Solução Direta do Problema dos Três Reservatórios

J. CARVALHO LOPES

Prof. Catedr. da Escola de Minas de Ouro Preto
Prof. Catedr. da Escola de Arquitetura da Univ. Minas Gerais

1) PRELIMINARES

O conhecido problema dos "três reservatórios", também denominado "problema de Bélanger", e cuja generalização (que não abordamos no presente artigo conduz ao problema dos reservatórios múltiplos, constitui, a nosso ver, das mais interessantes e úteis aplicações da Hidráulica no sector do abastecimento dágua: Tem sido o mesmo abordado, pelo menos pelos autores que conhecemos, pelo processo das tentativas, o que se torna forçoso nos casos de expoentes fracionários dos diâmetros. Embora o método preconizado por Flamant venha a suavizar tais tentativas limitando-se unilateralmente a partir da hipótese forçada que neutraliza o reservatório intermediário (que passará a não receber nem fornecer água), a solução se nos apresenta na prática sempre trabalhosa e eivada de monotonia que caracteriza uma série enfadonha de tentativas.

Foi êste o motivo por que, inspirado na solução de ex-aluno e hoje brilhante colega engenheiro Justo Pioneiro da Fonseca, resolvi submeter aos leitores da nossa insuperável DAE, se mérito merecer a contribuição, um procedimento que culmina em solução exata no caso de expoente inteiro do diâmetro e que, pelo balanço e compensação nos dois têrmos da equação-solução, ainda perdura, nos demais, em exatidão, em face da fixação da cota piezométrica do ponto de entroncamento, pesquisa que é o ponto alto do problema. Obtida esta cota e conhecidas, portanto, as perdas de energia, estas poderão provir das fórmulas eleitas, inclusive as de expoentes fracionários. Tal fato não invalida, pois, o mérito do método que, iremos abordar. Se algum leitor mais exigente assim o desejar poderá ter noção do êrro, melhor divergência entre as fórmulas, aplicando conhecido método corrente na Mecânica Celeste quando as observações se fazem com aparelhos eivados de desretificações normais. Um fato podemos assegurar e o leitor poderá verificar. Nas inúmeras vêzes em que nos valemos do método nunca fizemos uma única tentativa e levada a solução às fórmulas providas de expoentes fracionários a diferença se tornou insensível no valor da cota do ponto de entroncamento, que é, em última análise, a solução do problema; o valor satisfaz.

2) NOTAÇÕES

Empregaremos as usuais na hidrotécnica: d_n para os diâmetros ($n = 1, 2, 3$ para os 3 reservatórios) e identicamente: L_n para os comprimentos das canalizações em relação ao ponto de entroncamento, Z_n para cotas *referidas ao plano horizontal do primeiro reservatório* (o mais elevado, contando-se como positivo o sentido da gravidade), Q_n para as vazões respectivas. Finalmente Z a cota e p a pressão (em metros) do ponto de entroncamento.

3) ASPECTO ALGÉBRICO DO PROBLEMA

Pelo item anterior vereficamos que 14 são as variáveis em jôgo, no caso mais geral: 3 diâmetros, 3 comprimentos, 3 cotas, três vazões, a cota do entroncamento e sua pressão. Como veremos que só dispomos de 4 equações, o problema, no seu aspecto teórico mais geral, daria o gráu de indeterminação.

Teríamos que associar 10 dados às 4 equações disponíveis. O número, "teórico", de problemas diferentes seria o correspondente a

$$C^{m}_{n}$$

isto é: combinações de 14 dados tomados dez a dez, o que nos levaria a 1001 problemas diferentes. Tal, felizmente, não se dá nas aplicações práticas, uma vez que nos projetos sempre são conhecidos as cotas e os comprimentos, restringindo-se os casos, que resumiremos no quadro abaixo:

Casos	Dados	Incógnitas	Níveis piezométricos		
	$L_1\ L_2\ L_3$	$Q_1\ Q_2\ Q_3$	a) $Z - \frac{p}{w} < Z_2$	$Q_1 = Q_3 \quad Q_2 = 0$	A
	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z$	p	b) $Z - \frac{p}{w} > Z_2$	$Q_1 = Q_2 + Q_3$	A
I)	$d_1\ d_2\ d_3$		c) $Z - \frac{p}{w} = Z_2$	$Q_1 + Q_2 = Q_3$	B
	$L_1\ L_2\ L_3$	$Q_1\ Q_2\ Q_3$	a) corresp. ao ponto A		
	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ p$	Z	b) corresp. ao ponto B		
	$d_1\ d_2\ d_3$	$d_1\ d_2\ d_3$	c) corresp. ao ponto C		
	$L_1\ L_2\ L_3$		a) ponto A		
	$Z_1\ Z_2\ Z_3\ Z$	p	a) ponto A		
	$Q_1\ Q_2\ Q_3$		b) ponto B		
II)	$L_1\ L_2\ L_3$		b) ponto B		
	$Z_1\ Z_2\ Z_3$	$d_1\ d_2\ d_3$	c) ponto C		
	$Q_1\ Q_2\ Q_3$	Z	c) ponto C		

