O coeficiente "Alfa" da fórmula de Bernoulli

Por **A. Vibert** — Presidente da Seção de Hidrologia Científica do Comitê Nacional Francês de Geodesia e Geofísica.

Traduzido e adaptado da revista "Le Genie Civil", Tomo 139. n.º 14, de 15 de julho de 1962, pelo Coronel **Leonino Junior,** Professor e Chefe do Laboratório de Hidráulica e de Mecânica dos Fluídos do Instituto Militar de Engenharia.

I — PREFÁCIO DO TRADUTOR

O coeficiente α da fórmula de Bernoulli, tão pouco explicado, tão pouco esclarecido, sôbre o qual, quando muito, se refere por alto a maioria dos autores de livros sôbre Hidráulica e Mecânica dos Fluidos, é aqui encarado e estudado, de modo interessante, no trabalho de A. Vibert.

Como êle certamente trará luzes sôbre o assunto, que dá margem a tantas dúvidas, não só quanto à sua conceituação, mas também quanto aos valores que deve assumir o coeficiente nos diferentes casos práticos, principalmente no espírito dos estudantes e iniciantes na matéria, resolvemos traduzir êste artigo.

Nêle, o autor, além de analisar de maneira perfeita o tão obscuro assunto do coeficiente α, denominado comumente coeficiente de Coriolis, relacionando com a distribuição da energia cinética ao longo das seções dos condutos, também se refere ao estudo do outro coeficiente, ainda menos divulgado, abrangido pela mesma designação, representado pela letra β, e que está ligado à distribuição de pressões nas mesmas condições.

Traduzindo o presente artigo, oriundo de uma publicação não muito lida e divulgada em nosso país, julgamos contribuir para a sua merecida e mais ampla divulgação, prestando, com isso, um pequeno serviço, àqueles que, em nossa terra, como nós, se dedicam ao estudo de assuntos relacionados com os escoamento de fluidos em condutos.

II — O ARTIGO

Sob sua forma mais simples [1]:

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\omega} + Z = \text{Constante}$$

a equação de Bernoulli é válida para um tubo de corrente, de um fluído perfeito, incompressível, em escoamento permanente.

Esta fórmula tem um caráter axiomático: ela exprime simplesmente que, dentro de um tubo de corrente qualquer, a energia do fluído se conserva depois de se admitir, por hipótese, que não pode haver perda de carga de qualquer espécie.

(1) Variação, sôbre um teorema conhecido, por A. Vibert "Técnica Sanitária e Municipal" de novembro de 1953.

Quando se trata de escoamentos reais, dá-se a essa equação uma forma geral, bem conhecida, que no caso de um líquido incompressível se escoando em regime permanente, pode ser escrita, entre duas seções determinadas S_o e S_1:

$$\alpha_o \frac{U_o^2}{2g} + \beta_o \frac{p_o}{\omega} + Z_o = \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \beta_1 \frac{p_1}{\omega} + \varepsilon$$

na qual:

U_o e U_1 — são as velocidades médias nas seções consideradas;
p_o e p_1 — são as pressões no centro de gravidade dessas seções;
Z_o e Z_1 — são as cotas dos centros de gravidade;
— é a soma das perdas de carga de qualquer natureza, resultantes do escoamento entre as seções S_o e S_1;
α_o e α_1 — são os coeficientes clásicos [2], que levam em conta o fato de que a velocidade média quantitativa definida pela equação:

$$U = \frac{1}{\omega} \int_\omega V \, d\omega$$

considerada na equação inicial, por medida de simplificação, é diferente da velocidade média "energética" ou "eficaz", satisfazendo a relação:

$$U_{ef}^2 = \frac{\int \omega \; V^3 \, d\omega}{\int \omega \; V \, d\omega}$$

que deveria ser levada em conta, quando se tratasse de energia e não mais de escoamento.

