Estática das Cúpolas Poligonais

J. M. de Toledo Malta

Eng. chefe da 3.ª Secção Técnica

Definição: O gênero de cúpolas estudado neste artigo abrange todas as estrutúras rígidas de paredes planas dispostas segundo as faces de um tronco de pirâmide regular, de eixo vertical. A espessura das paredes deve ser bastante pequena, relativamente ás demais dimensões, para se poder admitir a distribuição uniforme dos esforços simples de tração ou compressão.

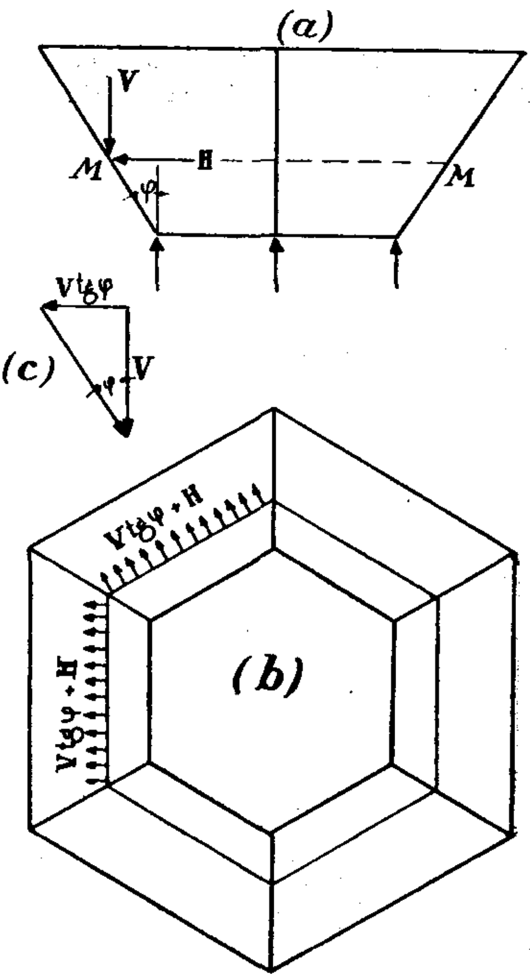

Fig. 1

Cargas: Supõe-se que todas as faces suportam cargas iguais e igualmente distribuidas. A distribuição deve ser uniforme ao longo de cada secção horizontal podendo variar de qualquer maneira de uma secção para outra.

Considerações preliminares. Antes de ser abordada a análise matemática do problema, é preciso formar-se uma idéia geral do modo como se comporta a estrutúra proposta para resistir ás cargas que suporta. Para fixar as idéias consideremos a cúpola hexagonal representada na figura 1, em planta e elevação. Se isolarmos um elemento infinitamente pequeno, pela secção horizontal *MM*, teremos um anel hexagonal elementar, sôbre cada um de cujos lados atuarão as forças *V* vertical, e *H* horizontal (Fig. 1a.)

A primeira decompõe-se

em V: cosφ no plano da face, normalmente ao lado do anel, donde resulta a compressão longitudinal da parede subjacente. A segunda, H, somada á componente horizontal de V, isto é, a $Vtg\varphi$, vai afetar unicamente o anel hexagonal, (Fig 1, b, c) provocando aí, esforços de flexão composta com extensão ou compressão, conforme o sentido da resultante horizontal.

Cada anel elementar, em tudo que diz respeito ás componentes horizontais, das cargas, póde ser assimilado a um elemento prismático de iguais dimensões transversais. Esta observação leva-nos a antepôr á análise geral o estudo prévio de um

Prisma regular réto sujeito a uma pressão uniforme, normalmente ás faces.

Sejam n o número de faces do prisma e l o comprimento de cada um dos n lados da base. Então o angulo central correspondente a um lado será $\frac{2\pi}{n}$ e o apótema do polígono-base será:

$$a = \frac{l}{2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n}$$

Consideremos três faces consecutivas de um elemento de prisma representado em planta na Fig 2.

