Sôbre Algumas Propriedades da Função Logística

J. C. DIAS DE MORAES

Engenheiro Químico e Sanitarista

Departamento de Águas e Esgotos de São Paulo

1 — CONSIDERAÇÕES GERAIS

1.1 — *Preliminares*: em trabalho anterior (ref. 1) introduzimos o conceito da *função normal logística*.

Pretendemos agora discutir algumas propriedades fundamentais da função logística, para melhor compreensão do seu mecanismo matemático.

1.2 — *Casos de Inaplicabilidade*: no trabalho acima citado (ref. 2), referimo-nos a três casos de inaplicabilidade que a condição de Yule traria para a resolução da equação logística. Devemos esclarecer, a bem da verdade, que pesquisas posteriores, e que constam do atual trabalho, conduziram-nos a conclusões diferentes. Na verdade, não são, pròpriamente, casos de inaplicabilidade, mas, condições particulares de aplicação à equação de Verhulst.

Sendo o ponto de inflexão um ponto singular de alto significado matemático, é natural que a curva neste ponto, apresente propriedades excepcionais. Daí a nossa afirmativa inicial.

Neste trabalho, contudo, tentamos esclarecer totalmente o problema matemático, como se verá mais adiante.

1.3 — *Condição de Passagem da Curva Logística por Três Pontos Equidistantes no Tempo*: o processo que seguimos no trabalho já publicado não dispensa a condição de Yule, que consiste em se determinar as constantes da equação logística, a partir de três populações conhecidas e equidistantes no tempo. Entretanto, a existência de três populações conhecidas e equidistantes no tempo, de um dado agrupamento humano, não é condição suficiente para que uma possível curva logística passe, simultâneamente, por êstes três pontos dados.

Então, precisamos estabelecer a condição de passagem da curva logística, por três pontos conhecidos e equidistantes no tempo.

Não obstante já ser conhecida esta condição, apresentamos, mais adiante, uma demonstração original, da sua necessidade e suficiência.

1.4 — *Função das Constantes*: há duas espécies de constantes na equação de Verhulst. A primeira espécie é a que define, generalizadamente, a curva em relação às populações. É a constante P_s, chamada população de saturação, e que é um valor assintótico, mas perfeitamente determinável, quando possível matemàticamente. P_s é, logìsticamente, o limite para o qual tende todo o agrupamento humano quando são satisfeitas integralmente as premissas de Verhulst. A forma da curva depende exclusivamente da função normal logística, mas a posição da sua assintota superior depende do valor de P_s.

A segunda espécie de constantes tem a função explícita de enquadrar na curva logística, a época em que o grupo humano está sendo estudado. Tem, pois, a função de localização no tempo.

A primeira seria um valor absoluto para cada agrupamento humano logístico, e porisso mesmo seria invariável, estatìsticamente, num mesmo agru-

---

NOTA: êste trabalho é o segundo de uma série de artigos, sôbre a Logística, os quais serão sucessivamente publicados na Revista do DAE, como já foi publicado o primeiro no número anterior desta Revista.

pamento, e, isto é importante, independente do tempo. É uma constante de origem material, e inerente à própria estrutura do crescimento populacional estudado, tendo, pois, uma unidade concreta de medida, a qual é dada pelo elemento unitário humano, ou generalizadamente, por qualquer elemento *unitário do crescimento* em estudo, não obstante, matemàticamente, poder ser um número fracionário ou irracional, mas sempre real e positivo, quando possível de ser determinado a partir dos dados existentes.

A segunda, tem um valor relativo, abstrato, pois é uma grandeza sem unidade, e que funciona como expoente.

Na equação logística transformada (ref. 1, eq. 9) temos:

$$P = N P_s \qquad (1)$$

em que N é a função normal logística, de valor abstrato, P é a populaçãc atual, e P_s a população de saturação, número concreto, e que fornece a unidade de medida para P. Esta equação fornece todos os valores para P, quando N varia de zero a um.

Por sua vez, o valor de N dependerá do valor de φ, que pode variar de $-\infty$ a $+\infty$, pois N tem a expressão (ref. 3):

$$N = \frac{e^{\varphi}}{2 \cosh \varphi} = \frac{1}{1 + e^{-2\varphi}} \qquad (2)$$

Até aí não apareceu o tempo. Entretanto, φ é relacionado com a segunda espécie de constantes pela equação (ref. 4):

$$\varphi = \frac{b t - a}{2} \qquad (3)$$

em que "b" e "a" são as constantes da segunda espécie, e "t" um número medido pela relação entre dois intervalos de tempo, a partir de um intervalo de tempo considerado como unitário. O valor de "t" é dado pela equação (ref. 5):

$$t = \frac{T - T_0}{i} \qquad (4)$$

na qual "i" é o intervalo de tempo considerado como unitário para a medida da grandeza "t". Estando "i" relacionado a "t" por meio da data T_0 do nosso calendário, considerada como origem, ou melhor, correspondente a P_0, e T a data atual, fica então "t" relacionado com o tempo, podendo-se exprimir a curva logística em função de φ ou do tempo T. Os valores que "a" e "b" poderão assumir, dependerão da posição de P_0 e P_1 em relação ao desenvolvimento do agrupamento humano em estudo, não mantendo, pròpriamente, relações com a forma da curva. Para uma dada curva logística, "a" e "b" poderão ter os mais diferentes valores, pois estas constantes são dadas por:

$$a = -2 \varphi_0 \qquad (5)$$

$$b = 2 (\varphi_1 - \varphi_0) \qquad (5a)$$

e como φ_0 e φ_1 dependem, em última análise de P_0 e P_1 (para um dado valor de P_s), e, portanto, de $T_1 - T_0$, verifica-se, pois, que "a" e "b" dependem da época em que foram observadas as populações P_0 e P_1, servindo então, tais constantes, para enquadrar P_0 e P_1 na curva logística em estudo.

Por outro lado, tendo-se "a" e "b", e fazendo-se variar "t" em (3) faremos φ percorrer todos os valores reais, levando a (2) a variar entre zero e um, e P em (1) entre zero e P_s.

Veremos, mais adiante, como variam as constantes de segunda espécie "a" e "b".