β_o e β_1 — são, nas mesmas condições, os coeficientes que levam em conta que a pressão média P pode ser diferente da pressão eficaz definida pela seguinte relação, devida principalmente à curvatura das linhas de corrente:

$$P_{ef} = \frac{\int \omega p \; V \, d\omega}{\int \omega \; V \, d\omega}$$

As dificuldades de aplicação da fórmula acima indicada, residem no fato de que os valores dos coeficientes α_o, α_1, β_o, β_1, etc., são mal conhecidos.

Geralmente faz-se $\beta_o = \beta_1 = 1$, porque, na prática corrente, é quasi impossível proceder de outro modo. Esta maneira de proceder é de certo modo justificada porque não conduz a êrro apreciável, quando se trata de condutos de pequeno ou médio diâmetro, submetidos a fortes pressões. Não é, talvez, exatamente a mesma coisa, quando se trata de grandes condutos, com escoamentos em pressões relativamente fracas, principalmente quando o seu eixo apresenta uma certa curvatura.

Com relação a α, estamos melhor informados, pelo menos aparentemente, porque os autores não dão, a respeito desses coeficientes, senão indicações que deixam um campo livre para uma ampla interpretação, que põe os utilizadores em uma situação de grande indecisão.

Demonstra-se vagamente que $\alpha > 1$. É porém uma das únicas afirmações que se possui sôbre êsse coeficiente. Nos antigos tratados clássicos, recomen-

(2) Geralmente denominados "Coeficientes de Coriolis" em homenagem a êsse sábio, que os introduziu pela primeira vez, parece, em um artigo publicado nos "Anais de Pontes e Vias" (Anales des Ponts et Chaussées), em 1836, para levar em conta as diferenças de velocidades nos diversos pontos de uma mesma seção num escoamento.

dava-se geralmente tomar para α um valor igual a 1,1 ou, em outra situação qualquer, muito próximo [3].

À proporção que as condições do escoamento dos fluídos nos condutos foram sendo melhor conhecidas, essa simples consideração foi progressivamente abandonada, sem que disso resultasse, no entanto, uma vantagem prática qualquer, sendo que os autores modernos se contentam em indicar que α pode ter valores muito superiores aos que foram mencionados anteriormente, podendo, em certos casos, ultrapassar várias unidades [4].

É assim que Eydoux [5] admite que α, na prática, está compreendido entre 1,1 e 2,5.

O professor Escande [6] indica simplesmente que "o coeficiente α é tanto maior quanto maior é a desigualdade de velocidades nos diferentes pontos da seção".

L. J. Tison [7] assinala o valor 1,09, achado por Tietgens Prandtl e indica que "dá-se normalmente a α o valor 1,1" mas que o coeficiente pode atingir valores "muito maiores".

Ch. Jaeger [8] (Paris, 1954) mostra simplesmente que, se $dV \neq O$, tem-se $\alpha > 1$.

Finalmente, ainda recentemente, o professor H. Schoeler [9] expondo as leis gerais da hidrodinâmica em seu magistral tratado de Hidrologia, lembra que o coeficiente α, cujo valor é "mal conhecido" "chega a ter o valor de 2 nos tubos capilares e é maior ainda quando as paredes são muito rugosas". Essa imprecisão em trabalhos modernos prova, evidentemente, que o assunto está longe de ser elucidado e que é útil que nos detenhamos cada vez que se apresentar uma oportunidade a respeito.

Premidos pela necessidade, foi que fizemos estudos em casos especiais, há alguns anos já. São alguns resultados, obtidos no decorrer do exame de diferentes problemas, que relataremos a seguir. Se êles não resolvem completamente a questão, constituem, mesmo assim, soluções particulares interessantes que, acrescidas aos resultados obtidos por outros pesquisadores, permitirão que, mais dia menos dia, se chegue a uma solução satisfatória, de caracter geral. Desde já, no entanto, êles conduzem a certas conclusões válidas para os condutos sob pressão, e também para condutos livres de seção circular, ou seja para escoamentos que constituem uma parte muito importante da Hidráulica Aplicada.