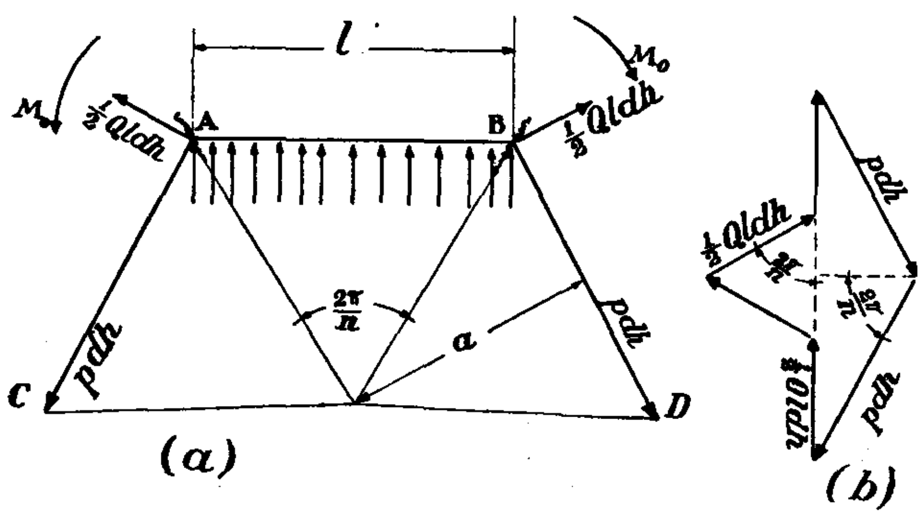

Fig. 2

Chamemos Q á pressão normal á face por unidade de área, considerada positiva quando atúe de dentro para fóra. Seja p o esforço por unidade de altura no sentido AB, correspondendo o sinal *mais* a uma compressão. Imaginemos, agora, a viga elementar AB separada das contiguas AC e BD por duas secções pelas arestas A e B, fazendo atuar aí as forças de ligação, de modo que nada se altere no equilíbrio do elemento considerado. (Fig. 2, a)

A carga sôbre a face AB será $Qldh$.

As fôrças de ligação em cada aresta seccionada serão: 1.°) metade da carga correspondente á face contígua, isto é, $\frac{1}{2}\ Qldh$, dirigida normalmente a essa face; 2.°) o esforço pdh, dirigido na direção da viga elementar contígua; 3.°) o momento de engastamento M_o na aresta por unidade de altura. Na fig. 2, vê-se desenhado o polígno destas forças em equilíbrio.

A equação de equilíbrio, observada a convenção dos sinais, será a seguinte, portanto:

$$2 \times \frac{1}{2}\ Qldh + 2 \times \frac{1}{2}\ Qldh \cos \frac{2\pi}{n} + 2pdh sen \frac{2\pi}{n} = 0$$

ou simplificando:

$$Ql\ (1 + \cos \frac{2\pi}{n}) + 2\ p sen \frac{2\pi}{n} = 0$$

Donde:

$$p = -\ \frac{1}{2}\ Ql \cot g \frac{\pi}{n} = -\ Qa$$

Temos assim determinado o esforço normal ás arestas no plano das faces. Quanto aos M_o inutil é escrever a respectiva equação de equilíbrio, visto que os dois momentos em A e B, iguaes por simetria e opostos, anulam-se evidentemente. M_o é uma incógnita hiperestática. Podemos, porem, determiná-lo sem dificuldade, escrevendo a equação dos três momentos generalizada, aplicavel ao caso, visto que a posição relativa dos vértices não se altera com a deformação, perfeitamente simétrica. Desta fórma, achamos logo:

$$M_o = \frac{Ql^2}{12}$$

Donde se conclue que cada viga elementar AB, BD, etc. se comporta, á flexão, exatamente como outras tantas vigas simples perfeitamente engastadas nas extremidades. Para não haver dúvida quanto ao sentido de M_0 na equação supra, seja dito, segundo nossa convenção usual, que se considera positivo o momento fletôr que provoca extensão na face interior da parede.