2 — CONSIDERAÇÕES SÔBRE A POPULAÇÃO DE SATURAÇÃO

2.1 — *Considerações Gerais*: um estudo amplo sôbre a população de saturação é qualquer coisa de empolgante, embora não o pareça ao espírito estritamente matemático. Em trabalho, que esperamos ter a oportunidade de algum dia trazer a público, procuraremos fazer um ensaio mais humano sôbre a saturação, compreendida como um fenômeno social e econômico, com as suas consequências nos múltiplos campos de atividade do homem. O estudo da sociedade saturada, assim como daquela que está no ponto de inflexão da curva logística, e do seu material humano, com tôdas as suas exteriorizações, é um estudo que interessa profundamente ao homem, e por isso mesmo apaixonante e empolgante, mas que está fora dêste nosso modesto trabalho matemático, não apresentando, provàvelmente, interêsse para a engenharia que todos os nossos leitores praticam diàriamente.

2.2 — *Assíntotas da Curva Logística*: a curva logística tem duas assíntotas retilíneas e paralelas ao eixo das abcissas. Vamos fazer a sua pesquisa.

Basta atribuir valores infinitos à variável φ para se ter os valores de P correspondentes às assíntotas procuradas.

Para $\varphi = -\infty$ teremos:

$$\lim_{\varphi \to -\infty} P = \lim_{\varphi \to -\infty} \frac{P_s}{1 + e^{-2\varphi}} = 0 \qquad (6)$$

Para $\varphi = +\infty$ teremos:

$$\lim_{\varphi \to +\infty} P = \lim_{\varphi \to +\infty} \frac{P_s}{1 + \frac{1}{e^{2\varphi}}} = P_s \qquad (6a)$$

Então as duas assíntotas da curva logística são dadas pelas equações:

$$P = 0 \qquad (7)$$

$$P = P_s \qquad (7a)$$

2.3 — *Limites de P_s*: a constante P_s pode, na equação (1), abstratamente variar dentro dos seguintes limites, sem, contudo terem significado material os valores negativos e o limite $+\infty$:

$$-\infty \leq P_s \leq +\infty \qquad (8)$$

apesar de:

$$0 \leq N \leq 1 \qquad (9)$$

Entretanto, na aplicação prática da logística, os valores de P_s não podem variar além dos limites:

$$P_{s\,min} \leq P_s \leq P_{s\,max} \qquad (10)$$

sendo $P_{s\,min}$ positivo, e $P_{s\,max}$ finito e também positivo.

Por outro lado, $P_{s\,min}$ deverá ser sempre maior do que um:

$$P_{s\,min} > 1 \qquad (11)$$

pois, si $P_{s\,min} = 1$, pelo menos, os valores de P_0 e P_1 serão menores do que um, o que é um contrasenso material. O mínimo possível seria:

$$P_0 = 1 \qquad (12)$$

Levando esta condição a equação (17) teremos para P_s:

$$P_s = \frac{P_2 + 1 - 2\frac{P_2}{P_1}}{1 - \frac{P_2}{P_1^2}} \qquad (13)$$

em que:

$$P_2 < P_1^2 \qquad (14)$$

Contudo, si $P_0 = 1$ o valor mínimo de P_1 deve ser maior do que um. Supondo que $P_1 = 2$, necessàriamente P_2 tem que ser menor do que quatro. Supondo que seja $P_2 = 3$, teriamos para P_s:

$$P_s = 4 \qquad (15)$$

Então a sucessão 1, 2, 3 e 4, respectivamente para P_0, P_1, P_2 e P_s satisfaz a função logística. Êste é o conjunto de valores mais baixos possíveis que satisfaz materialmente a logística. Na verdade, tal conjunto de valores nunca será encontrado na prática, como é óbvio dizer. Mas, de qualquer modo, o valor mínimo possível para P_s é:

$$P_{s\,min} = 4 \qquad (15a)$$

Para que P_s seja infinito, pela equação (17) teremos dois casos: a) numerador infinito; b) denominador nulo.

Chamando naquela equação o numerador de:

$$D = P_2 + P_0 - 2\frac{P_0 P_2}{P_1}$$

verificamos que êle nunca poderá ter um valor infinito, pois:

$$P_0 < P_1 < P_2 < +\infty$$

Então o primeiro caso não é possível materialmente. No segundo caso teremos:

$$\boxed{m = P_1} \qquad (16)$$

Sendo, pois, esta a condição necessária e suficiente para que a população de saturação tenha um valor infinito.

Entretanto, sí P_0, P_1 e P_2 pertencerem a uma logística, nunca se verificará a condição (16), como será visto mais adiante.

2.4 — *Valores Negativos de P_s*: não obstante a equação (2) não permitir valores negativos para P_s, salvo si P também o fôr, hipótese inaceitável materialmente, a equação de P_s dada por:

$$P_s = \frac{P_0 + P_2 - 2m}{1 - \frac{m}{P_1}} \qquad (17)$$

em que:

$$m = \frac{P_0 P_2}{P_1} \qquad (17a)$$

permite valores negativos para P_s. Estes valores não têm significado prático, mas podem ser encontrados ocasionalmente na prática.

Como está visto em (59h) sí o numerador $P_0 + P_2 - 2m$ fôr negativo, necessàriamente o denominador $1 - m/P_1$ também o será. Mas, sí o denominador fôr negativo o numerador não o será necessàriamente, podendo ser positivo, trazendo para P_s um valor negativo. Está claro que neste caso, as populações conhecidas P_0, P_1 e P_2, embora equidistantes no tempo, não pertencem a nenhuma logística.

A primeira demonstração é feita pelo mesmo método dado entre as equações (33b) até a (45), sòmente que em (33) e (33a) se inverte o sinal da desigualdade.

A segunda, para os valores negativos de P_s, é simples como passamos a fazer. Tomando a (44) e invertendo o sinal da desigualdade, e considerando as (34) e (34a) virá:

$$R_2 > R_1 \tag{19}$$

ao contrário da (45).