O Valor do coeficiente α, em uma seção determinada, de um escoamento qualquer, depende de diferentes parâmetros e principalmente:

1.º — da forma de seção;

2.º — da rugosidade das paredes;

3.º — da velocidade média, ou seja, do número de Reynolds do escoamento.

Êles condicionam a repartição das velocidades, ao longo de tôda a seção.

Quando se trata de um conduto circular retilíneo, horizontal, em escoamento uniforme, o perfil de velocidades no plano diametral horizontal é, pelo menos teòricamente, simétrico em relação ao eixo do conduto.

O perfil no plano diametral vertical pode apresentar uma certa assimetria, conseqüente do pêso próprio do fluído.

A forma do perfil de velocidades pode ser determinada experimentalmente sendo, no caso, o meio mais direto e talvez o mais exato.

---

(3) Originalmente, Coriolis, que não dispunha senão de elementos e de informações deficientes, atribuiu a α o valor 1,47, que modificou depois para 1,40, para estimar finalmente que, em determinadas condições, êle podia baixar até 1,16.

(4) Note-se, no entanto, que P. Vauthier, contemporâneo de Coriolis e, como êle, eminente matemático e conhecedor de Hidráulica, parece ter vislumbrado a realidade ràpidamente. Em um trabalho publicado em 1836, nos "Anales des Ponts et Chaussées" (Vol. 12) a respeito do coeficiente de Coriolis, menosprezando sua importância prática, êle tentou demonstrar que o seu valor máximo não deveria ultrapassar 1,10 e que poderia baixar até 1,02.

(5) "Cours d'Hydraulique generale de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées" — Ano 1931-1932.

(6) "Hydraulique Generale", Toulouse 1943, pag. 82.

(7) "Cours d'Hydraulique" (Gand 1953) Tome I, pag. 329 — Tome II, pag. 14.

(8) "Hydraulique technique" (Paris 1954), pag. 66.

(9) "Les eaux sout rraines" (Paris, 1962), pag. 84.

Trabalhos célebres, como os de Prandtl, Von Karman, Nikuradse e Stanton principalmente, permitem igualmente, determinar α analìticamente, com uma aproximação suficiente.

Particularmente, para um tubo liso, com escoamento de um fluído em regime laminar, êsse perfil é uma parábola do segundo grau, tal que, a velocidade média U é igual à velocidade máxima Vmax situada no eixo do conduto, coincidindo com o eixo da parábola.

Neste caso, um cálculo simples mostra que se tem: $\alpha = 2$ [10].

Contràriamente à opinião geralmente admitida, êste valor nos parece, segundo julgamos, ser o maior dos que se tem a considerar no caso em aprêço ou, de outro modo, nos parece ser um máximo. Se tal não se der, é porque existem então escoamentos caracterizados por perfis de velocidades tais que Vmax/U > 2.

Isso não parece ser o caso, pelo menos no que se refere aos condutos industriais. Nestes últimos, quer sejam de ferro fundido, de aço, de cimento, de cimento-amianto, etc., as paredes internas são relativamente lisas, dando lugar a escoamentos nos quais a repartição de velocidades é atualmente bem conhecida. Ela conduz a perfis diametrais de traçado geral parábolico, a curva simétrica em relação ao eixo sendo, no entanto, muito mais achatada do que a parábola do segundo grau correspondente ao regime laminar. Em todos êsses escoamentos a relação U/Vmax está geralmente compreendida entre 0,8 e 0,9. Não nos parece que um acréscimo de rugosidade das paredes possa atuar de modo a fazer variar sensìvelmente êsses valores. Não nos parece também que essa relação baixe consideràvelmente em relação a 0,8, mesmo em Hidráulica fluvial, salvo talvez para condutos de tal modo cobertos de vegetação, que seu problema

