Operadores Vetoriais

Divisão de Vetores

Eng. NASSIN NADRUZ
DIRETOR GERAL do Departamento de
Águas e Esgôtos de S. Paulo (DAE).

PRELIMINARES:

Na solução das equações vetoriais somos muitas vezes tentados a dividir ou multiplicar um vetor por outro, a fim de assemelhar essa resolução à uma equação algébrica.

Vejamos se existe a possibilidade para tais multiplicações ou divisões, ou se podemos apenas encará-los como produtos simbólicos. Admitindo a existência de tais produtos vamos determinar a sua expressão vetorial. Pedimos desculpas aos professores do assunto, caso estejamos cometendo uma heresia, já que não somos especialistas na matéria.

Move-nos apenas, ao entrar em tais cogitações, a vontade de ver, aclarado um assunto que sempre nos empolgou.

Dadas tais explicações, continuemos.

Já sabemos do cálculo vetorial que poderemos multiplicar um determinado vetor A, pelos seguintes fatores:

a) — Pelos escalares 4, χ e $(x+\chi)$

resultando os vetores

$$4A,\ \chi A \text{ e } (x+\chi)\ A$$

b) — Escalarmente pelos vetores B, (BxC) e $(B + B\wedge C)$

resultando os escalares:

$$B\,.\,A \quad (B\wedge C)\,.\,A$$

e

$$(B + B\wedge C)\ A = B.A + B\wedge C\,.\,A$$

c) — Vetorialmente pelos vetores B, $(B\wedge C)$ e $(B+B\wedge C)$

resultando os vetores

$$B\wedge A,\ (B\wedge C) \wedge A$$

e

$$(B + B\wedge C)\wedge A = B\wedge A + (B\wedge C)\wedge A$$

d) E admitindo a multiplicação algébrica, pelos vetores B, C e $(B + C)$

resultando as expressões

$$BA \quad CA$$

e

$$(B + C)\ A = BA + CA$$

que nada mais são que operadores vetoriais como veremos mais tarde.

O cálculo Omográfico ainda nos ensina que

$$(\chi + C\wedge)\ A = \chi\ A + C\wedge A$$

e

$$A\ (\chi + C\wedge) = \chi\ A - A\wedge C$$

OPERADOR QUOCIENTE:

Sejam B e A dois vetores quaisquer, referidos a um terno tri-retangular orientado. Vamos admitir a existência do quociente do Vetor B dividido pelo vetor A.

Êsse quociente $\frac{B}{A}$ pela própria definição de divisão, é tal que multiplicado

por A nos dê o vetor B:

$$B = \left(\frac{B}{A}\right) A = A \left(\frac{B}{A}\right) \tag{1}$$

Vamos provar a existência dêsse quociente, e mostrar que êle é um operador vetorial (omografia vetorial).

A conhecida fórmula de expansão vetorial nos dá:

$$(A \wedge B) \wedge A = (A.A)\ B - (A.B)\ A$$

ou

$$(A.A)\ B = (A.B)\ A + (A \wedge B) \wedge A$$

que pode ser escrito da seguinte forma:

$$A^2\ B = [\ (A.B) + (A \wedge B) \wedge\ ]\ A$$

Divinido ambos os mebros pelo escalar A^2 vem:

$$B = \left[\frac{A.B}{A^2} + \frac{(A \wedge B)}{A^2} \wedge \right] A \tag{2}$$

Ora, o têrmo entre colchetes da expressão (2) é um operador vetorial que multiplicado pelo vetor A nos dá o vetor B.