Voltando a (33b) e invertendo-se o sinal da desigualdade, e operando com as (34) e (34a) teremos:

$$R_2 (1 + R_1) > R_1 \tag{20}$$

Ora, apesar da equação de condição (19), a equação (20) pode se verificar independentemente dela. Si $R_2 > R_1$ necessàriamente a (20) se verifica. Mas, sí $R_2 < R_1$ ainda a (20) pode se verificar. Isto se dá porque $R_1 > 0$ e R_2 é menor do que um e maior do que zero. Pode haver uma combinação tal de valores entre R_1 e R_2 que permita haver a (20) com $R_2 < R_1$. Esta combinação se pode dar do seguinte modo. Fazendo:

$$r = \frac{R_1}{R_2} = 1 + R_3 \tag{21}$$

com

$$r > 1 \tag{21a}$$

teremos na (20):

$$R_2 + R_1 R_2 > R_1 \tag{22}$$

dividindo por R_2:

$$1 + R_1 > \frac{R_1}{R_2} \tag{22a}$$

Considerando a (21a) vem finalmente:

$$\boxed{R_1 > R_3 .} \tag{22b}$$

Que é a condição para P_s ser negativo.

Vejamos um exemplo:

$$R_3 = 0{,}5$$

$$r = 1 + R_3 = 1 + 0{,}5 = 1{,}5$$

$$R_2 = 0{,}8$$

$$R_1 = 1{,}5\,R_2 = 1{,}5 \times 0{,}8 = 1{,}2$$

Temos que

$$R_1 > R_2$$

Fazendo

$$P_0 = 1.000$$

$$\frac{P_1}{P_0} = 1 + R_1 = 1 + 1{,}2 = 2{,}2$$

$$P_1 = 2{,}2\ P_0 = 2{,}2 \times 1.000 = 2.200$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 1 - R_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

$$P_2 = \frac{P_1}{0{,}2} = \frac{2.200}{0{,}2} = = 11.000$$

$$m = \frac{P_0 P_2}{P_1} = \frac{1.000 \times 11.000}{2.200} = = 5.000$$

Aplicando à equação de P_s:

$$P_s = \frac{P_0 + P_2 - 2\,m}{1 - \frac{m}{P_1}} = \frac{1.000 + 11.000 - 2 \times 5.000}{1 - \frac{5.000}{2.200}}$$

$$P_s = -\ 800$$

Conferindo com a condição (22b).

3 — A CONDIÇÃO DE PASSAGEM

3.1 — *Pesquisa do Método*: a equação logística sob a forma clássica é dada por:

$$P = \frac{P_s}{1 + e^{a-bt}} \qquad (23)$$

e sob a forma normal por:

$$P = N\,P_s \qquad (24)$$

sendo a função normal logística dada por:

$$N = \frac{e^{\varphi}}{\cos h\,\varphi} = \frac{1}{1 + e^{-2\varphi}} \qquad (25)$$

No primeiro caso temos três constantes, para cuja determinação precisamos de três pontos conhecidos. No segundo caso temos uma só constante, mas a sua determinação, usando a *condição de Yule, é feita com o auxílio* da equação:

$$\varphi_n = 2\,\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} \qquad (26)$$

Verifica-se então, que, também neste caso precisamos de três pontos conhecidos. Na (23) os valores de "a" e "b" são dados respectivamente por:

$$a = -\ 2\,\varphi_0 \qquad (27)$$

$$b = 2\,(\varphi_1 - \varphi_0) \qquad (27a)$$

sendo que

$$\varphi_0 = f\,(N_0) = f\left(\frac{P_0}{P_s}\right) \qquad (28)$$

$$\varphi_1 = f\,(N_1) = f\left(\frac{P_1}{P_s}\right) \qquad (28a)$$

Por outro lado, o valor de P_s é função de P_0, P_1 e P_2:

$$P_s = F(P_0, P_1, P_2) \tag{29}$$

Por aí se verifica que, a condição de passagem da curva pelos três pontos dados, pode ser pesquisada mais fàcilmente a partir da expressão de P_s, e não de "a" e "b", pois para êstes dois últimos casos teremos expressões mais complicadas, de função de função.

3.2 — *Demonstração da Condição de Passagem*: uma das formas da expressão de P_s é:

$$P_s = \frac{P_0 + P_2 - 2m}{1 - \dfrac{m}{P_1}} \tag{30}$$

sendo

$$m = \frac{P_0 P_2}{P_1} \tag{31}$$

Sendo P_s a população de saturação, o seu valor prático nunca poderá ser negativo, nulo, infinito, imaginário ou indeterminado:

$$+\infty > P_s > 0 \tag{32}$$

Isto quer dizer que P_s será sempre real, positivo e finito. Então, temos sòmente dois casos a discutir: a) numerador e denominador de (30) simultâneamente positivos; b) idem negativos.

Os casos dos dois se anularem isolada ou simultàneamente leva P_s aos valores nulo, infinito ou indeterminado, o que exclui a possibilidade da curva passar pelos três pontos dados. Veremos mais adiante, que sí os três pontos *pertencerem a uma logística, necessàriamente* estes últimos casos não se verificarão.

3.3 — *Primeiro Caso*: teremos simultâneamente

$$\left\{\begin{array}{ll} P_2 + P_0 - \dfrac{2 P_0 P_2}{P_1} > 0 & (33) \\[2ex] 1 - \dfrac{P_0 P_2}{P_1^2} > 0 & (33a) \end{array}\right.$$

Precisamos demonstrar que, sí esta condição se verificar simultâneamente, *ou melhor, que sí uma das* (33) *ou* (33a) se verificar, a outra deverá se verificar necessàriamente. Si isto acontecer ficará estabelecida uma condição de passagem.