Achando-se agora completamente resolvido o problema proposto do prisma réto regular, temos o caminho desbravado para proseguir sem mais tropeços.

Análise geral: — Consideremos uma cúpola piramidal caracterizada pelo número n de faces iguais e pelo ângulo α de cada face com o plano horizontal da base. Êste ângulo será considerado positivo ou ne-

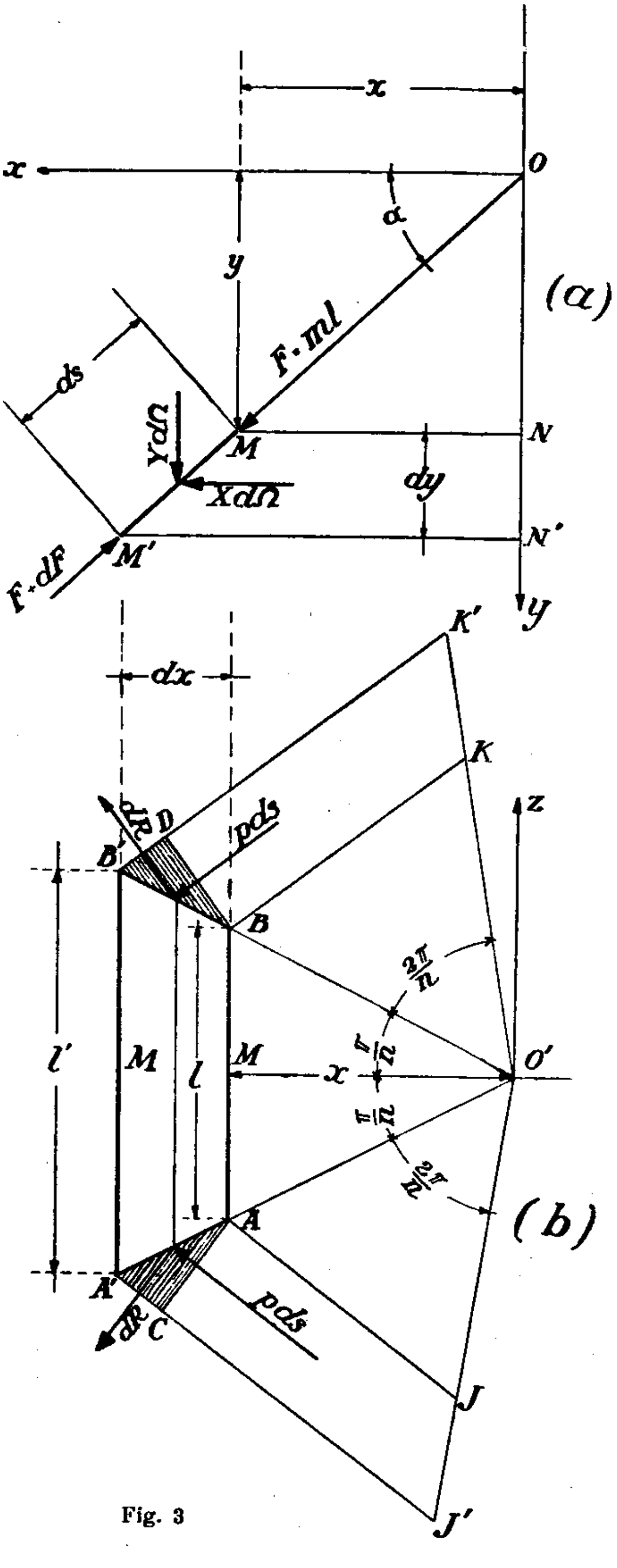
x
x
O
y
α
(a)
F.ml
ds
YdΩ
M
N
XdΩ
dy
N'
F+dF
M'
y
K'
dx
K
z
dR
D
pds
B'
B
2π/n
l'
M
l
M
x
π/n
O'
π/n
2π/n
A
(b)
A'
pds
dR
C
J
J'