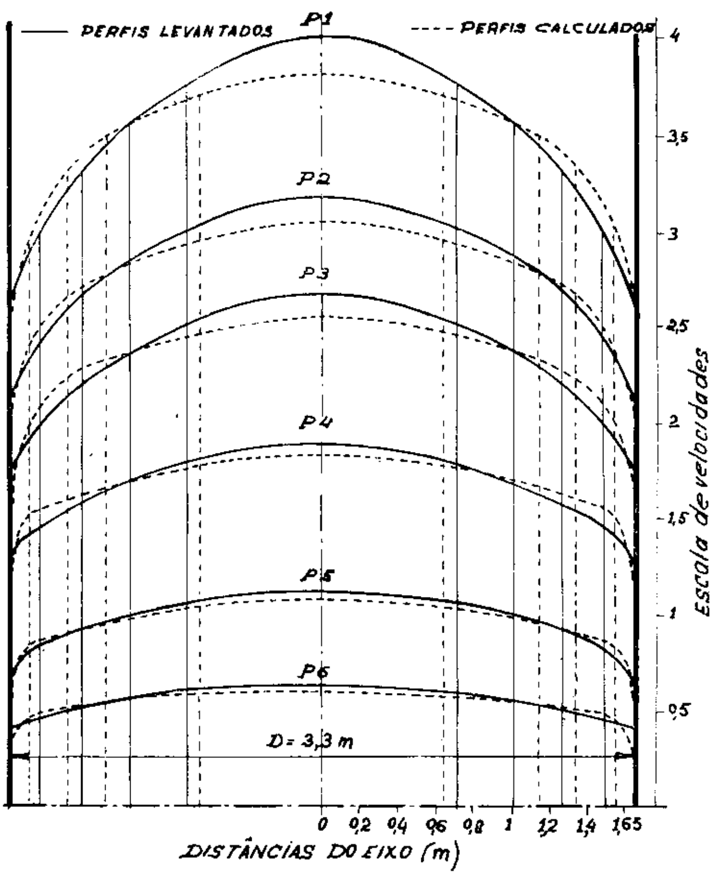

FIG. 1

(10) Temos a impressão de que foi êste valor que conduziu os autores a admitir a possibilidade de números ainda maiores para χ, se bem que isso nos pareça um limite, cuja consideração não apresenta interêsse nos escoamentos industriais.

não seja mais da competência do técnico de Hidráulica, mais de um ceifador. Por essas diferentes razões α não pode ter, parece-nos, valores sensìvelmente inferiores ao valor 2 acima indicado.

Foi o que nos esforçamos para verificar, considerando os condutos industriais e aquedutos, tendo diâmetros compreendidos entre 0,20 e 3,30 m e sôbre os quais experiências tinham sido realizadas, quer aos nossos cuidados, quer aos dos nossos colaboradores, quer por especialistas em Hidráulica que, para benefício da ciência, haviam publicado os resultados dos seus ensaios e trabalhos (11)

Como as experiências em questão são de execução delicada, principalmente nos condutos de pequenos diâmetros, e não podem, freqüentemente, ser efetuadas senão em circunstâncias fortuitas nas instalações que, em princípio, funcionam sem interrupção, fomos auxiliados pelos trabalhos de Prandtl, Von Karman e Nikuradse, para estabelecer certos perfis e para completar aqueles para os quais não dispúnhamos de um número suficiente de pontos, principalmente nas proximidades das paredes.

As figuras 1 e 1 bis dão tôdas as indicações úteis a respeito. Destacamos, especialmente, a concordância satisfatória que existe entre os perfis estabelecidos, partindo-se das velocidades efetivamente medidas a das calculadas nas condições indicadas, êstes últimos conduzindo, geralmente, a valores de α ligeiramente inferiores aos reais (12), (13).