A (33a) pode ser posta sob a forma seguinte:

$$\frac{P_1}{P_0} \times \frac{P_1}{P_2} > 1 \tag{33b}$$

Chamando de

$$\frac{P_1}{P_0} = 1 + R_1 \tag{34}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 1 - R_2 \tag{34a}$$

Como necessàriamente

$$P_1 > P_0 \tag{35}$$

virá

$$\frac{P_1}{P_0} > 1 \tag{36}$$

e então

$$R_1 > 0 \tag{37}$$

Inversamente

$$P_1 < P_2 \tag{38}$$

$$\frac{P_1}{P_2} < 1 \tag{39}$$

de onde se infere que

$$0 < R_2 < 1 \tag{40}$$

Substituindo a (34) e a (34a) na (33b), e operando vem:

$$1 + R_1 - R_2 (1 + R_1) > 1 \tag{41}$$

Ou seja

$$R_1 > R_2 (1 + R_1) \tag{41a}$$

Contudo, observando a (37) verifica-se que:

$$1 + R_1 > 1 \tag{42}$$

e, portanto, em (41a) por maior razão teremos:

$$\boxed{R_1 > R_2} \tag{43}$$

A equação (33) pode ser posta sob a forma:

$$\frac{P_1}{P_0} + \frac{P_1}{P_2} > 2 \tag{44}$$

Substituindo por (34) e (34a) e operando vem finalmente:

$$\boxed{R_1 > R_2} \tag{45}$$

Ora, a (45) é idêntica à (43). Isto mostra que, si o denominador fôr positivo, necessàriamente o numerador também o será.

Por outro lado, voltando a condição (33a), vamos demonstrar que esta condição além de necessária, como vimos acima, também é suficiente, pois sempre que os três pontos equidistantes no tempo pertencerem a curva, a condição

$$\frac{P_0\,P_2}{P_1^2} < 1 \tag{46}$$

se verificará, dando, pois, a suficiência desta condição.

Tomando a equação seguinte, dada no nosso trabalho anterior (ref. 6), e aplicando-a aos três pontos, que são supostos pertencerem a uma logística, teremos:

$$P_0 = \frac{e^{\varphi_0}\,P_s}{2 \cos h\, \varphi_0} \tag{47}$$

$$P_1 = \frac{e^{\varphi_1}\,P_s}{2 \cos h\, \varphi_1} \tag{47a}$$

$$P_2 = \frac{e^{\varphi_2}\,P_s}{2 \cos h\, \varphi_2} \tag{47b}$$

que substituídas no 1.º membro da (46) fornecem:

$$\frac{\cos h\, \varphi_1}{\cos h\, \varphi_0} \times \frac{\cos h\, \varphi_1}{\cos h\, \varphi_2} \times e^{\varphi_0 + \varphi_2 - 2\varphi_1} \tag{48}$$

considerando-se que (ref. 7):

$$2\varphi_1 = \varphi_0 + \varphi_2 \tag{49}$$

será, evidentemente:

$$e^{\varphi_0+\varphi_2-2\varphi_1} = 1 \tag{50}$$

Passando a (48) a ser:

$$\frac{\cos h\, \varphi_1}{\cos h\, \varphi_0} \times \frac{\cos h\, \varphi_1}{\cos h\, \varphi_2} \tag{51}$$

Substituindo os cosenos hiperbólicos pelas suas expressões, e operando, teremos sucessivamente:

$$\frac{\frac{e^{\varphi_1}+e^{-\varphi_1}}{2}}{\frac{e^{\varphi_0}+e^{-\varphi_0}}{2}} \times \frac{\frac{e^{\varphi_1}+e^{-\varphi_1}}{2}}{\frac{e^{\varphi_2}+e^{-\varphi_2}}{2}} = \frac{\frac{e^{2\varphi_1}+e^{-2\varphi_1}}{2}+1}{\frac{e^{\varphi_0+\varphi_2}+e^{-\varphi_0-\varphi_2}}{2}+\frac{e^{\varphi_2-\varphi_0}+e^{-\varphi_2+\varphi_0}}{2}} =$$

$$= \frac{\cos h\,(2\varphi_1)+1}{\cos h\,(\varphi_0+\varphi_2)+\cos h\,(\varphi_2-\varphi_0)} \tag{52}$$

Entretanto:

$$\cos h\,(\varphi_0+\varphi_2) = \cos h\,(2\varphi_1)$$

que substituido em (52) dá:

$$\frac{\cos h\,(2\varphi_1)+1}{\cos h\,(2\varphi_1)+\cos h\,(\varphi_2-\varphi_0)} \tag{53}$$

Dividindo tudo por $\cos h\,(2\varphi_1)$ vem:

$$\frac{1+\frac{1}{\cos h\,(2\varphi_1)}}{1+\frac{\cos h\,(\varphi_2-\varphi_0)}{\cos h\,(2\varphi_1)}} \tag{54}$$

Sendo sempre

$$\cos h\, x \geqq 1 \tag{55}$$

e também

$$\varphi_2 > \varphi_1 > \varphi_0 \tag{56}$$

vem que:

$$\frac{\cos h\,(\varphi_2-\varphi_0)}{\cos h\,(2\varphi_1)} > \frac{1}{\cos h\,(2\varphi_1)} \tag{57}$$

o que torna sempre a expressão (51) menor do que um:

$$\frac{1+\frac{1}{\cos h\,(2\varphi_1)}}{1+\frac{\cos h\,(\varphi_2-\varphi_0)}{\cos h\,(2\varphi_1)}} < 1 \tag{58}$$

Sí esta expressão é sempre menor do que um, necessàriamente a condição (46) se verifica em qualquer caso de três populações equidistantes pertencerem a uma logística.

Importa também saber sí, dadas três populações equidistantes no tempo, e sí fôr satisfeita a condição (33a), estas três populações pertencerão a alguma logística. O contrário é verdade, como vìmos acima. Agora, vamos demonstrar que esta nova proposição também é verdadeira.