Pelo cálculo dos operadóres sabemos que se dois operadores ψ e ϕ forem tais que verifiquem as igualdades:

$$U = \psi\ a \text{ e } V = a\ \psi$$
$$U = \phi\ a \text{ e } V = a\ \phi$$

então ψ é igual a ϕ

$$\psi = \phi$$

Comparando as expressões

$$B = \left(\frac{B}{A}\right) A = A \left(\frac{B}{A}\right)$$

e

$$B = \frac{B}{A}\ A = \left[\frac{A.B}{A^2} + \frac{A \wedge B}{A^2} \wedge \right] A$$

vemos que elas satisfazem as condições de igualdade dos operadores especificadas e, portanto:

$$\frac{B}{A} = \frac{A.B}{A^2} + \frac{A \wedge B}{A^2} \wedge \tag{3}$$

A expressão (3) que mostra o quociente da divisão de um vetor B pelo vetor A é um operador linear do tipo,

$$\phi = \alpha + v \wedge$$

em que α é um escalar e $v \wedge$ um vetorial.

CONSEQÜÊNCIAS:

a) — Seja dividir o vetor A por si mesmo

$$\frac{A}{A} = \frac{A.A}{A^2} + \frac{A \Lambda A}{A^2} \Lambda = 1 \text{ já que } A \Lambda A = O$$

A divisão de um vetor por si mesmo é igual a unidade

$$\frac{i}{i} = \frac{j}{j} = \frac{k}{k} = 1$$

b) — vetores paralelos

Se A e B forem dois vetores paralélos tais que B = λ A vem

$$\frac{B}{A} = \frac{\lambda A}{A} = \lambda \text{ sendo } \lambda \text{ positivo ou negativo}$$

segundo B e A tenham sentidos iguais ou contrários

d) — Divisão de vetores unitários

$$\frac{j}{i} = k, \quad \frac{k}{i} = -j, \quad \frac{i}{k} = j$$

c) — Seja dividir o vetor A Λ B pelo vetor A.

Neste caso efetuando a operação, resulta:

$$\frac{A \Lambda B}{A} = \frac{A.(A \Lambda B)}{A^2} + \frac{A \Lambda (A \Lambda B) \ \Lambda.}{A^2}$$

Sendo porém A. (A X B) = O, resulta que

$$\frac{A \Lambda B}{A} = \frac{A \Lambda (A \Lambda B)}{A^2}$$

o operador quociente se reduz a um vetor.
Theorema:
Para que dois quocientes vetóriais sejam iguais é necessário que:

os seus escalares sejam iguais e
os seus vetores sejam iguais

Com efeito si

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

então

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = O = \frac{(B.A)}{B^2} - \frac{(C.D)}{D^2} + \frac{(B \Lambda A) \Lambda}{B^2} - \frac{(C \Lambda D) \Lambda}{D^2}$$

ou

$$\frac{(B.A)}{B^2} - \frac{(C.D)}{D^2} = O$$

$$\frac{(B \Lambda A) \Lambda}{B^2} - \frac{(D \Lambda D) \Lambda}{D^2} = O$$

donde

$$\frac{(B.A)}{B^2} = \frac{(C.D)}{D^2}$$

$$\frac{(B\Lambda A)}{B^2} = \frac{C\Lambda D}{D^2}$$

e) — Seja resolver a equação

$r\Lambda f = M$ equação vetorial do eixo de um vetor deslisante F. Dividindo ambos os membros da equação por F, vem:

$$\frac{r\Lambda F}{F} = \frac{M}{F}$$

ou

$$r\Lambda = \frac{M}{F} = \frac{F.M}{F^2} + \frac{F\Lambda M}{F^2}\,\Lambda$$

Ora, sendo $F.M = O$ já que $r\Lambda\ F.F = O$ resulta pois a igualdade dos dois operadores

$$r\Lambda = \frac{F\Lambda M}{F^2}\,\Lambda$$

$$r = \frac{F\Lambda M}{F^2}$$

que é uma solução particular do vetor r. A solução geral será:

$$r = \frac{F\Lambda M}{F^2} + \lambda F$$

onde λ é um coeficiente a determinar, já que o produto vetorial geral é:

$$(r + \lambda F)\ \Lambda\ F = M.$$

O valor de λ será determinado multiplicando-se escalarmente ambos os membros da equação por F

$$r.F = \frac{(F\Lambda M)}{F^2.}.\ F + \lambda\ F.F$$

donde

$$\lambda = \frac{r\ .\ F}{F^2}$$

E a equação do vetor r será:

$$r = \frac{F\Lambda M + (r.F)F}{F^2}$$

RECÍPROCO DE UM VETOR

Já vimos a existência do operador quociente $\frac{A}{B}$ passemos agora a procura do vetor recíproco de um vetor dado.

