargas e dos esforços (croquis).**



( Fig. 2 )

**2.º — Formula para a determinação das reações, forças cortantes e momentos fletores nas extremidades.**

*a) Reações verticais e forças cortantes*

Devido á simetria das cargas os momentos fletores em  $A$  e  $B$  são iguais e consequentemente as reações verticais e as forças cortantes nas extremidades são também iguais. Portanto:

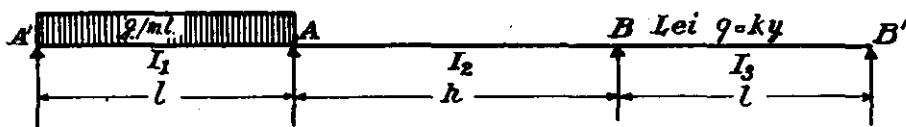
$$V_A = V_{A'} = V_B = V_{B'} = \frac{q l}{2} \quad (40)$$

$$T_A = T_{A'} = T_B = T_{B'} = \frac{q l}{2} \quad (41)$$

b) Momentos fletores

Tomando-se como incognitas hiperestaticas os momentos  $M_A$  e  $M_B$ , torna-se necessario o estabelecimento de duas equações expressas em termos dessas duas incognitas, o que faremos mediante a *condição da invariabilidade dos angulos nas extremidades, após a deformação*. Desta condição se deduz que as deflexões das linhas elasticas de dois trechos adjacentes, no ponto comum (intersecção) são iguais, mas com sinal contrario.

Consideremos, pois, os trechos  $A'A$ ,  $AB$  e  $BB'$  como sendo tres vãos consecutivos de uma viga continua, com apoios ficticios  $A'$ ,  $A$ ,  $B$  e  $B'$  com momentos de inercia diferentes e com a carga correspondente de acordo com o seguinte esquema :



( Fig. 3 )

Assim, para se obterem as duas equações requeridas vamos considerar as flexões nos apoios  $A$  e  $B$ .

Antes, porem, de iniciarmos essa dedução, convém fazer notar que no terceiro vão, o correspondente á lage inferior do aqueduto, sendo apoiado diretamente sobre o terreno, a pressão  $q$  distribue-se segundo a lei das deformações elasticas ( $q = ky$ ), de conformidade com a hipotese fundamental inicialmente estabelecida. Em virtude disto, a deflexão no ponto  $B$ , relativa á linha elastica do terceiro vão deve ser obtida pela equação geral das deflexões (expressão 11), deduzida na primeira parte de nosso estudo, para o caso de uma viga engastada em suas extremidades e apoiada sobre base compressível.

Por outro lado, as deflexões em  $A$ , relativas ás linhas elasticas dos dois primeiros vãos, e a deflexão em  $B$ , relativa á linha elastica do segundo vão, serão obtidas pela formula geral das deflexões, que abaixo transcrevemos.

Assim, a deflexão da linha elastica, no apoio 2 de uma viga 1 — 2, de vão  $l$ , momento de inercia  $J$ , engastada em suas extremidades, é dada pela seguinte formula :

$$\theta_2 = \frac{l}{6 EJ} (M_1 + 2M_2 + 6m_2) \quad (42)$$

sendo :

$$m_2 = \frac{\alpha_2}{l} \frac{\int u_1}{l^2} \quad (43)$$

onde:

$\mathcal{F}$  = area da curva de momentos devido á carga aplicada, considerando a viga isostatica.

$u_1$  = distancia do centro de gravidade dessa area  $\mathcal{F}$  ao apoio 1.

$\mathcal{A}_2$  = reação ficticia da superficie de carga, no apoio 2.

$m_2$  = momento de carga relativo ao apoio 2.

Isto posto, passaremos, agora, ao estabelecimento das duas equações propostas:

**1.ª equação: Considerando o apoio A**

Designando por  $\theta_{A_1}$  e  $\theta_{A_2}$  as deflexões das linhas elasticas, em A, relativas ao 1.º e 2.º vão, respetivamente, e, applicando a formula geral acima mencionada, teremos:

$$\theta_{A_1} = \frac{l}{6EJ_1} (M_{A'} + 2M_A + 6m_{A_1}) \quad (44)$$

$$\theta_{A_2} = \frac{l}{6EJ_2} (M_B + 2M_A + 6m_{A_2}) \quad (45)$$

Estando o segundo vão descarregado, o valor de  $\mathcal{F}_2$  é nulo, e, consequentemente,  $m_{A_2}$  é igual a zero. O valor de  $m_{A_1}$  é, porém, obtido pela formula (43)

$$m_{A_1} = \frac{\mathcal{A}_{A_1}}{l} = \frac{\mathcal{F}_1 u'_{A_1}}{l^2}$$

$$\mathcal{F}_1 = \int_0^l M_x dx = \int_0^l (M_A + R_A x - \frac{1}{2} qx^2) dx$$

Considerando o vão isostatico  $M_A = 0$  e  $R_A = \frac{1}{2} ql$

$$m_{A_1} = \frac{\frac{ql}{12} \cdot \frac{l}{2}}{l^2} = \frac{ql^2}{24}$$

Substituindo-se, pois, este valor do momento de carga, nas expressões (44) e (45), e notando-se que  $M_A = M_{A'}$ , teremos:

$$\theta_{A_1} = \frac{l}{6EJ_1} (3M_A + \frac{1}{4} ql^2) \quad (46)$$

$$\theta_{A_2} = \frac{h}{6EJ_2} (M_B + 2M_A) \quad (47)$$

Pela condição da indeformalidade do angulo em A, inicialmente especificada, resulta que:

$$\theta_{A_1} = -\theta_{A_2}$$

Donde

$$\frac{l}{6EJ_1} (3M_A + \frac{1}{4} ql^2) + \frac{h}{6EJ_2} (M_B + 2M_A) = 0 \quad (48)$$

**Nota:** Esta equação podia, tambem, ter sido obtida aplicando directamente o teorema generalizado dos tres momentos, o qual, como sabemos, é baseado sobre a referida condição.