Ora, si a condição (33a) é satisfeita por três populações equidistantes no tempo, a condição (33) também o é, como já foi demonstrado; existe, *portanto, um valor de P_s real, positivo e finito.* Como vimos em 1.4 o que define uma curva logística é a constante de primeira espécie P_s. Existindo pois P_s, sem dúvida alguma existe alguma curva logística correspondente às três populações dadas. Tomemos agora uma população qualquer P_n menor do que P_s. Tôdas as populações iguais ou menores do que P_s poderão ou não coincidir com esta logística, dependendo dos valores correspondentes de "t". Tendo-se P_n basta determinar o valor correspondente de φ_n, e o par P_n, φ_n definirá um ponto, e só um, da curva logística. Isto se dá necessàriamente porque a função logística é uma função definida e unívoca para todo o campo real de variação da variável φ. Estendendo êste raciocínio para n igual a 0, 1 e 2, teremos P_0, P_1 e P_2 com os seus pontos correspondentes na curva logística. *Mas, isto tudo não é suficiente* para que haja esta coincidência dos três pontos na curva logística, pois será necessário que os três pontos satisfaçam igualmente as relações entre φ_0, φ_1 e φ_2, quando êles são equidistantes no tempo. Os valores de φ serão determinados a partir da equação (1). Determinado N nesta equação entra-se na equação:

$$\varphi = -\frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1}{N} - 1\right) \qquad (59a)$$

e determina-se o valor correspondente de φ. Fazendo-se isso para as três populações P_0, P_1 e P_2, que ainda não sabemos si pertencem ou não a uma logística, teremos os três valores de φ, ou seja φ_0, φ_1 e φ_2. Sí êstes valores satisfizerem a condição:

$$\varphi_2 = 2\,\varphi_1 - \varphi_0 \qquad (59b)$$

que é a condição de equidistância no tempo, derivada da condição de Yule, estará provado que as três populações pertencem à logística definida por estas três populações. Tomando-se a equação (30):

$$P_s = \frac{P_0 + P_2 - 2\,m}{1 - \frac{m}{P_1}} \qquad (59c)$$

na qual está satisfeita a condição do denominador ser positivo, substituindo os valores de P_0, P_1 e P_2 dados pela equação (1), e isolando N_2 teremos imediatamente:

$$N_2 = \frac{\frac{N_1}{N_0} - N_1}{\frac{1}{N_1} + \frac{N_1}{N_0} - 2} \qquad (59d)$$

Substituindo os valores de N_0, N_1 e N_2 pelos seus valores correspondentes da função normal logística dados na segunda equação (25) teremos:

$$\frac{1}{1 + e^{-2\varphi_2}} = \frac{\frac{1 + e^{-2\varphi_0}}{1 + e^{-2\varphi_1}} - \frac{1}{1 + e^{-2\varphi_1}}}{1 + e^{-2\varphi_1} + \frac{1 + e^{-2\varphi_0}}{1 + e^{-2\varphi_1}} - 2} \qquad (59e)$$

Operando chegaremos a:

$$e^{-2\varphi_2} = e^{-2(\varphi_1 - \varphi_0)} \qquad (59f)$$

Da qual se tira imediatamente, pela igualdade dos expoentes:

$$\varphi_2 = 2\,\varphi_1 - \varphi_0 \qquad (59g)$$

que é a mesma condição dada em (59b). Dêste modo, fica provado que a condição (46), e portanto a (33a), é necessária e suficiente para que as três populações equidistantes no tempo P_o, P_1 e P_2 pertençam à logística definida por P_s. Assim, poderemos então dizer que "si a condição:

$$\frac{P_o P_2}{P_1^2} < 1$$

fôr satisfeita com $P_o < P_1 < P_2$ as três populações pertencem a uma logística, e si as três populações pertencerem a uma logística aquela condição será satisfeita necessàriamente".

3.4 — *Segundo Caso*: no segundo caso, isto é, em que o numerador e o denominador da (33) sejam simultâneamente negativos, prova-se fàcilmente que sí acontecer de:

$$P_o + P_2 - 2m < 0 \qquad (59h)$$

será sempre

$$1 - \frac{P_o P_2}{P_1^2} < 0 \qquad (59i)$$

Sí, porém

$$1 - \frac{P_o P_2}{P_1^2} < 0 \qquad (59j)$$

nem sempre será

$$P_o + P_2 - 2m < 0 \qquad (59k)$$

de modo que neste caso pode acontecer de P_s ser negativo, o que não tem significado material, como já vimos.

Mas, como demonstramos acima, será sempre, para três pontos pertencentes a uma logística:

$$1 - \frac{P_o P_2}{P_1^2} > 0 \qquad (60)$$

de modo que, a segunda hipótese não se verificará nunca para três pontos pertencentes à uma logística.

Então, "a condição necessária e suficiente, para que três populações equidistantes no tempo pertençam a uma curva logística, é que seja satisfeita a condição

$$\frac{P_o P_2}{P_1^2} < 1 \qquad (61)$$

Chamando de:

$$m = \frac{P_o P_2}{P_1} \qquad (62)$$

a condição acima pode ser expressa simplesmente por:

$$\boxed{m < P_1} \qquad (63)$$

4 — CONSIDERAÇÕES EM TÔRNO DAS CONSTANTES "a" e "b"

4.1 — *Discussão Sôbre os Valores de "a"*: a constante "a" da equação clássica logística nada tem a ver com a curva normal logística, podendo subsistir esta independentemente de quaisquer considerações sôbre "a". A sua existência, contudo, é fundamental para se localizar na curva logística, o trecho que é ocupado pelo crescimento populacional em estudo na época em consideração. É porisso que, numa mesma curva logística, se pode ter diferentes valores de "a".

Sendo o valor de "a" dado por:

$$a = -2\varphi_0 \tag{64}$$

conclui-se imediatamente que o valor de "a" depende da população P_0, ou seja, a menor população das três populações conhecidas e equidistantes no tempo, para um determinado valor de P_s. Pois, sendo:

$$\varphi_0 = f(N_0) = f\left(\frac{P_0}{P_s}\right) \tag{65}$$

será evidentemente:

$$a = -2f\left(\frac{P_0}{P_s}\right) \tag{66}$$

Agora poderemos discutir os valores que "a" pode assumir dentro do intervalo de variação de φ.

a) para

$$\varphi_0 = -\infty \tag{67}$$

virá

$$a = +\infty \tag{68}$$

b) para

$$-\infty < \varphi_0 < 0 \tag{69}$$

virá

$$a > 0 \tag{70}$$

isto é, "a" é positivo.

c) para

$$\varphi_0 = 0 \tag{71}$$

teremos necessàriamente

$$a = 0 \tag{72}$$

isto é, "a" é nulo.

d) para

$$\varphi_0 > 0 \tag{73}$$

virá

$$a < 0 \tag{74}$$

sendo, pois, negativo.

e) para

$$\varphi_0 = +\infty \tag{75}$$

virá

$$a = -\infty \tag{76}$$

Os valores de "a" são função linear de φ_0. Assim, poderemos fazer uma curva de "a" em função de φ_0, que é uma reta passando pela origem, com coeficiente angular de valor negativo e igual a — 2, tal como consta da Fig. 1.