Seja A um vetor qualquer referido a um terno orientado.

Vamos admitir a existência do vetor $\frac{1}{A}$ recíproco desse vetor A.

Seja B um vetor qualquer. O quociente do vetor B dividido pelo vetor $\frac{1}{A}$ é um operador de expressão (3)

logo

$$\frac{B}{\left(\frac{1}{A}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^2}\left[\frac{1}{A} \cdot B + \left(\frac{1}{A}\Lambda B\right)\Lambda\right] \tag{4}$$

A expressão (4) é um operador vetorial. Aplicando êsse operador ao vetor $\frac{1}{A}$ teremos o vetor B.

$$\frac{B}{\left(\frac{1}{A}\right)}\frac{1}{A} = B = \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^2}\left[\frac{1}{A} \cdot B + \left(\frac{1}{A}\Lambda B\right)\Lambda\right]\frac{1}{A} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^2}\left[\left(\frac{1}{A} \cdot B\right)\frac{1}{A} + \left(\frac{1}{A}\Lambda B\right)\Lambda\frac{1}{A}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^2}\left[\left(\frac{1}{A} \cdot B\right)\frac{1}{A} + \left(\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{A}\right) B - \left(\frac{1}{A} \cdot B\right)\frac{1}{A}\right]$$

Donde

$$B = \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^2}\left[\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{A}\right] \tag{5}$$

porém para que a expressão (5) seja uma identidade, é necessário que:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)}\left[\frac{1}{A} \cdot \frac{1}{A}\right] = 1 \quad (6) \tag{6}$$

expressão essa que se verifica fazendo o vetor

$$\frac{1}{A} = \frac{A}{|A|^2} \tag{7}$$

Da expressão (7) se conclue que:

"O recíproco de um vetor é outro vetor igual ao primeiro, dividido pelo quadrado do seu módulo".

Os autores Cissoti, Heaviside e Pompeu B. Accioly no seu magnífico livro, "Equações Vetoriais" admitem a igualdade (7) como uma definição. Da equação (7) se conclue que o recíproco de um vetor unitário é o próprio vetor unitário.

PRODUTOS DE DOIS VETORES:

Já vimos a existência do vetor recíproco do vetor A, vejamos agora a existência do produto de dois vetores. Substituindo

$\frac{1}{A}$ pelo seu valor na expressão (4) teremos:

$$\frac{B}{\frac{1}{A}} = BA = \frac{1}{\left(\frac{1}{A}\right)^2} \left[\frac{1}{A} . B + (\frac{1}{A} \wedge B) \wedge \right] = A . B + (A \wedge B) \wedge$$

ou

$$B\ A = A\ .\ B + (\ A \wedge B\ )\ \wedge \qquad (8)$$

A expressão (8) nos mostra que o produto de dois vetores é um operador linear.

APLICAÇÃO

EXERCÍCIO I

$$BB = B\ .\ B + B \wedge B \wedge = B^2$$

O operador BB aplicado a um vetor A dá sempre um vetor paralélo a A.

EXERCÍCIO II

Num triângulo A B C, sendo o lado c igual à sôma vetorial dos outros dois lados poderemos escrever:

$$c = (a + b)$$

ou

$$cc = (a + b) \quad (a + b)$$

desenvolvendo vem:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ a\ b \cos a\ b$$

já que os vetoriais $(a \wedge b) \wedge$ e

$(b \wedge a) \wedge$ se anulam.

EXERCÍCIO III

SENDO DADOS:

$$X\ .\ A = \alpha$$

$$X \wedge B = C$$

em que A B e C são 3 vetores conhecidos e α um escalar, achar o valor do vetor X.