O quadro supra resume todos os casos teòricamente possíveis. As expressões (a) correspondem ao caso do nível piezométrico de P estar acima do plano de carga de R_2. Dessa forma o reservatório mais elevado abastece os dois mais baixos. O caso (b) corresponderá ao B no esquema e finalmente o terceiro caso (c) admite a neutralidade de R_2 que passará a não receber nem fornecer água. As desigualdades não estão repetidas para não sobrecarregarem o quadro.

Como se observa, o problema se desdobra em dois fundamentais, indicados em algarismos romanos; no primeiro dão-se os diâmetros e Z ou p e pedem-se as vazões e p ou Z. Êstes quatros, por sua vez, recaem cada um de per si nas três condições indicadas nas desigualdades (a), (b) e (c). Teremos, pois, em suma, 12 problemas, melhor subproblemas. Observa-se que no caso II a quarta equação, a da distribuição das vazões:

$$Q_1 \mp Q_2 = Q_3$$

reduzir-se-á a simples identidade aritmética, deixando de participar na eliminação da indeterminação do problema. Desfalcados de uma equação, para manter a determinação teríamos dois caminhos: admitir mais um dado (um diâmetro; a cota ou pressão no entroncamento, p. ex.) ou, o que tornaria a solução mais racional e elegante, estabelecer mais uma equação. O mais interessante é considerar que o custo das canalizações passará por um mínimo, conceito econômico mui encontradiço em questões técnicas. A pesquisa de tal mínimo consistirá no anular a derivada de a soma dos custos dos três trechos, na hipótese, que se confirma, da derivada segunda ser positiva. Como conseqüência surgiu um dos mais belos capítulos da chamada Hidráulica Financeira: Custo mínimo nas canalizações. Há, mesmo, um processo de cálculo de rêde distribuidora que leva êste nome. Veremos no fim do presente trabalho como se procederá.

Como concretização do quadro supra aludiremos, p. ex., ao caso I-2-a como definindo o problema em que se dão os diâmetros e a pressão no entroncamento e pedem-se: a cota dêste e as vazões, tudo na hipótese do nível piezométrico e o do entroncamento situar-se acima do plano dágua do reservatório intermediário (R_2), em outras palavras: o reservatório mais elevado abastecer os dois inferiores.

4) DETERMINAÇÃO PRÉVIA DO SENTIDO DOS FLUXOS

É da máxima conveniência esta investigação antecipada afim de nos orientarmos sôbre os sinais a dar na 4.ª equação, a das vazões acima escritas. Aconselharíamos o seguinte meio para conseguí-lo:

a) Neutralizar (por abstração, pois de nada sabemos), o reservatório intermediário: R_2

b) Cálcular, em função dos dados (cotas e diâmetros) a relação

$$\frac{Q_1}{Q_3} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{Q_1}{Q_3}\right)^m$$

e ver-nos-íamos diante de três casos: maior, menor e, excepcionalmente igual a um.

O primeiro pressupõe, evidentemente, o caso (a), do reservatório superior alimentar os dois inferiores e fácil será verificar que passando da abstração para a realidade, mais se reforça, "a fortiori", a conclusão enunciada, vale dizer que, com a vazão inferiorizada quando efetivamente o reservatório suposto neutralizado contribuir, a cota piezométrica do entroncamento ainda mais se elevaria. O contrário se verificaria se a relação se mostrar menor que um, raciocínio análogo indicando que mais baixo ainda passaria a ficar o NP do entroncamento, o reservatório mais baixo sendo simultâneamente alimentado pelos dois que lhe ficam a montante.

Como ilustração daremos os números referentes a um caso nosso da prática. Fazendo, nas expressões gerais dos escoamentos, $Y = Z_2$, teremos:

$$Q^m{}_1 = \frac{Z_2 \cdot d^n{}_1}{r\,L_1} \qquad \text{e} \qquad Q^m{}_3 = \frac{(Z_3 - Z_2)\, d^n{}_3}{r\,L_3}$$

seja:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_3}\right)^m = \frac{Z_2\, d^n{}_1}{(Z_3 - Z_2)\, d^n{}_3} \cdot \frac{L_3}{L_1} = \frac{Z_2}{Z_3 - Z_2} \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^n \cdot \left(\frac{L_3}{L_1}\right)$$

onde todos os elementos que figuram no 2.º membro são conhecidos.