Dêste modo verifica-se que "a" pode tomar todos os valores do campo real.

Verifica-se também que, quanto mais P_0 estiver próximo de zero, tanto maior será o valor de "a". No ponto de inflexão da curva logística "a" assume um valor nulo. E, quanto mais próximo P_0 estiver da população de saturação tanto menor será o valor de "a".

Assim, com uma simples inspeção do valor de "a" se pode ter uma idéia da posição de P_0 na curva logística.

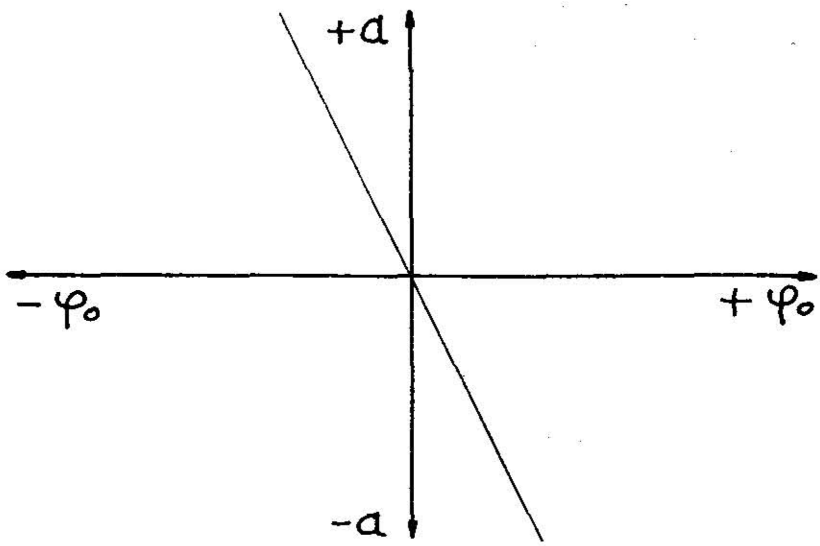

FIG. 1

VARIAÇÃO DE "a" EM FUNÇÃO DE φ_0

4.2 — *Discussão Sôbre "b"*: considerando-se a equação (39) do nosso trabalho anterior (ref. 8):

$$\varphi_n = \frac{b}{2} + \varphi_{n-1} \tag{77}$$

e fazendo n = 1 vem:

$$b = 2(\varphi_1 - \varphi_0) \tag{78}$$

Por esta equação verifica-se que a posição de "b" depende dos valores de P_0 e de P_1, para um determinado valor de P_s.

Ora, já sabemos que sempre:

$$\varphi_1 > \varphi_0 \tag{79}$$

Neste caso, temos a considerar as relações entre φ_1 e φ_0 em cada ramo (esquerdo e direito) da curva logística.

a — ramo esquerdo: neste ramo φ_0 será sempre maior do que φ_1 em valor absoluto:

$$|\varphi_0| > |\varphi_1| \tag{80}$$

mas sempre

$$\varphi_0 < 0 \tag{81}$$

$$\varphi_1 < 0 \tag{81a}$$

Assim, no ramo esquerdo, ou seja, antes do ponto de inflexão os valores de "b" serão sempre positivos:

$$b > 0 \tag{82}$$

Neste caso "b" será tanto menor quanto mais próximo estiver φ_1 de φ_0.

No caso de $P_1 = P_s/2$ será $\varphi_1 = 0$, e então

$$\varphi_0 < 0 \tag{83}$$

O valor de "b" ainda será positivo e igual a:

$$b = a = -2\varphi_0 \tag{84}$$

e, portanto igual a constante "a".

Sí $\varphi_0 = 0$ será $\varphi_1 > 0$, e então:

$$b = 2\varphi_1 \tag{85}$$

b — *ramo direito*: neste caso teremos sempre:

$$\varphi_0 > 0 \tag{86}$$

$$\varphi_1 > 0 \tag{86a}$$

mas sempre

$$\varphi_1 > \varphi_0 \tag{87}$$

dando sempre um valor positivo para "b":

$$b > 0 \tag{88}$$

Assim, concluimos que, para qualquer posição que ocupem P_0 e P_1 na curva logística, o valor de "b" será sempre positivo, dentro da condição de Yule.

4.3 — *Limites Práticos de "a" e "b"*: na prática o campo de variação de "a" fica restrito a dois valores extremos relativamente próximos.

Admitindo os valores extremos de P_0 como de 5% e 95% da população de saturação, teremos:

$$P_{0\,min} = 0{,}05\,P_s \tag{89}$$

$$P_{0\,max} = 0{,}95\,P_s \tag{89a}$$

teremos evidentemente:

$$N_{0\,min} = \frac{P_{0\,min}}{P_s} = 0{,}05 \tag{90}$$

$$N_{0\,max} = \frac{P_{0\,max}}{P_s} = 0{,}95 \tag{90a}$$

Entrando com estes valores dados na tabela da função normal logística (ref. 9) teremos para φ_0:

$$\varphi_{0\,min} = -1{,}47 \tag{91}$$

$$\varphi_{0\,max} = +1{,}47 \tag{91a}$$

E, então os valores limites de "a" serão:

$$a_{min} = -2\,(-1{,}47) = 2{,}94 \tag{92}$$

$$a_{max} = -2\,(+1{,}47) = -2{,}94 \tag{92a}$$

Dêste modo, não se deve esperar encontrar na prática valores de "a" fora dos limites acima. Deve-se, aliás, para o nosso Estado esperar valores sempre positivos para "a", pois as populações conhecidas estão geralmente no ramo esquerdo da curva.