Multiplicando todos os termos por  $\frac{J_1}{h}$  e cancelando os fatores comuns:

$$\frac{l}{h} (3M_A + \frac{1}{4} ql^2) + \frac{J_1}{J_2} (M_B + 2M_A) = 0 \quad (49)$$

Fazendo  $R = \frac{l}{h}$  e  $S_1 = \frac{J_1}{J_2}$ :

$$R (3M_A + \frac{1}{4} ql^2) + S_1 (M_B + 2M_A) = 0 \quad (50)$$

Agrupando os termos em  $M_A$  e  $M_B$ :

$$M_A (3R + 2S_1) + M_B S_1 + \frac{ql^2}{4} = 0 \quad (51)$$

Fazendo  $Q = \frac{1}{4} ql^2$  e  $Q_1 = 3R + 2S_1$

$$M_A Q_1 + M_B S_1 + Q = 0 \quad (52)$$

**2.ª equação: Considerando o apoio B**

Designemos por  $\theta_{B_2}$  e  $\theta_{B_3}$  as deflexões das linhas elasticas, em B, relativas ao segundo e terceiro vão, respetivamente.

Como já dissemos, o valor de  $\theta_{B_2}$  será determinado applicando a formula geral dada pela expressão 42, enquanto o valor de  $\theta_{B_3}$  será obtido pela expressão 11, pondo-se  $x = l$  e  $\theta_{x_1} = \theta_{B_3}$ .

Comtudo, para facilidade, é preferivel determinar-se o valor de  $\theta_{B'_3}$ , fazendo  $x = 0$  nessa mesma expressão, pois sabemos que o valor de  $\theta_{B_3}$  requerido é, pela simetria da carga, igual a  $\theta_{B'_3}$ , com sinal trocado.

Assim:

$$\theta_{B_2} = \theta_{B'_3} = - \frac{1}{\varepsilon} (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) \quad (53)$$

onde:  $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$  são constantes de integração que serão obtidas pelas formulas anteriormente deduzidas e

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{\lambda b}}$$

Aplicando, agora, a formula (42), para o 2.º vão, e, notando que  $m_{B_2}$  é nulo, por ser o vão descarregado, temos:

$$\theta_{B_2} = \frac{h}{6 EJ_2} (M_A + 2M_B) \quad (54)$$

Pela condição de indeformabilidade do angulo em  $B$ , resulta que:

$$\theta_{B_1} = - \theta_{B_2}$$

Donde:

$$\frac{h}{6 EJ_2} (M_A + 2M_B) = \frac{1}{\epsilon} (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) \quad (55)$$

que representa a segunda equação requerida. Devemos agora, substituir nesta equação, os valores das constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ , que são expressas em termos de uma das incognitas, isto é  $M_B$ .

Para obtermos, então, essas formulas, devemos recorrer ás expressões (33), (34), (35) e (36), nas quais devemos apenas substituir os valores correspondentes aos do nosso problema.

Assim: fazendo  $M_1 = M_B$  e  $T_1 = T_B$ , teremos:

$$C_1 = K_2 M_B z_1 + K_3 T_B z_2 \quad (56)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} K_2 M_B (1 + z_3 + z_1) + \frac{1}{2} K_3 T_B (1 + z_4 + z_2) \quad (57)$$

$$C_3 = - K_2 M_B z_3 - K_3 T_B z_4 \quad (58)$$

$$C_4 = \frac{1}{2} K_2 M_B (-1 + z_3 + z_1) + \frac{1}{2} K_3 T_B (1 + z_4 + z_2) \quad (59)$$

Nestas formulas os valores de  $K_2$  e  $K_3$  são funções de  $\epsilon$  e os valores de  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$  e  $z_4$ , após varias transformações, são em ultima analise, tambem funções de  $\epsilon$ , cujo valor foi acima expresso em termos dos dados de nosso problema. Por brevidade deixamos de repetir os valores dessas constantes, mesmo porque serão transcritos em nosso exemplo numerico, na segunda parte deste estudo.

Substituindo-se os valores dos  $C_s$ , no 2.º membro da equação (55), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) = \frac{1}{\epsilon} \left\{ (K_2 M_B z_1 + K_3 T_B z_2) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{2} K_2 M_B (1 + z_3 + z_1) + \frac{1}{2} K_3 T_B (1 + z_4 + z_2) \right] + \right. \\ \left. + (K_2 M_B z_3 + K_3 T_B z_4) + \left[ \frac{1}{2} K_2 M_B (-1 + z_3 + z_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} K_3 T_B (1 + z_4 + z_2) \right] \right\} \end{aligned}$$

Agrupando os termos em  $M_B$  e  $T_B$ :

$$\frac{1}{\varepsilon} (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{1}{2} K_2 M_B (2z_1 + 1 + z_3 + z_1 + 2z_3 - 1 + z_3 + z_1) + \frac{1}{2} K_3 T_B (2z_2 + 1 + z_4 + z_2 + 2z_4 + 1 + z_4 - z_2) \right]$$

Simplificando

$$\frac{1}{\varepsilon} (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) = \frac{1}{\varepsilon} \left[ 2K_2 M_B (z_1 + z_3) + K_3 T_B (2z_2 + 2z_4 + 1) \right]$$

Substituindo os valores de  $K_2$  e  $K_3$  pelos seus correspondentes e simplificando:

$$\frac{1}{\varepsilon} (C_1 + C_2 - C_3 + C_4) = \frac{\varepsilon}{EJ_3} (z_1 + z_3) M_B + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{EJ_3} (2z_2 + 2z_4 + 1) T_B = 0$$

A expressão (55), poderá, pois, ser assim escrita:

$$\frac{h}{6EJ_2} (M_A + 2M_B) - \frac{\varepsilon}{EJ_3} (z_1 + z_3) M_B - \frac{3\varepsilon^2}{h} (2z_2 + 2z_4 + 1) T_B = 0 \quad (60)$$

Fazendo  $S_2 = \frac{J_3}{J_2}$ , multiplicando todos os termos por  $\frac{6}{h} S_2$  e cancelando todos os fatores comuns  $EJ_3$ :

$$S_2 (M_A + 2M_B) - \frac{6\varepsilon}{h} (z_1 + z_3) M_B - \frac{3\varepsilon^2}{h} (2z_2 + 2z_4 + 1) T_B = 0 \quad (61)$$

Agrupando todos os termos em  $M_A$  e  $M_B$ :

$$M_A S_2 - M_B \left[ \frac{6\varepsilon}{h} (z_1 + z_3) - 2S_2 \right] - \frac{3\varepsilon^2}{h} (2z_2 + 2z_4 + 1) T_B = 0 \quad (62)$$

Fazendo, por brevidade:

$$Z_1 = \frac{6\varepsilon}{h} (z_1 + z_3) - 2S_2$$

$$Z_2 = \frac{3\varepsilon^2}{h} (2z_2 + 2z_4 + 1)$$

teremos, finalmente, que a expressão (55) pôde ser assim escrita:

$$M_A S_2 - M_B Z_1 - Z_2 T_B = 0 \quad (63)$$

que representa a segunda equação requerida em termos das incognitas hiperstaticas.