Multiplicando a segunda equação por A, vem:

$$A\ (X \wedge B) = AC$$

Desenvolvendo vem:

$$(X \wedge B)\ .\ A + (X \wedge B)\ \wedge A = C\ .\ A + C \wedge A\ \wedge$$

Igualando os escalares e os vetoriais, teremos:

$$(X \wedge B)\ .\ A = C . A$$

e

$$(X \wedge B) \wedge A = C \wedge A$$

Desenvolvendo o primeiro membro da equação e substituindo X.A por α, vem:

$$(A . X)\ B - (B . A)\ X = C \wedge A$$

donde

$$X = \frac{C \wedge A + \alpha B}{A . B}$$

Expressão essa, que nos dá o valor de um vetor X, quando se conhecem os seus produtos escalar e vetorial, com dois vetores dados A e B. No caso de A ser igual a B vem:

$$X = \frac{C \wedge A + \alpha A}{A^2}$$

EXERCÍCIO IV

Seja resolver a seguinte equação:

$$\alpha X + X \wedge A = B$$

Em que α é uma escalar e A e B dois vetores dados

temos:

$$X \wedge A = B - \alpha X$$

Dividindo ambos os membros por A, vem:

$$\frac{X \wedge A}{A} = \frac{B - \alpha X}{A}$$

Desenvolvendo vem:

$$A.(X \wedge A) + A \wedge (X \wedge A) \wedge = A.(B - \alpha X) + AX (B - \alpha X).$$

igualando os escalares e vetores vem:

$$A.(X \wedge A) = O = A.(B - \alpha X)$$

donde

$$X.A = \frac{I}{\alpha} (A.B)$$

e

$$A \wedge (X \wedge A) = A \wedge (B - \alpha X)$$

Desenvolvendo vem:

$$-(A.X) A + A^2 X = A \wedge B - \alpha A \wedge X$$

substituindo $A \wedge X$ e $A.X$ pelos seus valores, vem:

$$A^2 X - \alpha (B - \alpha X) = A \wedge B + \frac{I}{\alpha} (A.B) A$$

donde feitas as operações:

$$X = \frac{A \wedge B + \frac{I}{\alpha} (A.B) A - \alpha B}{\alpha^2 + A^2}$$

Já que o valor de X é

$$X = \frac{C}{B^2} = \frac{B \wedge C}{B^2}$$

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DOS OPERADORES QUOCIENTES

A multiplicação e divisão dos operadores quocientes podem ser feitas do seguinte modo:

a) Multiplicar ou dividir um operador por um vetor

Exemplo: $(BA) \quad C, \quad \frac{BA}{C}$

b) Multiplicar ou dividir um operador por outro operador.

Exemplo:

$$\left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{C}{D}\right) \quad \left(\frac{B}{A}\right) \div \left(\frac{C}{D}\right)$$

veremos que num e no outro caso, o resultado é um vetor ou outro operador.

Passemos ao primeiro caso.

Já vimos que o produto de dois vetores BA é um operador.

Multiplicando êsse produto por um vetor C ou o seu recíproco teremos como resultado um vetor diferente de A, B e C.

Assim, se ao produto B A multiplicarmos o vetor C teremos:

$$(BA)\ C = [A.B + (A \wedge B \wedge)]\ C = (A.B)\ C + (A \wedge B) \wedge C.$$

Desenvolvendo-se resulta:

$$(BA)\ C = (B.A)\ C + (A.C)\ B - (C.B)\ A \tag{9}$$

Do mesmo modo se deduz,

$$C\ (BA) = (B.A)\ C + (A.C)\ B - (C.B)\ A$$

Donde resulta

$$C\ (BA) = (BA)\ C \tag{10}$$

No caso de se aplicar o vetor $\frac{1}{C}$ recíproco do vetor C a expressão (9) se torna:

$$(BA)\ \frac{1}{C} = (BA)\ \frac{C}{C^2} = \frac{1}{C^2}\ [(B.A)\ C + (A.C)\ B - (C.B)\ A] \tag{11}$$