Por outro lado, sendo "b" dado pela (78) vemos que os seus valores máximo e mínimo dependerão das relações entre φ_1 e φ_0. Chamando de

$$\rho = \frac{\varphi_1}{\varphi_0} \tag{93}$$

virá em (55):

$$b = 2\,\varphi_0\,(\rho - 1) \tag{94}$$

No ramo esquerdo será sempre $\rho < 1$, e "b" será tanto maior quanto menor fôr ρ, ou seja quanto maior fôr o afastamento entre φ_1 e φ_0. No caso de $\varphi_0 = \varphi_{0\,min}$, e $\varphi_1 = 0$, isto é, quando P_1 cair no ponto de inflexão, o valor de "b" será um máximo, e então

$$b = a_{min} = -2\,\varphi_{0\,min} = 2{,}94 \tag{95}$$

pois $\rho = 0$.

Sí $\varphi_1 = 0$ e φ_0 ir aproximando-se de φ_1 o valor de "b" irá diminuindo.

Entretanto, o caso da equação (95) dificilmente acontecerá na prática, pois as populações P_0 e P_1 estariam afastadíssimas no tempo. Neste caso a população P_2 deveria cair no valor $\varphi_2 = \varphi_{0\,max}$, e as populações extremas conhecidas P_0 e P_2 seriam respectivamente 5% e 95% da população de saturação, englobando um intervalo de 90% da população de saturação.

Ora, êste seria o caso de uma cidade muito antiga, pràticamente no fim do seu crescimento, de cujas populações P_0 e P_1, si consideradas como populações iniciais, não se tem geralmente dados precisos.

No caso de $\varphi_0 = \varphi_{0\,min}$ e $\varphi_1 > 0$, a população P_0 seria 5% da população de saturação e P_1 estaria no ramo direito da curva logística. Neste caso P_2 iria além de 95% da saturação, caso mais difícil de acontecer do que o anterior.

Assim, pode-se concluir que, na prática, deve-se esperar para "b" valores sempre menores do que o dado pela equação (95), ou seja, valores menores do que 2,94. Deve-se, aliás, esperar no nosso Estado, valores bem menores do que êste, pois, geralmente, aqui, as populações P_0, P_1 e P_2 estão sempre no ramo esquerdo da curva logística.

5 — SÔBRE ALGUNS VALORES PARTICULARES DAS POPULAÇÕES P_0, P_1 e P_2

5.1 — *Casos Particulares Importantes*: a coincidência de qualquer uma das três populações dadas, no ponto de inflexão, levou-nos inicialmente a pensar que a condição de Yule trazia alguns casos de inaplicabilidade dêste método. Verificamos tal não ser verdade, e aquí vai um estudo detalhado do assunto.

Três casos são possíveis:

a — população conhecida P_0 coincidente com o ponto de inflexão;
b — idem para P_1 ;
c — ibidem para P_2.

5.2 — *Coincidência de* P_0 : já vimos que no ponto de inflexão a população é metade da população de saturação:

$$P_i = \frac{P_s}{2} \qquad (96)$$

Aplicando-se à êste ponto a população P_s teremos na equação (45a) do nosso trabalho anterior (ref. 10):

$$\frac{P_s}{P_2} - 1 = \frac{\left(\frac{P_s}{P_1} - 1\right)^2}{\frac{P_s}{P_0} - 1} \qquad (97)$$

a seguinte expressão:

$$\frac{P_s}{P_2} - 1 = \left(\frac{P_s}{P_1} - 1\right)^2 \qquad (97a)$$

Desenvolvendo esta equação e ordenando o polinômio em relação a P_s vem:

$$P_s^2 - P_s\left(\frac{P_1^2}{P_2} + 2P_1\right) + 2P_1^2 = 0 \qquad (98)$$

Resolvendo esta equação do 2.º gráu em relação a P_s teremos:

$$P_s = \frac{P_1^2}{2P_2} + P_1 \pm P_1\sqrt{\left(\frac{P_1}{2P_2} + 1\right)^2 - 2} \qquad (99)$$

Para que P_s não seja imaginário, o que seria um absurdo, impõe-se que:

$$\left(\frac{P_1}{2P_2} + 1\right)^2 \geq 2 \qquad (100)$$

ou seja

$$P_1 \geqq 2P_2(\sqrt{2} - 1) \qquad (100a)$$

e, finalmente:

$$\boxed{P_1 \geqq 0{,}83\,P_2} \qquad (101)$$

Que é uma condição importante. Sí P_1 fôr menor do que 0,83 P_2 o valor de P_s será imaginário, não sendo possível aplicar à logística as duas populações conhecidas, P_1 e P_2.

Por outro lado, neste caso em que $P_0 = P_i$, a constante "a" toma um valor crítico, tornando-se nula. Sendo "a" dada por:

$$a = -2\varphi_0 \qquad (102)$$

no ponto de inflexão a variável anula-se, e então:

$$a = 0 \qquad (102a)$$

tomando a equação clássica de Verhulst a seguinte forma:

$$P = \frac{P_s}{1 + e^{-bt}} \qquad (103)$$

Por outro lado, sendo:

$$2\varphi_1 = b\,t_1 - a$$

e considerando que $t_1 = 1$ (condição de Yule), e $a = 0$, vem que:

$$\boxed{b = \frac{\varphi_1}{2}} \qquad (103a)$$

A condição (101) liga P_1 a P_2, e é uma condição para que P_s seja real. Entretanto, ainda existe uma outra condição importante, que inclui aquela e liga P_0 a P_1. Tomando-se a equação (46) (ref. 1), e sendo, neste caso particular $P_s = 2P_0$, teremos:

$$P_s = 2P_0 = \frac{P_1^2 P_2 + P_0 P_1^2 - 2P_0 P_1 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2}$$

Desenvolvendo e isolando P_2, vem

$$P_2 = \frac{P_0\,P_1^2}{P_1^2 + 2\,P_0^2 - 2\,P_0\,P_1}$$

Levando P_2 à condição (101) teremos finalmente:

$$\boxed{2\frac{P_0}{P_1} + \frac{P_1}{P_0} \gtreqless 2{,}83} \qquad (103b)$$

Do mesmo modo como está demonstrado em 5.4, na equação (117) e na desigualdade (118), também neste caso prova-se que, uma vez satisfeita a condição (101), o valor de P_s na (99) é sempre positivo.