Resolvendo, agora, simultaneamente, as duas equações (52) e (63) obteremos as formulas definitivas para  $M_A$  e  $M_B$ .

Assim, resolvendo, diretamente, por determinantes, temos:

$$M_B = \frac{S_1 Z_2 T_B - Q Z_1}{Q_1 Z_1 + S_1 S_2} \quad (64)$$

$$M_B = \frac{-Q_1 Z_2 T_B - Q S_2}{Q_1 Z_1 + S_1 S_2} \quad (65)$$

3.º - Expressões gerais para os momentos flectores

a) *Na lage superior*

(Origem em  $A'$ , valores de  $x$  para a direita)

$$M_x = M_{A'} + T_{A'} x - \frac{1}{2} q x^2$$

Sendo  $M_{A'} = M_A$  e  $T_{A'} = T_A = \frac{1}{2} q l$

$$M_x = M_A + \frac{1}{2} q l x - \frac{1}{2} q x^2 \quad (66)$$

b) *Na lage vertical*

(Origem em  $A$ , valores de  $x$  para baixo)

$$M_x = M_A + (M_B - M_A) \frac{x}{h} \quad (67)$$

c) *Na lage inferior*

(Origem em  $B'$ , valores de  $x$  para a direita)

Pela expressão (12):

$$M_x = \frac{1}{K_2} \left( -C_1 e^{\frac{x}{\epsilon}} \operatorname{sen} \frac{x}{\epsilon} + C_2 e^{\frac{x}{\epsilon}} \operatorname{cos} \frac{x}{\epsilon} + C_3 e^{-\frac{x}{\epsilon}} \operatorname{sen} \frac{x}{\epsilon} - C_4 e^{-\frac{x}{\epsilon}} \operatorname{cos} \frac{x}{\epsilon} \right)$$

ou, melhor:

$$M_x = \frac{1}{K_2} \left[ e^{\frac{x}{\epsilon}} (C_2 \operatorname{cos} \frac{x}{\epsilon} - C_1 \operatorname{sen} \frac{x}{\epsilon}) + e^{-\frac{x}{\epsilon}} (C_3 \operatorname{sen} \frac{x}{\epsilon} - C_4 \operatorname{cos} \frac{x}{\epsilon}) \right] \quad (68)$$

onde os valores de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são calculados pelas expressões (56) a (59).

4.º - Formulas para a determinação dos pontos de momento nulo

a) *Na lage superior*

Igualando a zero a expressão (66):

$$\frac{1}{2} q x^2 - \frac{1}{2} q l x - M_A = 0$$

Portanto:  $x^2 - lx - \frac{2M_A}{q} = 0$

$$\text{Donde: } x = \frac{1}{2} \left[ l \pm \sqrt{l^2 + \frac{8M_A}{q}} \right] \quad (69)$$



b) *Na lage vertical*

Igualando a zero a expressão (67):

$$x = \frac{M_A h}{M_A - M_B} \quad (70)$$

c) *Na lage inferior*

Igualando a zero a expressão (68):

$$e^{\frac{x}{\epsilon}} (C_2 \cos \frac{x}{\epsilon} - C_1 \sin \frac{x}{\epsilon}) + e^{-\frac{x}{\epsilon}} (C_3 \sin \frac{x}{\epsilon} - C_4 \cos \frac{x}{\epsilon}) = 0$$

Multiplicando todos os termos por  $e^{\frac{x}{\epsilon}}$  e dividindo-os por  $\cos \frac{x}{\epsilon}$ , teremos:

$$e^{\frac{2x}{\epsilon}} (C_2 - C_1 \tan \frac{x}{\epsilon}) + (-C_4 + C_3 \tan \frac{x}{\epsilon}) = 0$$

Portanto:

$$e^{\frac{2x}{\epsilon}} = \frac{C_4 - C_3 \tan \frac{x}{\epsilon}}{C_2 - C_1 \tan \frac{x}{\epsilon}} \quad (71)$$

A solução analítica direta desta equação é muito complexa. Julgamos preferível adotar a solução gráfica, isto é, determinando a interseção das curvas correspondentes aos dois membros da equação acima.

Para facilitar esta tarefa é bastante construirmos as curvas para os trechos próximos aos pontos procurados, o que é fácil de se avaliar aproximadamente. Para a determinação dos valores dessas duas funções correspondentes aos varios valores de  $x$ , as operações e os resultados serão entabelados num quadro convenientemente organizado.

### 5.º — Formulas para momentos flectores maximos

Estas formulas são obtidas mediante as expressões gerais dos momentos, já deduzidas. É bastante substituir nessas expressões o valor de  $x$  correspondente aos pontos onde se verificam os momentos maximos, pontos esses que, neste caso, são previamente conhecidos, devido á simetria da carga. Esta determinação é feita apenas para as lages horizontais, visto como na vertical a variação dos momentos é linear.

a) *Na lage superior*

Fazendo  $x = \frac{l}{2}$  na expressão (66):

$$M_{max} = M_A + \frac{1}{4} q l^2 - \frac{1}{8} q l^2$$

Portanto:

$$M_{max} = M_A + \frac{1}{8} q l^2 \quad (72)$$

b) Na lage inferior

Esta formula já foi deduzida no primeiro capitulo para o caso de uma viga, de forma que é bastante transcreve-la aqui:

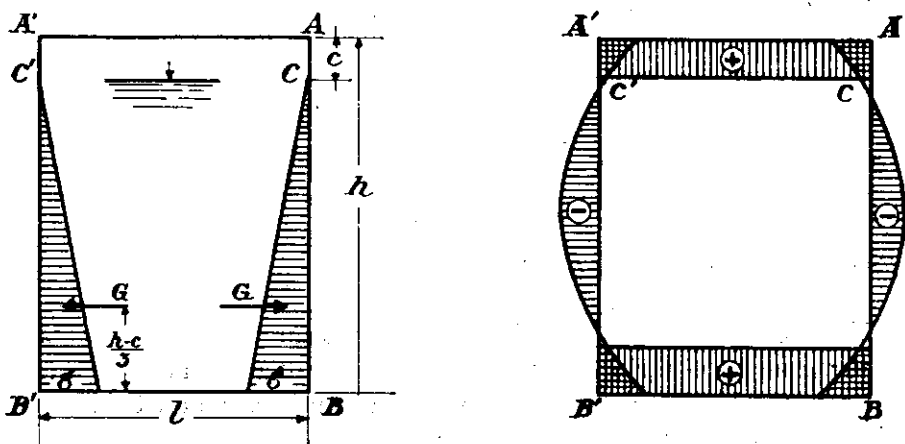
$$M_{max} = \frac{2}{K_2} (C_2 n_1 - C_1 n_2) \quad (73)$$

onde:

$C_1$  e  $C_2$  são constantes já calculadas  
 $K_2$ ,  $n_1$  e  $n_2$  são funções conhecidas de  $\epsilon$

### III — Caso B: Pressão hidrostática interior

1.º — Diagrama das cargas e dos esforços (croquis).