De (11) se tira, fazendo C = A

$$\frac{1}{A}\ (BA) = (BA)\ \frac{1}{A} = B \tag{12}$$

Veremos porém que:

$$\frac{1}{B}\ (BA) = (BA)\ \frac{1}{B} = \frac{1}{B^2}\ [((B.A)\ B + (A.B)\ B - (B.B)\ A]$$

ou

$$\frac{1}{B}\ (BA) = (BA)\ \frac{1}{B} = \frac{2(A.B)}{B^2}\ B - A \tag{13}$$

vemos pois que $\frac{1}{B}$ (BA) é um vetor diferente de A e de B.

APLICAÇÃO

I

ROTAÇÃO DE UM VETOR NUM PLANO

Seja um plano normal ao vetor k e v um vetor dêste plano. Vamos determinar uma operação vetorial, que permita a transformação do vetor v num vetor X tal que a sua direção orientada se deduz dado vetor v por meio de uma rotação de um ângulo ϕ e cujo módulo seja igual a $r \mid v \mid$.

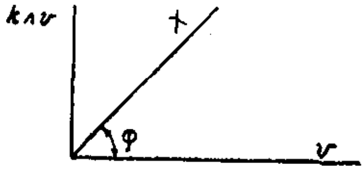


Figura 1

O vetor X, figura I, de equação:

$$X = r\cos\phi v + r\, sen\phi k\Lambda v$$

expresso em função dos vetores v e $k\Lambda v$ responde a questão, pois é um vetor cuja direção orientada faz um ângulo ϕ com o vetor v e cujo módulo é:

$$\mid X \mid = r \mid v \mid .$$

A operação que permite deduzir o vetor X do vetor v é o operador quociente $\left(\frac{X}{v}\right)$, pois $\left(\frac{X}{v}\right) v = X$

Determinemos êsse operador:

$$\frac{X}{v} = \frac{1}{v^2} [v.X +, (v\Lambda X) \Lambda] = \frac{1}{v^2} [r \cos\phi\ v^2 + r\ sen\ \phi\ v^2 k\Lambda]$$

$$\frac{X}{v} = [r\cos\phi + r\ sen\ \phi\ k\Lambda]$$

Êsse operador permite deduzir o vetor X do vetor dado v.

$$X = \mid r\cos\phi + r\ sen\ \phi\ k\Lambda \mid v = r\cos\phi\ v + r\ sen\ \phi\ k\Lambda v$$

O operador

$$r\cos\phi + r\ sen\ \phi\ k\Lambda$$

é *chamado versor do vetor v, pois permite* dar a v uma rotação de ângulo ϕ.

No caso de $\phi = \frac{\pi}{2}$ o versor se transforma em

$$rk\Lambda$$

II

VETOR SIMÉTRICO

Já vimos que o operador

$$\frac{X}{v} = r\ (\cos\phi + sen\ \phi\ k\Lambda) \qquad (1)$$

aplicado ao vetor v, nos dá o vetor X.

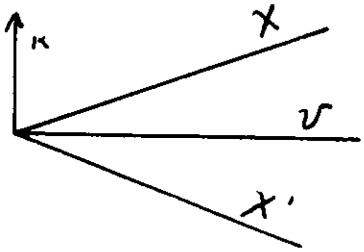


Figura 2

Procuremos agora um operador que multiplicado por v nos dê um vetor X' simétrico do vetor X em relação ao vetor v.

Ora, o operador

$$\frac{X'}{v} = r\ (\cos\phi - \text{sen}\ \phi\ k\Lambda) \qquad (2)$$

satisfaz o pedido.

Comparando (1) e (2) vemos que os dois operadores têm escalares iguais e vetores iguais e sinaes contrários.

Podemos pois escrever

$$\boxed{\frac{X'\ v}{v} = \frac{v\ X}{v}} \qquad (3)$$

que é a equação que nos dá um vetor X' simétrico de X em relação a v.