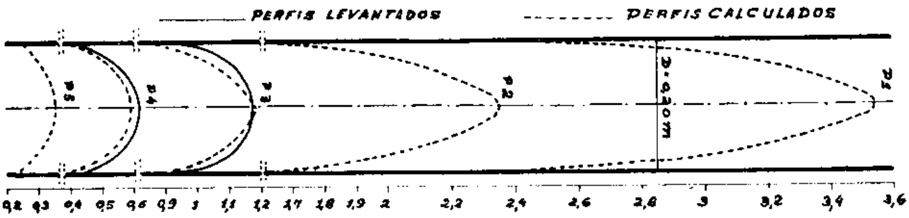

FIG. 1 BIS.

QUADRO I

Diâmetro (m)	U (m/s)	V_{max} m/s)	$\frac{U}{V_{max}}$	Q (m^3/s)	Número de Reynolds	α
0,20	0,30	0,356	0,86	0,0094	53 000	1,055
"	0,50	0,594	0,845	0,0157	88 000	1,06
"	3,0	3,552	0,85	0,094	530 000	1,071
3,30	0,525	0,61	0,86	4,482	1 520 000	1,01
"	2,735	3,217	0,85	23,367	7 900 000	1,02
"	3,430	4,030	0,85	29,311	10 000 000	1,025

Esta observação permite prever o que seria o perfil considerado se a velocidade média aumentasse indefinidamente. Levando-se em conta a necessidade de concordância na parede, parece que êsse perfil teórico e puramente imaginário no sentido físico da palavra, tenderia para um triângulo isósceles, tendo por

(11) Em particular, as verificações referentes aos condutos de 3,3 m de diâmetro, foram efetuadas em 1945, conforme resultados publicados na revista "Mecanique" de outubro de 1943, por G. Remenieras, então Diretor do Laboratório e do Serviço de Pesquisas da Sociedade Hidrotécnica da França, ("As medidas hidráulicas nos ensaios das usinas hidroelétricas", por G. Remenieras. Comunicação apresentada nos diários do Sindicato dos Produtores e Distribuidores de Energia Elétrica). Segundo o mesmo artigo, a Sociedade Hidrotécnica havia já, na época, realizado durante longos anos medidas diversas nos condutos importantes. É certo que sua interpretação deveria ser útil, com relação ao assunto abordado no presente artigo.

(12) Note-se que os perfis levantados experimentalmente por exploração do campo de velocidades no interior dos tubos em escoamento não têm, evidentemente, o traçado definido dos perfis calculados, acontecendo isso quaisquer que sejam os meios e as precauções empregados. Êles são rara-

base o diâmetro do conduto e por altura a velocidade máxima V, transportada para o eixo do conduto, tendendo V para o infinito (Fig. 1 ter.).

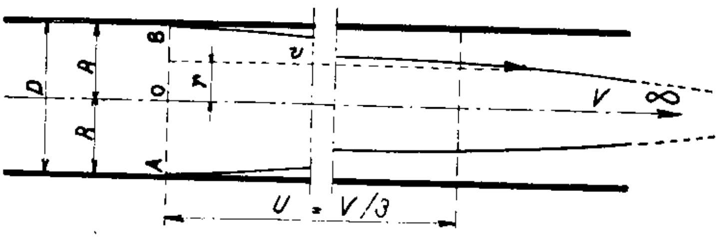

FIG. 1 ter.

Neste caso limite, um cálculo simples mostra que se teria:

$$U = \frac{V}{3}$$

Como, por conseqüência, temos:

$$v = V \frac{R - r}{R} = 3U \frac{(R-r)}{R}$$

Escrevendo: $\alpha \pi R^2 U^2 = \int_0^R 2\, \pi r v\, dr$

deduz-se: $\alpha = \dfrac{1,5\ \pi\ U^2\ R^2}{\pi\ U^2\ R^2} = 1,5$

que é o valor máximo que pode ter o coeficiente no caso limite de velocidades crescentes, quando U e, conseqüentemente, V tendem simultâneamente para o infinito.