(Fig. 4)

2.º — Formulas para a determinação dos momentos flectores e das forças cortantes nas extremidades.

a) Pressões unitarias

Como se nota pelo diagrama acima, as pressões se distribuem segundo a lei triangular sobre o segmento  $h - c$  da lage vertical.

Considerando o ponto A como origem, a pressão unitaria  $g_x$  em qualquer ponto  $x$  dessa lage é, pois, dada pela seguinte equação:

$$g_x = w_a (x - c) \quad (74)$$

A pressão unitaria  $g$  na base será então igual a:

$$g = w_a (h - c) \quad (75)$$

b) *Pressões totais e momentos das pressões*

Para qualquer ponto  $x$ , a pressão total  $G_x$  e o momento  $\mathcal{M}_x$  dessa pressão em relação a esse ponto serão dadas pelas seguintes expressões:

$$G_x = \frac{1}{2} g_x (x - c) = \frac{w_a (x - c)^2}{2} \quad (76)$$

$$\mathcal{M}_x = G_x \frac{(x - c)}{3} = \frac{w_a (x - c)^3}{6} \quad (77)$$

A pressão total  $G$ , para toda a lage, é dada fazendo-se  $x = h$  na expressão (76). Assim:

$$G = \frac{w_a (h - c)^2}{2} \quad (78)$$

O momentos  $\mathcal{M}_B$  e  $\mathcal{M}_A$  dessa pressão total  $G$ , em relação aos pontos  $B$  e  $A$ , são assim determinados:

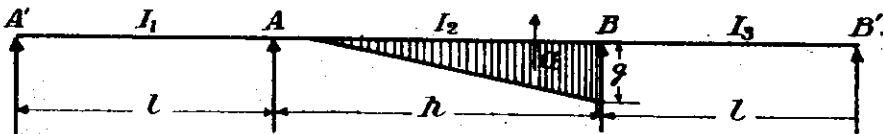
$$\mathcal{M}_B = G \left( \frac{h - c}{3} \right) = \frac{w_a (h - c)^3}{6} \quad (79)$$

$$\mathcal{M}_A = G \left[ h - \frac{1}{3} (h - c) \right] = \frac{w_a (h - c)^2 (2h + c)}{6} \quad (80)$$

c) *Formulas para momentos fletores*

Tomando-se como incognitas hiperestaticas os momentos  $M_A$  e  $M_B$ , torna-se necessario o estabelecimento de duas equações, que poderão ser obtidas, como anteriormente, mediante a condição de invariabilidade dos angulos, após a deformação.

Consideremos, pois, os trechos  $A'A$ ,  $AB$  e  $BB'$  como tres vãos consecutivos de uma viga continua, com apoios fiticios  $A'$ ,  $A$ ,  $B$  e  $B'$ , com momentos de inercia diferentes, e carregada de conformidade com o esquema abaixo:



(Fig. 5)

Considerando as deflexões em  $A$  e  $B$ , e aplicando a formula geral das deflexões (expressão 42), podemos estabelecer as duas equações requeridas, em função das incognitas  $M_A$  e  $M_B$ .

Assim, designando por :

$\theta_{A_1}$  e  $\theta_{A_2}$  = as deflexões das linhas elasticas, em  $A$ , relativas ao primeiro e segundo vão respectivamente

$\theta_{B_1}$  e  $\theta_{B_2}$  = as deflexões das linhas elasticas, em  $B$ , relativas ao segundo e terceiro vão, respectivamente,

e, notando-se que os momentos de carga nos vãos extremos são nulos (vãos descarregados), temos:

1.º) Considerando o apoio  $A$ .

$$\theta_{A_1} = \frac{l}{6EJ_1} (M_{A'} + 2M_A) \quad (81)$$

$$\theta_{A_2} = \frac{l}{6EJ_2} (M_B + 2M_A + 6m_A) \quad (82)$$

2.º) Considerando o apoio  $B$ .

$$\theta_{B_1} = \frac{h}{6EJ_2} (M_B + 2M_B + 6m_B) \quad (83)$$

$$\theta_{B_2} = \frac{l}{6EJ_3} (M_{B'} + 2M_B) \quad (84)$$

Pela condição da indeformabilidade dos angulos, teremos:

$$\theta_{A_1} = -\theta_{A_2} \quad \text{e} \quad \theta_{B_1} = -\theta_{B_2}$$

Portanto:

$$\frac{l}{6EJ_1} (M_{A'} + 2M_A) + \frac{h}{6EJ_2} (M_B + 2M_A + 6m_A) = 0 \quad (85)$$

$$\frac{h}{6EJ_2} (M_A + 2M_B + 6m_B) + \frac{l}{6EJ_3} (M_{B'} + 2M_B) = 0 \quad (86)$$

Cancelando os fatores comuns, e notando que  $M_{A'} = M_A$  e  $M_{B'} = M_B$ :

$$3 \frac{l}{J_1} M_A + \frac{h}{J_2} (M_B + 2M_A + 6m_A) = 0 \quad (87)$$

$$\frac{h}{J_2} (M_A + 2M_B + 6m_B) + 3 \frac{l}{J_3} M_B = 0 \quad (88)$$

Multiplicando todos os termos da equação (87) por  $\frac{J_1}{h}$  e os da equação (88) por  $\frac{J_3}{h}$ , e, notando que:

$$R = \frac{l}{h} \quad S_1 = \frac{J_1}{J_2} \quad \text{e} \quad S_3 = \frac{J_3}{J_2}$$