5.3 — *Coincidência de P_1*: neste caso fazendo-se:

$$P_1 = P_i = \frac{P_s}{2} \qquad (104)$$

virá em (97):

$$\frac{P_s}{P_2} - 1 = \frac{1}{\dfrac{P_s}{P_0} - 1} \qquad (105)$$

Desenvolvendo:

$$\frac{P_s}{P_0\,P_2} = \frac{1}{P_0} + \frac{1}{P_2} \qquad (105a)$$

e, finalmente:

$$\boxed{P_s = P_0 + P_2} \qquad (106)$$

Por outro lado, substituindo P_s de (106) pelo seu valor de (104) virá:

$$\boxed{P_1 = \frac{P_0 + P_2}{2}} \qquad (107)$$

que é a condição necessária e suficiente para que P_1 coincida com o ponto de inflexão.

Caindo P_1 no ponto de inflexão teremos necessàriamente:

$$\varphi_1 = 0 \tag{108}$$

que levado a equação (49) fornece:

$$\varphi_2 = -\varphi_0 \tag{109}$$

Levando estas condições à (78), e considerando a (102) vem:

$$\boxed{b = a} \tag{110}$$

Tomando-se agora a equação (53) (ref. 1), e considerando-se a equação (103) verifica-se que:

$$a = \log_e \left(2 \frac{P_1}{P_0} - 1\right) \tag{110}$$

Neste caso particular o valor de "a" pode ser achado independentemente do valor de P_s, e sòmente em função das duas populações conhecidas P_0 e P_1.

5.4 — *Coincidência de P_2*: neste caso, fazendo-se:

$$P_2 = P_i = \frac{P_s}{2} \tag{112}$$

e substituindo-se na (97) virá:

$$\frac{P_s}{P_0} - 1 = \left(\frac{P_s}{P_1} - 1\right)^2 \tag{113}$$

Desenvolvendo e ordenando o polinômio em relação a P_s:

$$P_s^2 - P_s\left(\frac{P_1^2}{P_0} + 2P_1\right) + 2P_1^2 = 0 \tag{113a}$$

Resolvendo esta equação em relação a P_s teremos:

$$P_s = \frac{P_1^2}{2P_0} + P_1 \pm P_1 \sqrt{\left(\frac{P_1}{2P_0} + 1\right)^2 - 2} \tag{114}$$

Neste caso o valor de P_s nunca poderá ser imaginário, pois o radical é sempre real. Sendo $P_1 > P_0$, a sua relação P_1/P_0 será sempre maior do que um. No caso limite, de P_1 se tornar igual a P_0, teremos:

$$\lim_{P_1 \to P_0} \left(\frac{P_1}{2P_0} + 1\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = 2{,}25 \tag{115}$$

tornando-se o radical real. Êste seria o caso mais desfavorável, e sem significado prático. Nos casos práticos teremos então sempre:

$$\sqrt{\left(\frac{P_1}{2P_0} + 1\right)^2 - 2} > 0 \tag{116}$$

e, portanto, P_s sempre real, neste caso.

Por outro lado, P_s será sempre positivo neste caso. Tomando-se a (114) teremos:

$$P_s = P_1 \left[\left(\frac{P_1}{2P_0} + 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{P_1}{2P_0} + 1\right)^2 - 2}\,\right] \tag{117}$$

Ora, a desigualdade seguinte subsiste sempre:

$$\frac{P_1}{2P_0} + 1 > \sqrt{\left(\frac{P_1}{2P_0} + 1\right)^2 - 2} \tag{118}$$

por causa do valor negativo de dois sob o radical. Assim, podemos concluir que para o *terceiro caso* P_s será sempre real e positivo.

Considerando que $\varphi_2 = 0$, teremos na equação (59b)

$$2\varphi_1 = \varphi_0 \tag{119}$$

que substituído em (27a) fornece:

$$b = 2(\varphi_1 - \varphi_0) = -\varphi_0 \tag{120}$$

Sabendo-se que $a = -2\varphi_0$, e considerando a (120) virá imediatamente:

$$a = 2b \tag{121}$$

BIBLIOGRAFIA

(1) — J. C. Dias de Moraes, "A Normal Logística", Revista do D.A.E., n.º 26 (Set.º de 1955), S. Paulo.
(2) — id., pg. 65.
(3) — ib., eq. (8), pg. 58.
(4) — ib., eq. (33), pg. 61.
(5) — ib., eq. (31), pg. 61.
(6) — ib., eq. (7), pg. 58.
(7) — ib., eq. (39b), pg. 63.
(8) — ib., pg. 63.
(9) — ib., pg. 69 e 72.
(10) — ib., pg. 64.

SUMÁRIO

O Autor faz várias considerações sôbre as propriedades da função logística, discutindo questões sôbre a população de saturação, fazendo uma demonstração original e geral da condição de passagem da curva por três populações conhecidas e equidistantes no tempo, mostrando e discutindo a função e as propriedades das três constantes da equação clássica de Verhulst, e analisando alguns casos particulares de coincidência das três populações conhecidas com o ponto de inflexão da curva logística.

SUMMARY

The Author does considerations about the logistic function properties, discussing questions on the population of saturation, doing an original and general demonstration of the passing condition of the curve by three known and time equidistant populations, showing and discussing the role and properties of the three constants of the classic equation of Verhulst, and analysing some particular cases of coincidence of the three known populations on the inflexion point.

ERRATA do trabalho "A Normal Logística", do mesmo autor, publicado nesta Revista, N.º 26, Setembro, 1955.

Página	*Linha*	*Onde se lê*	*Leia-se*
61	14	t_1 corresponde a	t_1 correspondente a
63	14	a equação (40) é	$\varphi_{n-1} = \dfrac{\varphi_n + 2\varphi_1}{t_2}$
65	3	a equação (55) é	$b = \dfrac{a + 2\varphi_1}{t_1}$
65	6	a equação (56) é	$b = \log_e\left(\dfrac{P_s}{P_0} - 1\right) - \log_e\left(\dfrac{P_s}{P_1} - 1\right)$
65	suprimir êste parágrafo (1.12)		——
65	16	$P_1 < m$	$P_1 > m$
66	15	salecionamos	selecionamos
67	9	$\varphi_1 = 0{,}915$	$\varphi_1 = -0{,}915$