Resulta disso que as variações de α no que concerne aos condutos circulares, com escoamento simétrico em relação ao eixo, estão compreendidas entre dois valores máximos extremos, ou sejam: 2 correspondendo às velocidades muito fracas, vizinhas de zero e 1,5 para as velocidades infinitamente grandes.

No que se refere aos condutos circulares sob pressão, pode-se condensar os resultados de numerosos cálculos feitos, indicando que todos os valores encontrados para α estavam compreendidos entre 1,01 e 1,071, quer dizer, inferiores, ou mesmo grandemente inferiores ao valor 1,10 considerado como mínimo pelos antigos autores, isso para velocidades bem diversificadas.

O quadro 1 dá os resultados correspondentes aos cálculos efetuados sôbre condutos tendo para diâmetro extremos: 0,20 e 3,30 m, que foram abordados anteriormente.

No que concerne aos aquedutos, como condutos livres, as oportunidades para experimentador são raras. Nessa situação as determinações do valor de α são menos numerosas e se referem geralmente a uma gama de vazões mais reduzida. No entanto, como as velocidades de escoamento existentes nessas obras

---

mento simétricos e sua utilização, se destinando aos fins mais diversos: cálculo de vazão, cálculo de α, etc. implica, quase que obrigatòriamente, no emprêgo de compensações gráficas prévias, destinadas a dar a cada perfil sua forma média teórica mais provável.

As dificuldades de realizar medidas no interior dos condutos, nas proximidades das paredes, constituem, por sua vez, uma causa de erros.

(13) As mesmas figuras põem em evidência o alongamento no sentido do eixo, o "esticamento", que resulta para os perfis de pequenas velocidades, no acréscimo da velocidade média em um conduto. O fenômeno é particularmente visível sôbre o gráfico relativo aos condutos de 0,20 m de diâmetro.

são mais fracas do que as que abordamos anteriormente [14], os perfis correspondentes são mais achatados sendo possível, com um número reduzido de verificações, fazer uma idéia assás precisa do valor de α.

É assim que, com relação aos grandes aquedutos da cidade de Paris, cujas declividades variam de 0,0001 como mínimo (aquedutos de Duhis, de Vanne, de Loing) a 0,0004 como máximo (parte do aqueduto do Avre), as velocidades máximas constatadas para as vazões próximas dos máximos variam de 0,65 m a 1,30 m.

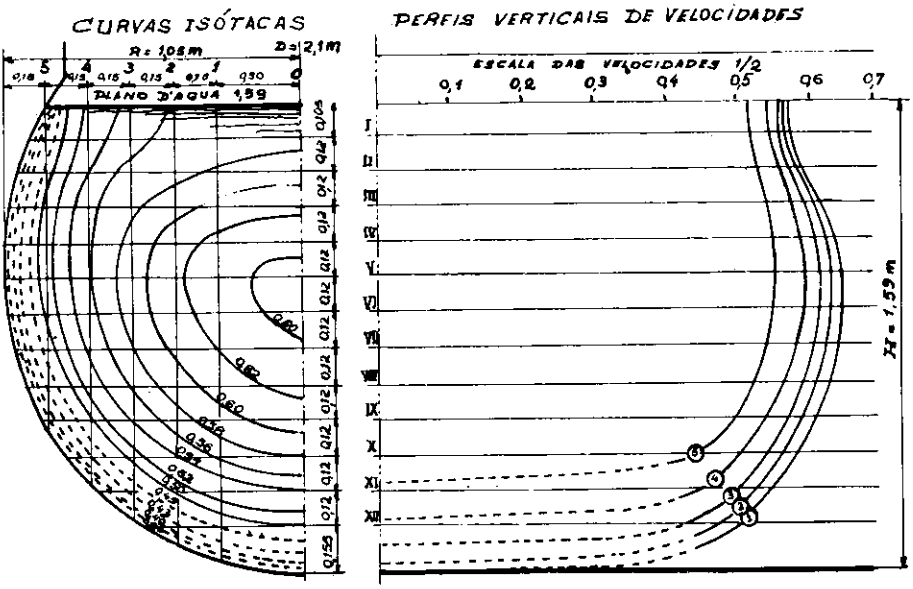

FIG. 2

As figuras 2 dão tôdas as indicações úteis sôbre sua repartição na seção molhada, bem como o traçado dos diferentes perfis.