Resulta:

$$3 R M_A + S_1(M_B + 2 M_A + 6 m_A) = 0 \quad (89)$$

$$S_3 (M_A + 2M_B + 6 m_B) + 3 R M_B = 0 \quad (90)$$

Agrupando os termos em  $M_A$  e  $M_B$ :

$$M_A (3R + 2S_1) + M_B S_1 = - 6 S_1 m_A \quad (91)$$

$$M_B (3R + 2S_3) + M_A S_3 = - 6 S_3 m_B \quad (92)$$

Fazendo:

$$Q_1 = 3R + 2S_1 \quad \text{e} \quad Q_3 = 3R + 2S_3$$

Então:

$$M_A Q_1 + M_B S_1 = - 6 S_1 m_A \quad (93)$$

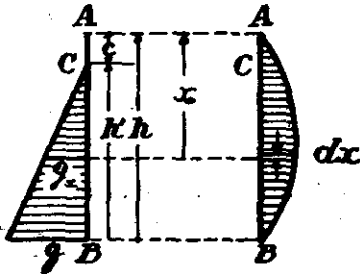
$$M_B Q_3 + M_A S_3 = - 6 S_3 m_B \quad (94)$$

Vamos, agora, determinar os valores de  $m_A$  e de  $m_B$ , pela formula (43).

$$m_A = - \frac{\mathfrak{F}_2 u_B}{h^2} \quad m_B = - \frac{\mathfrak{F}_2 u_A}{h^2}$$

**Nota:** Os sinais negativos são devidos ao fáto da carga atuar em sentido oposto.

Em virtude da carga ter distribuição triangular sobre parte do vão, a curva dos momentos é composta de dois ramos, sendo um linear e outro parabolico (parabola cubica). Neste caso os valores de  $\mathfrak{F}_2$ ,  $u_A$  e  $u_B$  só podem ser determinados por integração.



(Fig. 6)

Consideremos, pois, um elemento  $dx$  da area dos momentos, a uma distancia  $x$  da origem  $A$ , sendo neste ponto a pressão unitaria igual a  $g_x$ , a pressão total igual a  $G_x$  e o momento da pressão igual a  $\mathfrak{M}_x$ .

$$\mathfrak{F}_2 = \int_c^A M_x dx + \int_B^c M'_x dx$$

$$\text{Mas: } M_x = M_A + \mathcal{K}_A x \quad \text{e} \quad M'_x = M_A + \mathcal{K}_x x - \mathfrak{N}_x$$

$$\text{Sendo } \mathfrak{N}_x = \frac{w_a (x - c)^2}{6} \quad M_A = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{K}_A = \frac{\mathfrak{N}_B}{h} \quad \text{temos:}$$

$$\mathfrak{F}_2 = \frac{\mathfrak{N}_B}{h} \int_0^c x dx + \frac{\mathfrak{N}_B}{h} \int_c^h x dx - \frac{w_a}{6} \int_c^h (x - c)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\mathcal{N}_B}{h} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^c + \frac{\mathcal{N}_B}{h} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^h - \frac{w_a}{6} \left[ \frac{(x-c)^4}{4} \right]_0^h \\
 &= \frac{\mathcal{N}_B}{2h} (c^2 + h^2 - c^2) - \frac{w_a (h-c)^4}{24} \\
 &= \frac{\mathcal{N}_B h}{2} - \frac{w_a (h-c)^4}{24}
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $\mathcal{N}_B$  dado pela formula (79):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_2 &= \frac{w_a (h-c)^3}{12} h - \frac{w_a (h-c)^4}{24} = \frac{w_a (h-c)^3}{24} [2h - (h-c)] \\
 &= \frac{w_a (h-c)^3 (h+c)}{24}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}_2 u_A = \int_c^A M_x x dx + \int_B^c M'_x x dx$$

Substituindo os valores de  $M_x$ ,  $M'_x$  acima dados, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_2 u_A &= \frac{\mathcal{N}_B}{h} \int_0^c x^2 dx + \frac{\mathcal{N}_B}{h} \int_0^h x^2 dx - \frac{w_a}{6} \int_0^h (x-c)^3 x dx \\
 &= \frac{\mathcal{N}_B}{3h} \left[ x^3 \right]_0^c + \frac{\mathcal{N}_B}{3h} \left[ x^3 \right]_0^h - \frac{w_a}{6} \left[ \frac{(x-c)^4 c}{4} + \frac{(x-c)^5}{5} \right]_0^h \\
 &= \frac{\mathcal{N}_B}{3h} (c^3 + h^3 - c^3) - \frac{w_a}{6} \left[ \frac{(h-c)^4 (5c + 4h - 4c)}{20} \right] \\
 &= \frac{\mathcal{N}_B}{3h} \cdot h^3 - \frac{w_a}{120} (h-c)^4 (4h+c)
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de  $\mathcal{N}_B$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_2 u_A &= \frac{w_a (h-c)^3 h^2}{18} - \frac{w_a (h-c)^3}{120} \cdot (4h^2 - 3hc - c^2) \\
 &= \frac{w_a (h-c)^3}{360} \cdot (20h^2 - 12h^2 + 9hc + 3c^2) \\
 &= \frac{w_a (h-c)^3}{360} [8h^2 + 9hc + 3c^2]
 \end{aligned}$$

Para se determinar o valor de  $u_B$  devemos antes calcular o valor de  $u_A$  pelo quociente  $\frac{\mathcal{F}_2 u_A}{\mathcal{F}_2}$  e depois subtrairmos esse valor de  $h$ .

Portanto:

$$\begin{aligned}
 u_A &= \frac{\mathcal{F}_2 u_A}{\mathcal{F}_2} = \frac{w_a (h-c)^3 (8h + 9hc + 3c^2)}{360} \cdot \frac{24}{w_a (h-c)^3 (h+c)} \\
 &= \frac{8h^2 + 9hc + 3c^2}{15(h+c)}
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente:

$$u_B = h - u_A = \frac{15(h+c) - (8h^2 + 9hc + 3c^2)}{15(h+c)}$$

$$= \frac{7h^2 + 6hc - c^2}{15(h+c)}$$

E o valor de  $\mathfrak{F}_2 u_B$  será, pois:

$$\mathfrak{F}_2 u_B = \frac{w_a (h-c)^3 (h+c) \cdot (7h^2 + 6hc - c^2)}{24 \cdot 15(h+c)}$$

$$= \frac{w_a (h-c)^3}{360} (7h^2 + 6hc - c^2)$$

Façamos:

$$N = \frac{w_a (h-c)^3}{60 h^2}; \quad N_1 = 7h^2 + 6hc - c^2; \quad N_2 = 8h^2 + 9hc + 3c^2$$