De (3) temos

$$X' = (vX)\ \frac{1}{v}$$

APLICAÇÃO:

Achar o simétrico do vetor $X = ai + 2\ bj$ em relação ao vetor i

$$X = ai + 2\ bj$$
$$v = i$$

Aplicando (3), vem

$$X' = \left[(ai + 2bj).i + (ai + 2bj)\ \Lambda i \right]\ i =$$

$$X' = ai - 2bj$$

III

DISTANCIA DE UM PONTO A UMA RETA

Seja um ponto P definido pelo vetor B e a reta Op de direção dada pelo vetor A.

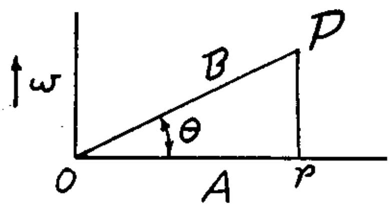


Figura 3

A distância do ponto P ao vetor A, é dada pelo módulo do vetor

$|p - P| = |B| \operatorname{sen}\Theta$.

Ora

$A \wedge B = |A||B| \operatorname{sen}\Theta \, d$

Em que d é um vetor unitário normal a A e B.

Dividindo a equação por A, vem:

$$\frac{A \wedge B}{A} = |A|\,|B| \operatorname{sen}\Theta \, \frac{d}{A} = \frac{|A|\,|B| \operatorname{sen}\Theta \, d\, A}{|A|^2}$$

Porém

$$d\,A = (A \wedge d)$$

uma vez $d.A = O$

Teremos assim

$$\frac{A \wedge B}{A} = \frac{|A|\,|B| \operatorname{sen}\Theta \,(A \wedge d)}{A^2} = \frac{|A|\,|B| \operatorname{sen}\Theta \,|A|\,|d|}{A^2}\,\varepsilon$$

Sendo ε o vetor unitário normal A e d

O operador a equerda se reduzindo a um vetor, pois A. (A B) = o, podemos escrever

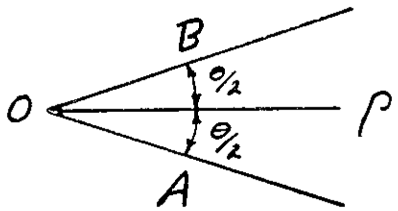
$$\frac{A \wedge B}{A} = |B| \operatorname{sen}\Theta\,\varepsilon = (P - B)$$

Então

$$\left|\frac{A \wedge B}{A}\right| = \text{distância do vetor B ao vetor A}$$

e

BISSETRIZ DE UM ÂNGULO



Seja um ângulo de lados definidos pelos vetores unitários A e B, seja P a bissetriz dêsse ângulo.

Sendo o lado A simétrico de B em relação à bissetriz podemos escrever:

$$B\,P = P\,A$$

Dividindo por B e efetuando as operações, vem

$$\frac{P\,P}{B} = \frac{P\,A}{B}$$

ou

$$(P.B)B + (P \wedge B) \wedge B = (A.P)B + (A \wedge B) \wedge B$$

$$2\,(P.B)\,B = P^2\,P = (A.P)\,B + (A.B)\,P - (P.B)\,A$$

Substituindo $P.A = (P.B) = |P|\ |A| \cos\dfrac{\Theta}{2} = |P| \cos\dfrac{\Theta}{2}$

vem

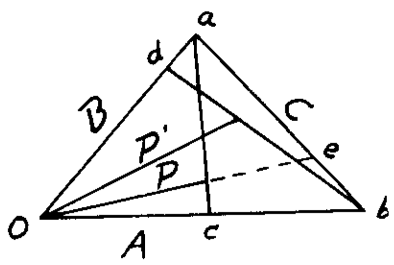
$$= \frac{|P| \cos\dfrac{\Theta}{2}}{1 + \cos\Theta} \left| B + A \right|$$