O quadro II resume os dados e os resultados obtidos para α, partindo-se dessas considerações.

QUADRO II

ϕ	I	Q	Ω	U	V_{max}	$\frac{U}{V_{max}}$	R_o	α
2,10	0,0001	1,55	3,46	0,55	0,65	0,845	1 019 000 [15]	$1 < \alpha < 1{,}01$
1,80	0,0003	1,278	1,54	0,83	0,93	0,89	1 515 000	$1{,}01 < \alpha < 1{,}02$

Como era de esperar, os valores achados para α são sensìvelmente inferiores aos que correspondem aos condutos forçados. Êles estão afastados do valor 1,10 que foi citado no início dêste trabalho. Parece mesmo que, em todos os casos semelhantes, pode-se adotar o valor $\alpha = 1{,}1$ sem risco, neste caso, de cometer um êrro superior a 1%, quer dizer, menor do que o que seria suscetível de ser cometido sôbre o valor da vazão determinada por molinete, quaisquer que fossem as precauções tomadas na sua execução.

Resumido, pode-se tirar as seguintes conclusões:

(14) Ver. a respeito: "O escoamento nos aquedutos circulares" por A. Vibert. "Genie Civil" de 1.º de fevereiro de 1962. página 64.

(15) $R_o = U \dfrac{D}{V}$

1.º — Nos dois casos limites anteriormente indicados, α pode atingir teòricamente os valores extremos de 2 e 1,5. Na prática, é difícil que isso aconteça e os valores indicados pelos diferentes autores são demasiadamente elevados no que concerne aos condutos industriais circulares sob pressão, bem como nos aquedutos, como condutos livres.

2.º — Para os condutos de pequeno diâmetro (de 0,20 a 1 m por exemplo) o valor $\alpha = 0,4$ é válido para tôdas as velocidades da prática corrente. Para diâmetros superiores, o valor $\alpha = 0,02$ parece convir, com uma aproximação de $\pm 1\%$.

3.º — Para os aquedutos circulares, como condutos livres, considerando-se o que foi dito precedentemente, o valor médio 1,01 parece conveniente, o limite de 1,02 não devendo ser ultrapassado a não ser nos casos excepcionais. (16)

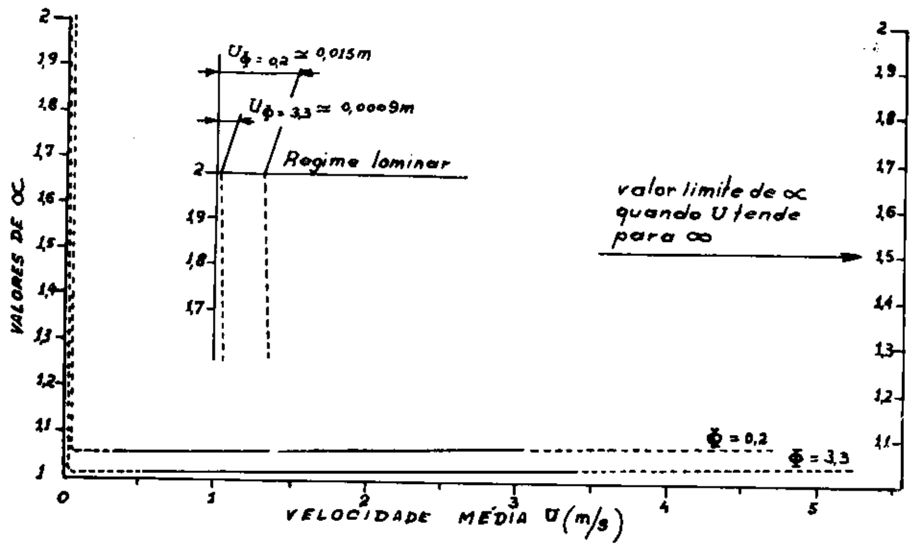

FIG. 3

Partindo desses resultados, executamos a figura 3, que dá a variação de α para condutos circulares.