Então:

$$\mathfrak{F}_2 u_A = N N_3 \cdot \frac{h^2}{6} \qquad \mathfrak{F}_2 u_B = N N_1 \cdot \frac{h^2}{6}$$

Portanto:

$$m_A = - \frac{\mathfrak{F}_2 u_B}{h^2} = - \frac{N N_1}{6} \qquad m_B = - \frac{\mathfrak{F}_2 u_A}{h^2} = - \frac{N N_3}{6}$$

Substituindo estes valores dos momentos de carga nas expressões (93) e (94) teremos as duas equações requeridas, contendo uma relação entre as incognitas  $M_A$  e  $M_B$ . Então:

$$M_A Q_1 + M_B S_1 = N N_1 S_1 \qquad (95)$$

$$M_A S_3 + M_B Q_3 = N N_3 S_3 \qquad (96)$$

Resolvendo simultaneamente essas duas equações, teremos:

$$M_A = N S_1 \frac{N_1 Q_3 - S_3 N_3}{Q_1 Q_3 - S_1 S_3} \qquad (97)$$

$$M_B = N S_3 \frac{N_3 Q_1 - S_1 N_1}{Q_1 Q_3 - S_1 S_3} \qquad (98)$$

Fazendo, finalmente,  $\Delta = Q_1 Q_3 - S_3 S_1$ :

$$M_A = \frac{N S_1}{\Delta} (N_1 Q_3 - S_3 N_3) \qquad (99)$$

$$M_B = \frac{N S_3}{\Delta} (N_3 Q_1 - S_1 N_1) \qquad (100)$$

## d) Formulas para as reações horizontais

$$\begin{aligned}
 H_A &= - \left[ T_A + \frac{\mathcal{N}_B}{h} \right] = - \left[ - \left( \frac{M_B - M_A}{h} \right) + \frac{\mathcal{N}_B}{h} \right] = \\
 &= - \frac{1}{h} \left[ - (M_B - M_A) + \mathcal{N}_B \right] \quad (101)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_B &= - \left[ T_B - \frac{\mathcal{N}_A}{h} \right] = - \left[ \left( \frac{M_A - M_B}{h} \right) + \frac{\mathcal{N}_B}{h} \right] = \\
 &= - \frac{1}{h} \left[ (M_B - M_A) + \mathcal{N}_A \right] \quad (102)
 \end{aligned}$$

$\mathcal{N}_A$  e  $\mathcal{N}_B$  são determinadas pelas expressões (79) e (80)

**Verificação:** A soma das duas reações horizontais deve ser igual á carga total  $G$ , já determinada. Portanto:

Pela expressão (78)

$$G = - \frac{w_a (h - c)^2}{2}$$

Pelas fomulas (101) e (102)

$$H_A + H_B = - \frac{1}{h} (\mathcal{N}_A + \mathcal{N}_B)$$

Substituindo os valores de  $\mathcal{N}_A$  e  $\mathcal{N}_B$ , temos

$$\begin{aligned}
 H_A + H_B &= - \frac{1}{h} \left[ \frac{w_a (h - c)^2}{6} + \frac{w_a (h - c)^2 (2h + c)}{6} \right] \\
 &= - \frac{w_a (h - c)^2}{2} \quad (103)
 \end{aligned}$$

## 3.º - Expressões gerais para os momentos fletores

Nas lages horizontais os momentos fletores são evidentemente, constantes, e iguais a  $M_A$  e  $M_B$ , respetivamente.

*Na lage vertical*

Devemos analisar os dois ramos  $AC$  e  $CB$ , considerando o ponto  $A$  como origem.

$$\text{Para o ramo } AC \quad M_x = M_A + H_A x \quad (104)$$

$$\text{Para o ramo } CB \quad M_x = M_B + H_A x - \frac{w_a (x - c)^3}{6} \quad (105)$$



4.º — Formulas para a determinação dos pontos de momento nulo

Só é necessario analisar a lage vertical.

No ramo AC:

Só haverá ponto de momento nulo neste trecho quando  $M_A$  fôr menor que  $H_A c$ , e este ponto será determinado pela formula abaixo, obtida fazendo a expressão (104) igual a zero.

$$x = - \frac{M_A}{H_A} \quad (106)$$

No ramo CB:

Igualando a zero a expressão (105), teremos:

$$M_A + H_A x - \frac{w_a (x - c)^3}{6} = 0 \quad (107)$$

Multiplicando todos os termos da equação acima por  $\frac{6}{w_a}$  e desenvolvendo, temos:

$$\frac{6M_A}{w_a} + \frac{6H_A}{w_a} x + x^3 - 3cx^2 + 3c^2x - c^3 = 0$$

Portanto:

$$x^3 - 3cx^2 + \left(3c - \frac{6H_A}{w_a}\right) x + \left(\frac{6M_A}{w_a} - c^3\right) = 0$$

Tambem neste caso, em lugar de resolver algebricamente esta equação de 3.º grau, julgamos ser mais conveniente desmembrá-la em duas partes, da melhor fórmula possível, e determinar as raizes pelas interseções das curvas representativas de ambas as partes. Assim:

$$x^3 - 3cx^2 = - \left(3c^2 + \frac{6H_A}{w_a}\right) x - \left(c^3 - \frac{6M_A}{w_a}\right) \quad (108)$$

5.º — Formulas para a determinação dos momentos máximos

É bastante analisar o ramo CB da lage vertical. Sendo  $c$  um valor pequeno (como no nosso caso), o ponto de momento máximo está proximo do centro. Vamos, porem, determiná-lo exatamente, igualando a zero a primeira derivada da equação (105).

$$\frac{dMx}{dx} = H_A - \frac{3w_a}{6} (x - c)^2 = 0$$

Logo:

$$(x - c)^2 = \frac{2H_A}{w_a}$$

$$x^2 - 2cx + \left(c^2 - \frac{2H_A}{w_a}\right) = 0$$

Portanto:

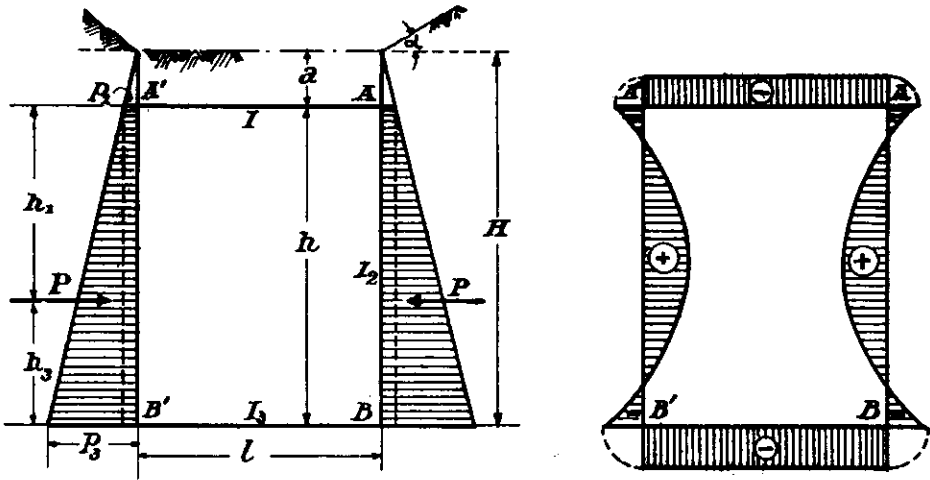
$$x = c + \sqrt{\frac{2H_A}{\omega_a}} \quad (109)$$

Substituindo este valor de  $x$  na expressão (105) temos:

$$M_{max} = M_A + H_A \left[ c + \sqrt{\frac{2H_A}{\omega_a}} \right] - \frac{\omega_a}{6} \left( \frac{2H_A}{\omega_a} \right)^{3/2} \quad (110)$$

#### IV – Caso C: Empuxo horizontal das terras – Carga simetrica

1.º – Diagrama das cargas e dos esforços (croquis).



( Fig.7 )

2.º – Formulas para a determinação dos momentos flectores e reacções nas extremidades.

a) Empuxo total  $E_t$

Este valor pôde ser determinado graficamente pelo metodo de Poncelet ou, analiticamente, pela seguinte formula:

$$E_t = \frac{1}{2} w t H^2 \cos \alpha \frac{\cos \alpha - \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi}}{\cos \alpha + \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \varphi}} \quad (111)$$

onde:

$H = h + a$  (sendo  $a$  a altura da terra sobreposta)

$w t$  = peso especifico da terra

$\alpha$  = talude natural do terreno

$\varphi$  = angulo de atrito das terras

b) *Pressões unitarias sobre a lage vertical*

Verifica-se, neste caso, a lei do trapezio, cujas pressões unitarias nas bases são as seguintes:

$$\text{Na base inferior: } p_3 = \frac{2 E_t}{H} \quad (112)$$

$$\text{Na base superior: } p_1 = p_3 \frac{a}{H} \quad (113)$$

Para facilidade de demonstração convém, porém, transformar esta lei em duas outras regras, uma triangular e outra retangular, assim:

$$\text{Lei triangular: } p'_x = p_x \quad (114)$$

$$\text{sendo } p = \frac{p_3 - p_1}{h} \quad (115)$$

$$\text{Lei retangular: } p''_x = p_3 \quad (116)$$

c) *Pressão total e momentos da mesma nas bases:*

A pressão total  $P$  é dada pela seguinte formula:

$$P = \left( \frac{p_1 + p_3}{2} \right) h \quad (117)$$

Os momentos  $\mathfrak{M}_B$  e  $\mathfrak{M}_A$  dessa pressão  $P$ , nos pontos  $A$  e  $B$ , são dados pelas seguintes expressões:

$$\mathfrak{M}_B = P h_3 \quad \mathfrak{M}_A = P h_1$$

$$\text{Mas } h_3 = \left( \frac{2p_1 + p_3}{p_1 + p_3} \right) \frac{h}{3} \quad \text{e} \quad h_1 = \left( \frac{p_1 + 2p_3}{p_1 + p_3} \right) \frac{h}{3}$$

Substituindo os valores de  $h$  e  $P$ , na expressão acima:

$$\mathfrak{M}_B = (2p_1 + p_3) \frac{h^2}{6} \quad \mathfrak{M}_A = (p_1 + 2p_3) \frac{h^2}{6}$$

$$\text{Mas, pela expressão (115)} \quad p_3 = ph + p_1$$

Portanto, substituindo este valor nas formulas acima:

$$\mathfrak{M}_B = \frac{p_1 h^2}{2} + \frac{p h^2}{6} \quad (118) \quad \mathfrak{M}_A = \frac{p_1 h^2}{2} + \frac{p h^2}{3} \quad (119)$$

*Observação:* Notamos que estas formulas podiam ter sido determinadas diretamente, considerando as duas leis do triangulo, separadamente.

d) *Formulas para momentos fletores*

Convem deduzir estas formulas considerando as duas leis supra mencionadas, separadamente, e, em seguida, somar as duas expressões resultantes. Designemos, pois:

$M'_A$  e  $M'_B$  = momentos fletores em  $A$  e  $B$ , correspondentes á lei triangular.

$M''_A$  e  $M''_B$  = momentos fletores em  $A$  e  $B$ , correspondentes á lei retangular.

*Lei triangular*

Julgamos desnecessario fazer a dedução completa das formulas para este caso, pois podemos obte-las diretamente tendo em vista as formulas do caso anterior (caso da pressão hidrostática), o qual é também baseado sobre a lei triangular. Para obtermos, portanto, as formulas para este caso é bastante fazer  $c = 0$  e  $w_a = p$  e trocar os sinais nas formulas do caso anterior.

Teremos, então:

$$N = -\frac{ph}{60} \quad N_1 = 7 h^2 \quad N_3 = 8 h^2$$

Portanto, substituindo estes valores nas expressões (99) e (100):

$$M'_A = -\frac{ph^3}{60} (7Q_3 - 8S_3) \frac{S_1}{\Delta} \quad (120)$$

$$M'_B = -\frac{ph^3}{60} (8Q_1 - 7S_1) \frac{S^3}{\Delta} \quad (121)$$

Fazendo, como anteriormente,

$$Q_1 = 3R + 2S_1 \quad \text{e} \quad Q_3 = 3R + 2S_3$$

$$M'_A = -\frac{ph^3}{20} (7R + 2S_3) \frac{S_1}{\Delta} \quad (122)$$

$$M'_B = -\frac{ph^3}{20} (8R + 2S_1) \frac{S_3}{\Delta} \quad (123)$$

Finalmente

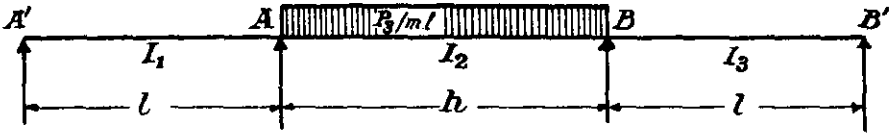
$$Q'_1 = 7R + 2S_3 \quad \text{e} \quad Q'_3 = 8R + 2S_1$$

$$M'_A = -\frac{ph^3}{20} \cdot \frac{Q'_1 S_1}{\Delta} \quad (124)$$

$$M'_B = -\frac{ph^3}{20} \cdot \frac{Q'_3 S_3}{\Delta} \quad (125)$$

*Lei retangular*

Consideremos os tres trechos  $A'A$ ,  $AB$  e  $BB'$  como tres vãos consecutivos de uma viga continua, com momentos de inercia diferentes, e carregada como mostra o esquema abaixo :