Para a adução do Suiça, em Teófilo Ottoni, nosso exemplo, teremos:

$$Z_1 = 76 \quad Z_3 = 100 \quad d_1 = 10'' \quad d_2 = 7'' \quad L_1 = 4020\text{ m} \quad \text{e} \quad L_3 = 3550\text{ m}$$

(em números redondos).

Achar-se-ia:

$$\left(\frac{Q_1}{Q_3}\right)^m = \frac{75}{100 - 75} \cdot \left(\frac{10}{7}\right)^n \cdot \frac{4020}{3550} > 1$$

relação evidentemente maior que um, uma vez que m e n são inteiros, positivos e próximos de 2 e 5 respectivamente.

Consequentemente os dois reservatórios da cidade são abastecidos pelo da represa, como se desejava. Os fluxos ficam, assim, em qualquer caso geral orientados e poderemos colocar as setas indicadoras nos esquemas, *antes de abordar o problema.*

Em todos os desenvolvimentos que fizemos e se fizerem basear-nos-emos na forma geral da equação dos encanamentos:

$$Z = r\,C\,Q^{m}\,D^{-n}$$

e confundiremos os Z (perdas de pressão) com perdas de energia, desprezadas as insignificantes quedas de linha de energia, do conflito de diâmetros no entroncamento de correntes.

5) SOLUÇÃO DO PROBLEMA

Pouparemos o leitor quanto à revisão das 4 citadas equações solucionadoras do problema. Isto é caso rotineiro da Hidráulica. Escritas as equações regedoras dos três fluxos entre reservatórios e entroncamentos, explicitando-lhes as vazões e levando-as à quarta equação somatória algébrica das vazões, pois que, pela regra do item (4) lhes conhecemos os sinais, chegaremos à expressão final que contêm tão sòmente uma incógnita(o nosso Y indicado no esquema):

$$\left(\frac{Y\,d^{n}_{1}}{L_1}\right)^{1/m} = \left(\frac{(Z_2 - Y)\,d^{n}_{2}}{L_2}\right)^{1/m} + \left(\frac{(Z_3 - Y)\,d^{n}_{3}}{L_3}\right)^{1/m}$$

equação absolutamente geral que resolve o problema empregando qualquer fórmula preferencial adaptada à forma geral já indicada.

Fazendo, como já o justificamos, m = 2 e n = 5 e elevando ao quadrado, virá:

$$[(Z_2 - Y)(Z_3 - Y)]^{1/2} = \frac{1}{2}\left|\frac{L_2\,L_3}{d^5_2\,d^5_3}\right|^{1/2} \left|\sum\frac{d^5}{L}\right| Y -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{L_2\,L_3}{d^5_1\,d^5_3}\right]^{1/2} \frac{Z_2\,L_3\,d^5_2 - Z_3\,L_2\,d^5_3}{L_1\,L_2\,L_3}\,L_1$$

em cuja expressão

$$\sum\frac{d^5}{L} = \frac{d^5_1}{L_1} + \frac{d^5_2}{L_2} + \frac{d^5_3}{L_3}$$

Faremos, finalmente:

$$2\,[(Z_2 - Y)(Z_3 - Y)]^{1/2} = MY + N\,L_1$$

em que

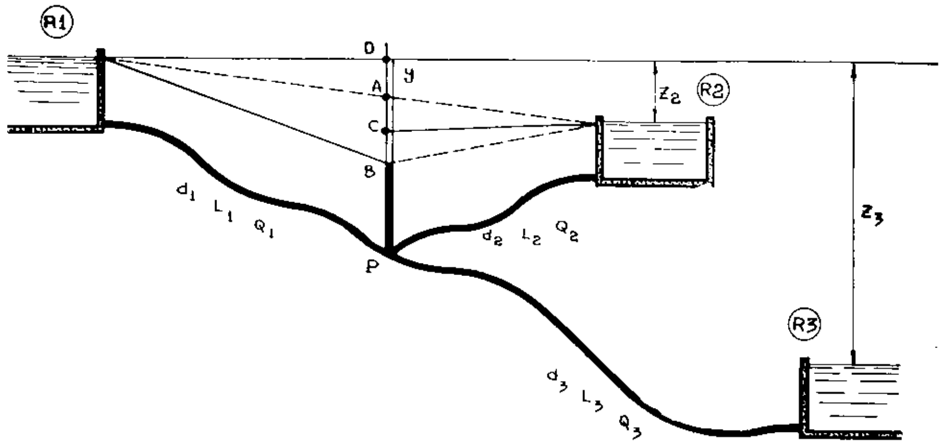
$$M = \left[\frac{L_2}{d^5_2} + \frac{L_3}{d^5_3}\right]^{1/2}\left(\frac{d^5_1}{L_1} + \frac{d^5_2}{L_2} + \frac{d^5_3}{L_3}\right)$$

e

$$N = \left[\frac{L_2}{d^5_2} \times \frac{L_3}{d^5_3}\right]^{1/2}\left(\frac{Z_2}{L_1} \cdot \frac{d^5_2}{L_2} + \frac{Z_3}{L_1} \cdot \frac{d^5_3}{L_3}\right)$$