Fig. 3

gativo conforme o vértice da pirâmide se encontre acima ou abaixo da base. Elejamos para origem de coordenadas o vértice, para plano xy o plano vertical perpendicular á face submetida á análise ($AO'B$, em planta, na figura 3*b*) e para plano xz o plano horizontal pelo vértice. Os xx medem-se positivamente de dentro para fóra e os yy de cima para baixo. Os zz não interessam, pois logo se verá que todos os esforços a considerar, se reduzem a resultantes situadas no plano xy que é o plano de elevação na figura 3*a*.

Isolamos um elemento da face ABO entre duas secções horizontais infinitamente próximas MN e $M'N'$ e entre os dois elementos de arestas AA' e BB'.

A área dêste elemento, representado em planta pelo trapézio $ABB'A'$ e em elevação pelo segmento de réta ds $= MM$, será:

$$d\Omega = \tfrac{1}{2}\, ds\, (l + l')$$

onde $l = AB$ e $l' = A'B'$.

Porem:

$$l = 2xtg\,\frac{\pi}{n} \quad \text{e} \quad l' = 2\,(x + dx)\; tg\,\frac{\pi}{n}$$

portanto, desprezada uma diferencial de 2ª ordem,

$$d\Omega = 2xds.\ tg\frac{\pi}{n} = 2xtg\frac{\pi}{n}\,\frac{dx}{cos\alpha}$$

Sejam agora X e Y as cargas, horizontal e vertical, por unidade de área aplicadas á cúpola na secção MN. X e Y medem-se positivamente no mesmo sentido dos xx e yy. Para brevidade designemos por *mediana* a linha $M'MO$ e por *lado* a linha AB do anel horizontal ....$JABK$.... e chamemos m o esforço paralelo á mediana, por unidade de lado, e p o esforço paralelo ao lado por unidade de mediana. Por convenção, o sinal *mais* de p ou m corresponde a esforços de compressão.

Isto posto, vejamos quais as forças aplicadas ao elemento considerado, reduzindo-as todas a componentes segundo Oy e Ox:

1.º) Sôbre a área $ABB'A'$ temos uma carga paralela a Oy:

$$Yd\Omega = 2xY\, tg\,\frac{\pi}{n}\,\frac{dx}{cos\alpha}$$

e outra horizontal paralela a Ox:

$$Xd\Omega = 2xX\, tg\,\frac{\pi}{n}\,\frac{dx}{cos\alpha}$$

2.º) No lado AB atúa uma fôrça $F = ml = 2\,mx\; tg\,\frac{\pi}{n}$, segundo MM' (fig. 3-a) e no lado $A'B'$ uma outra $F + dF$, de modo que a resultante de ambas vem a ser:

$$dF = 2\ tg\ \frac{\pi}{n}\ \frac{d}{dx}\ mx\ dx$$

cujas componentes procuradas são:

$$\text{Segundo } Oy:\ -\ 2\ tg\ \frac{\pi}{n}\ \text{sen}\alpha\ \frac{d}{dx}\ mx\ dx$$

$$\text{Segundo } Ox:\ -\ 2\ tg\ \frac{\pi}{n}\ cos\alpha\ \frac{d}{dx}\ mx\ dx$$

3.°) Nas arestes AA' e BB' atúam forças de ligação com os elementos contiguos, todas horizontais e simétricas em relação ao plano xOy. Em primeiro lugar, as fôrças dR, dirigidas perpendicularmente a AJ e BK, formando portanto ângulos iguais a $\frac{2\pi}{n}$ com $O'x$, cada uma das quais vem a ser a metade da carga que provoca flexão do respectivo elemento. Tal carga, conforme o explicado nos parágrafos anteriores é, por unidade de área, $Q = X - Ycotg\alpha$, segundo a convenção sôbre sinais. Portanto:

$$dR = \frac{1}{2}\ Qd\Omega = (X - Ycotg\alpha)\ x\,tg\ \frac{\pi}{n}\ \frac{dx}{cos\alpha}$$