( Fig. 8 )

Aplicando os mesmos principios dos casos anteriores, quanto ás deformações angulares em  $A$  e  $B$ , obteremos as duas expressões (93) e (94):

$$M''_A Q_1 + M''_B S_1 = - 6 m_A S_1$$

$$M''_A S_3 + M''_B Q_3 = - 6 m_B S_3$$

Não é necessario, neste caso, determinar os valores de  $m_A$  e  $m_B$  por integração, como fizemos anteriormente, pois, em se tratando de uma carga uniformemente distribuida, o valor póde ser obtido diretamente. Assim :

$$m_A = m_B = \frac{p_3 h^2}{24}$$

Substituindo, pois, este valor nas expressões acima, teremos:

$$M''_A Q_1 + M''_B S_1 = - \frac{p_3 h^2}{4} S_1 \tag{126}$$

$$M''_A S_3 + M''_B Q_3 = - \frac{p_3 h^2}{4} S_3 \tag{127}$$

Resolvendo simultaneamente, temos:

$$M''_A = - \frac{p_3 h^2}{4} S_1 \frac{Q_3 - S_3}{Q_1 Q_3 - S_1 S_3} \tag{128}$$

$$M''_B = - \frac{p_3 h^2}{4} S_3 \frac{Q_1 - S_1}{Q_1 Q_3 - S_1 S_3} \tag{129}$$

Como:

$$Q_1 = 3R - 2S_1 \quad Q_3 = 3R + 2S_3 \quad \Delta = Q_1 Q_3 - S_1 S_3$$

$$M''_A = - \frac{p_3 h^2}{4} \frac{S_1}{\Delta} (3R + S_3) \tag{130}$$

$$M''_B = - \frac{p_3 h^2}{4} \frac{S_3}{\Delta} (3R + S_1) \tag{131}$$

Fazendo, finalmente:

$$Q_1'' = 3R + S_1 \quad \text{e} \quad Q_3'' = 3R + S_3$$

$$M_A' = - \frac{p_1 h^2}{4} \cdot \frac{S_1 Q_3''}{\Delta} \quad (132)$$

$$M_B'' = - \frac{p_3 h^2}{4} \cdot \frac{S_3 Q_1''}{\Delta} \quad (133)$$

Combinando, agora, os efeitos devidos a ambas as leis (triangular e retangular), teremos:

$$M_A = M_A' + M_A'' = - \left[ \frac{p h^2}{20} \cdot \frac{S_1 Q_1'}{\Delta} + \frac{p_3 h^2}{4} \cdot \frac{S_1 Q_3''}{\Delta} \right] \quad (134)$$

$$M_B = M_B' + M_B'' = - \left[ \frac{p h^2}{20} \cdot \frac{S_3 Q_3'}{\Delta} + \frac{p_3 h^2}{4} \cdot \frac{S_3 Q_1''}{\Delta} \right] \quad (135)$$

**Nota:** Não convém simplificar ainda mais estas formulas, afim de mostrar os efeitos devidos a ambas ás leis.

e) *Formulas para as reações horizontais*

As formulas são identicas ao do caso anterior, apenas com o sinal trocado. Transcrevemo-las:

$$H_A = \frac{1}{h} \left[ - (M_B - M_A) - \mathcal{N}_B \right] \quad (136)$$

$$H_B = \frac{1}{h} \left[ + (M_B - M_A) - \mathcal{N}_A \right] \quad (137)$$

onde os valores de  $\mathcal{N}_A$  e  $\mathcal{N}_B$  são, porém, determinados pelas formulas (118) e (119).

*Verificações:*

Uma das verificações é que a soma das reações horizontais deve ser igual á carga total  $P$ .

$$H_A + H_B = P = \left( \frac{p_1 + p_3}{2} \right) h = p_1 h + \frac{p h^2}{2} \quad (138)$$

Outra verificação consiste no fato que a soma das reações horizontais deve ser igual ao empuxo total das terras ( $E_t$ ) menos a pressão total na base da terra sobreposta. Portanto:

$$H_A + H_B = E_t - \frac{p_1 a}{2} \quad (139)$$

**3.º — Expressões gerais para os momentos fletores**

Nas lages horizontais (superior e inferior) os momentos fletores são constantes, e, respetivamente, iguais a  $M_A$  e  $M_B$ .

*Na lage vertical*

$$M_x = M_A + H_A x - \frac{1}{2} p_3 x^2 - \frac{1}{6} p x^3 \quad (140)$$

**4.º — Formulas para a determinação dos pontos de momento nulo**

Só é necessario analisar a lage vertical.

Igualando a zero a expressão (140) e multiplicando todos os termos por  $\frac{6}{p}$ , teremos

$$\frac{6M_A}{p} - \frac{6H_A}{p} x - \frac{3p_3}{p} x^2 - x^3 = 0$$

Portanto :

$$x^3 + \frac{3 p_3}{p} x^2 = \frac{6M_A}{p} + \frac{6H_A}{p} x \quad (141)$$

**5.º — Formulas para a determinação dos momentos maximos**

Só para a lage vertical.

O ponto  $x_1$  onde se verifica o momento maximo é obtido igualando a zero a primeira derivada da expressão (140). Assim:

$$\frac{dM_x}{dx} = H_A - p_3 x_1 - \frac{1}{2} p x_1^2 = 0$$

Portanto:

$$x_1^2 + 2 \frac{p_3}{p} x_1 - H_A = 0$$

Donde:

$$x = - \frac{p_3}{p} + \sqrt{\left(\frac{p_3}{p}\right)^2 + \frac{2H_A}{p}} \quad (142)$$

Substituindo este valor de  $x_1$  na expressão (140), temos:

$$M_{max} = M_A + H_A x_1 - \frac{1}{2} p_3 x_1^2 - \frac{1}{6} p x_1^3 \quad (143)$$