Vale observar que tanto M como N são coeficientes adimensionais, independentes, portanto das unidades adotadas. Muito facilitará os cálculos a adoção do decímetro como unidade, livrando-nos do excesso de zeros na quinta potência dos diâmetros correntes. Tabelas, existentes, de potências 2.ª e 5.ª muito abreviam cálculos.

Se fizermos:



O PLANO DE COMPARAÇÃO PASSA POR R_1 H, PLANO DÁGUA DE R_1.

A cota de P, ponto de entroncamento é $\overline{PD} = Z$

A corresponde a $Z - \frac{p}{w} < Z_2$ portanto R_1 supre R_2 e R_3

B " " $Z - \frac{p}{w} > Z_2$ " R_1 e R_2 suprem R_3

C " " $Z - \frac{p}{w} = Z_2$ " R_2 fica fora de serviço (anulado)

$$\frac{d^5_1}{L_1} = r_1 \qquad \frac{d^5_2}{L_2} = r_2 \qquad \text{e} \qquad \frac{d^5_3}{L_3} = r_3$$

obteríamos:

$$M = \frac{1}{(r_2\, r_3)^{1/2}} \cdot (r_1 + r_2 + r_3)$$

e

$$N = \frac{1}{(r_2\, r_3)^{1/2}} \cdot \frac{r_2\, Z_2 + r_3\, Z_3}{L_1}$$

Chegaríamos à equação final, do 2.º grau:

$$(M^2 - 1) \cdot Y^2 + 2(2\, Z_2 + 2\, Z_3 - MN\, L_1) \cdot Y + N^2 \cdot L^2_1 - 4\, Z_2 \cdot Z_3 = 0$$

do segundo gráu em Y, nossa incógnita, simplicíssima, tudo redundando no fácil cálculo dos coeficientes M e N, *números puros*, independentes, pois, das unidades, sugerindo-nos o uso do decímetro. É curioso observar que as expressões obtidas são independentes de Z_1, cota do reservatório mais elevado, aliás zero em razão do eixo adotado. Não seria necessário, também, alertar que das duas raizes da equação do segundo gráu obtida apenas a que atender às condições do problema será aproveitada.

Poderíamos apresentar inúmeras aplicações de casos concretos, o que não fazemos por se tratar de operações materiais, da rotina, que se não enquadram numa revista da estatura de RAE. Ficaria satisfeito se os colegas que se abalassem a tal me comunicassem suas impressões, bem como críticas e aperfeiçoamentos que acolherei de bom grado.

6) SIMPLIFICAÇÕES

Freqüentemente casos da prática apresentam simplificações (alguns diâmetros ou comprimentos iguais, etc.).

Muito útil e prático seria forçar tais simplificações mediante a aplicação da regra de DUPUIT ou do encanamento composto, que apresenta duas variantes:

a) Faz-se $L_2 = L_3$ e iguais a L_1, calculando-se, pela dita regra, os diâmetros

$$d'_2 \text{ e } d'_3$$

que conduziriam a ramos de igual comprimento porém eqüivalentes aos antigos sob o ponto de vista hidráulico: conduzindo a mesma vazão sob a mesma perda de carga. Os coeficientes M e N se simplificam e transferimos ao leitor interessado o cuidado de calculá-los.

b) Mais interessante ainda vem a ser adotar diâmetro único, d_1 por exemplo, e pela regra citada calcular os dois comprimentos virtuais L'_2 e L'_3.

Êste procedimento nos libera de cálculos de fastidiosas quinta-potências dos diâmetros, bastando afirmar que nosso coeficiente M se reduziria a

$$M = (L_2 L_3)^{1/2} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} \right)$$

e N simplesmente se transforma em:

$$N = \frac{Z_2 + Z_3}{L_1}$$

Interessante será considerar, em matéria de influência de altas potências, que tubulação de 9,25 polegadas substitui, nas mesmas condições hidráulicas, duas de 7 polegadas, pela fórmula de Hazen com $C = 100$.