As linhas pontilhadas situadas ao longo do eixo vertical, tem um caráter essencialmente indicativo (17). Elas comportam um princípio de justificação no fato de que permitem concordar simbòlicamente, os valores de α determinados precedentemente, com o valor máximo $\alpha = 2$ válido em regime laminar, a não ser que se ponha em evidência a solução de continuidade que existe, sob êsse ponto de vista, entre os dois regimes. Em qualquer situação, interessando um campo de velocidades inexplorado face ao que dissemos, elas não autorizam qualquer dedução no que concerne aos fenômenos de transição, suscetíveis de se manifestar na passagem do regime turbulento para o laminar, principalmente no que se refere aos condutos industriais, para os quais êste último regime não é senão uma situação a citar ou, pelo menos, um limite raro, que se pode considerar como jamais atingido na prática.
Nestas condições, têm-se :

---

(16) Estas conclusões corroboram, de qualquer modo, a opinião emitida por Vauthier (já citada) no que concerne à importância muito reduzida do papel desempenhado pelo coeficiente α em hidráulica prática, e conduzem a valores ainda mais inferiores para êsse coeficiente, do que os previstos pelo autor em 1836.

Elas deveriam por um têrmo definitivo, parece-nos, nas indecisões que aparecem nas obras modernas, a êsse respeito.

(17) Pode-se fazer uma idéia muito geral do traçado dessa curva, assimilando o perfil de velocidades de uma seção qualquer em um conduto circular, a uma parábola do grau "n" suficiente e conveniente (solução evidentemente aproximada), quer dizer, escrevendo-se: (U — u) = K r n onde U é a velocidade média axial (r = O), u a velocidade a uma distância r do eixo.

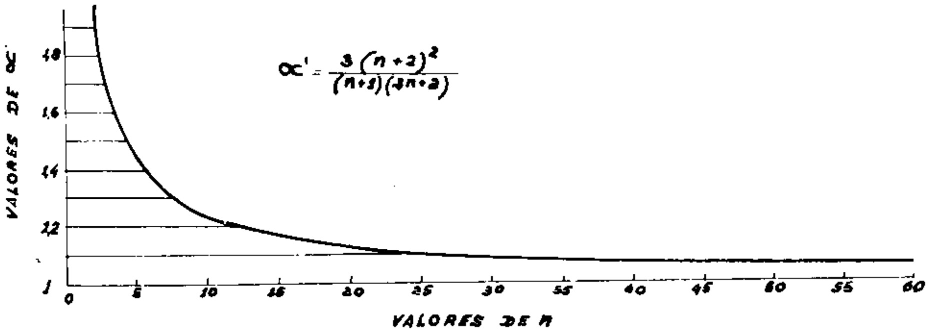

Fig. 4

$$U_{max} = \frac{nU}{n + 2} \quad e \quad \frac{3\,(n+2)^2}{(n+1)\,(3n+2)}$$

Estas relações são evidentemente verificadas no caso do regime laminar, para o qual o perfil de velocidade é uma parábola do 2.º grau.

A curva representando α (Fig. 4) tem uma ordenada igual a 2 para $n = 2$. ponto a partir do qual ela é constantemente descendente, tendo por assíntota $\alpha = 1$ para $n = \infty$.

No caso, ela difere da Fig. 3, na qual o valor de α, depois de uma queda excessivamente brusca, cresce ligeiramente, à proporção que a velocidade aumenta.