que é a equação da bissetriz do ângulo

No caso de $\Theta = 60^{o}$ resulta

$$P = \frac{|P|}{\sqrt{3}} \left[B + A \right]$$

ALTURAS DE UM TRIÂNGULO



Seja o triângulo O a b de lados definidos pelos vetores A, B, e C. As alturas (a-c) e (b-d) têm por equação:

$$P = B + x \frac{A \wedge B}{A}$$

$$P' = A + Y \frac{B \wedge A}{B}$$

e

Desenvolvendo as equações, resulta:

$$P = B - x\,B + x \frac{A.B}{A^2} A$$

$$P' = A - YA - Y \frac{A.B}{B^2} B$$

no ponto de encontro das alturas $P = P'$

Efetuando as operações vem:

$$B \left[1 - x - \frac{Y}{B^2} (A.B) \right] = A \left[1 - Y - x \frac{A.B}{A^2} \right]$$

ou

$$1 - x - \frac{Y}{B^2} (A.B) = 0$$

$$1 - Y - \frac{x}{A^2} (A.B) = 0$$

Resolvendo as equações, vem:

$$X = \frac{-1 + \dfrac{A.B}{B^2}}{-1 + \dfrac{(A.B)^2}{A^2\ B^2}} = \frac{-1 + \dfrac{A}{B}\cos\phi}{-\sin^2\phi}$$

$$Y = \frac{-1 + \dfrac{A.B}{A^2}}{-1 + \dfrac{(A.B)^2}{A^2\ B^2}} = \frac{-1 + \dfrac{B}{A}\cos\phi}{-\sin^2\phi}$$

APLICAÇÃO

No caso de um triângulo equilátero

$|A| = |B|, \ \phi = 60$

e vem

$$X = Y = + \frac{2}{3}$$

Altura (a-c)

Substituindo na equação da altura (a-c) x pelo seu valor, resulta; fazendo as operações

$$P = \frac{1}{3}\left[A + B \right]$$

Ora, da figura se tira que

$$P = B - \frac{2}{3}(a\text{-}c)$$

ou

$$\frac{1}{3}[A + B] = B - \frac{2}{3}(a\text{-}c)$$

donde

Altura (b — d)

Do mesmo modo se deduz que a altura

$$(b - d) = A - \frac{B}{2}$$

Altura (e — o)

Ora, a altura (e — o) é igual a $\dfrac{3}{2}P$

$$(e - o) = \frac{3}{2}P = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}[A + B]\right]$$

$$(e - o) = \frac{A + B}{2}$$

MULTIPLICAÇÃO DE OPERADORES

Multiplicar ou dividir um operador por outro.

A multiplicação de um operador por outro dá como resultado um operador Com efeito

$$\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{C}{D}\right) = \frac{1}{D^2\ B^2}\Big[(B.A) + (B \wedge A)\ \Lambda \Big] \Big[(D.C + (D \wedge C)\ \Lambda \Big]$$

$$= \frac{1}{D^2 B^2}\Big[(B.A)\ (D.C) + (B.A)\ (D \wedge C)\ \Lambda + (D.C)\ (B \wedge A)\ \Lambda + (B \wedge A)\ \Lambda\ (D \wedge C)\ \Lambda \Big]$$

Então

$$\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{C}{D}\right) \frac{(B.A)\ (D.C) + (B.A)\ (D \wedge C)\ \Lambda + (D.C)\ (B \wedge A)\ \Lambda + (B \wedge A)\ \Lambda\ (D \wedge C)\ \Lambda}{B^2\ D^2}$$

Podemos fàcilmente verificar que

$$\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{C}{D}\right) E \neq \left(\frac{C}{D}\right)\left(\frac{A}{B}\right) E \qquad \text{I}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{B}{A}\right) C = \left(\frac{B}{A}\right)\left(\frac{A}{B}\right) C \qquad \text{II}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{B}{A}\right) A = A \left(\frac{B}{B}\right)\left(\frac{A}{A}\right) = A \qquad \text{III}$$