E a resultante das duas fôrças dR será:

Segundo Ox:

$$2dR\ cos\ \frac{2\pi}{n} = 2x\ tg\ \frac{\pi}{n}\ \cos\ \frac{2\pi}{n}\ (X - Ycotg\alpha)\ \frac{dx}{cos\alpha}$$

Em segundo lugar, temos as fôrças pds dos elementos contíguos, formando com AB ângulos iguais a $\frac{2\pi}{n}$. De modo que a resultante de ambas, segundo Ox será:

$$2pds.\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{n} = 2p\ \frac{dx}{cos\alpha}\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{n}$$

Atúam ainda nas arestes AA', BB', os dois momentos fletôres.

$$dM_o = \frac{Ql^2 ds}{12}$$

no plano horizontal, os quais se anulam mútuamente.

Depois desta fastidiosa análise podemos escrever afinal as equações de equilíbrio do elemento, dividindo todas as fôrças segundo Oy e Ox por $2\ tg\ \frac{\pi}{n}\ dx$ e somando-as algebricamente.

Projeção sôbre Oy

$$\frac{Yx}{\cos\alpha} - \frac{d}{dx}\, mx \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\text{Donde: } \frac{d}{dx}\, mx = \frac{2Yx}{\operatorname{sen}\, 2\alpha}$$

$$\text{Portanto: } m = \frac{C_1 + \int 2Yx dx}{x \operatorname{sen}\, 2\alpha}$$

C_1 é uma constante de integração que se determina pelas condições particulares de cada caso.

A formula supra dá o valor de m em função de x. Podemos dá-lo em função de y, o que é muitas vezes preferivel. Basta, para isso, substituir $x = y \cot g\alpha$ e $dx = dy \cot g\alpha$, resultando logo

$$m = \frac{C_2 + \int Yy\, dy}{y \operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (1.^a)$$

onde C_2 é uma outra constante. Verificamos por estas fórmulas que a cúpola poligonal, no que se refere aos esforços m paralelos à mediana se comporta exatamente como a de base circular. (Vide o artigo "Cúpolas de revolução" T. M. no Boletim do I. E. n.º 91 — vol XVIII pgs. 9-10)

Projeção sobre Ox

$$\frac{x\,X}{\cos\,\alpha} - \frac{d}{dx}\, mx \cos\alpha + \frac{(X - Y \cot g\,\alpha)\, x}{\cos\,\alpha} \cos\frac{2\pi}{n} + \frac{p \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\cos\,\alpha\, tg\, \frac{\pi}{n}} = 0$$

Já vimos porém que

$$\frac{d}{dx}\, mx = \frac{Y\,x}{\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$$

Substituindo, simplificando e isolando p, acha-se

$$p = -\,(X - Y \cot g\,\alpha)\, x \qquad (2)$$

ou, em função de y:

$$p = -\,(X - Y \cot g\,\alpha)\; y \cot g\,\alpha \qquad (2.^a)$$

Verifica-se ainda (Vide "Boletim" loc. cit.) que também quanto aos esforços p paralelos aos lados, a cúpola poligonal se comporta do mesmo modo que a de base circular.

Conclusão. Dada uma cúpola cônica e outra poligonal, sujeitas ás mesmas cargas X e Y, os esforços p e m serão identicos em ambas para secções situadas á mesma distância dos vértices, contanto que sejam iguais ás inclinações da geratriz da primeira e das faces da segunda, sôbre um plano horizontal. O que as distingue quanto ao comportamento estático, é a flexão das faces, unicamente observada na cúpola poligonal sob a ação da carga horizontal

$$Q = X - Y \operatorname{cotg} \alpha.$$

Já vimos que cada elemento da face se comporta exatamente como uma viga engastada nas extremidades. De modo que o momento na aresta por unidade de mediana é

$$M_0 = \frac{Q l^2}{12}$$