OPERADORES VETORIAIS

Eng. NASSIM NADRUZ

da Repartição de Águas e Esgôtos

Em artigo anterior (*) vimos que o quociente vetorial de dois vetores era uma expressão de forma

$$\frac{B}{A} = \frac{A \, . \, B}{A^2} + \frac{A \wedge B \wedge}{A^2} \qquad (1)$$

e démos a esta expressão o nome de operador vetorial. Vimos também que esta expressão aplicada. ao vetor A dava como resultado o vetor B.

Generalizando o conceito chamamos operador vetorial a tôda expressão que aplicada a um vetor dá como resultado outro vetor. E' pois óbvio que há um número infinito de operadores vetoriais.

Dêsses operadores vetoriais vamos considerar apenas os operadores lineares, mais adiante definidos.

Para efeito de exposição chamemos α, a um operador vetorial e a, b, c, u, v e w a vetores quaisquer e m um escalar.

OPERADOR

Sendo α um operador e u um vetor resulta por definição de operador

$$\alpha u = v \qquad (2)$$

ou seja, o operador α aplicado ao vetor u dá como resultado o vetor v.

A expressão αu é um vetor que depende simultâneamente do operador α e do vetor u.

OPERADOR LINEAR

Dizemos que o operador α é linear quando êle goza das duas seguintes propriedades:

$$\alpha (m u) = m \alpha u \qquad (3)$$

e

$$\alpha (u + v) = \alpha u + \alpha v . \qquad (4)$$

As expressões 3 e 4 definem pois um operador linear.

DIREÇÃO NULA

Quando $\alpha u = 0$ diz-se que o vetor u é a direção nula do operador α.

EXPRESSÃO DE CORRESPONDÊNCIA

Ora, podendo um vetor qualquer do espaço ser expresso em função de um têrno qualquer de vetores, não coplanares, a, b e c, resulta que um operador linear α fica perfeitamente caracterizado quando, dado êste têrno, se conhecem os três vetores resultantes αa, αb e αc.

(*) — V. Revista Mackenzie N.º 122.

E neste caso se exprime o operador α com a notação abaixo, chamado expressão de correspondência.

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

No caso de ser $\alpha i = u$, $\alpha j = v$ e $\alpha k = w$ resulta a expressão de correspondência

$$\alpha = \begin{vmatrix} u & v & w \\ i & j & k \end{vmatrix} \tag{5}$$

CARACTERIZAÇÃO DO OPERADOR

Apliquemos agora o operador α de expressão de correspondência 5, a um vetor X definido por:

$$X = a_1 i + b_1 j + c_1 k.$$

Em que a_1, b_1, c_1, são escalares.

Teremos, operando com α a esquerda de ambos os membros da expressão do vetor acima e aplicando as propriedades definidas por (4) e (3) e a expressão de correspondência 5:

$$\alpha X = \alpha (a_1, i + b_1 j + c_1 k) = \alpha a_1 i + \alpha b_1 j + \alpha c_1 k =$$
$$= a_1 \alpha i + b_1 \alpha j + c_1 \alpha k = a_1 u + b_1 v + c_1 w.$$

Dados pois o vetor X e a expressão de correspondência do operador α o vetor αX fica perfeitamente determinado.

PRODUTOS DE OPERADORES

a) produto de dois operadores.

Sendo α e β dois operadores lineares, a expressão $\beta\alpha$ é chamada produto dêsses operadores e têm por definição o seguinte:

$$\beta \alpha u = \beta (\alpha u) = \beta v = w \tag{6}$$

em que

$$\alpha u = v.$$

Da definição 6 resulta que o produto de dois operadores lineares é também um operador linear pois satisfaz as equações 3 e 4.

$$\beta \alpha (m u) = \beta (\alpha m u) = \beta (m \alpha u) = m \beta \alpha u$$

e

$$\beta \alpha (u + v) = \beta [\alpha (u + v)] = \beta [\alpha u + \alpha v] = \beta \alpha u + \beta \alpha v.$$

APLICAÇÃO

No caso dos operadores quocientes resultam as expressões fàcilmente deduzíveis.

$$\frac{C}{D} = C \frac{I}{D} = \frac{CD}{D^2}$$

$$CD = C \frac{I}{\frac{I}{D}} = D^2 \frac{C}{D}$$

$$\left(\frac{D}{C}\right) C = D$$

$$C D \frac{I}{D} = C$$

$$(C D) D = D^2 C$$

$$(A B) C = C (A B)$$

$$(A B) \frac{I}{C} = \frac{I}{C^2} (A B) C$$

$$(A B) \frac{I}{A} = \frac{I}{A^2} [A B] = 2\left(\frac{A \,.\, B}{A^2}\right) - B.$$

b) produtos de n operadores.

Sendo $\alpha \beta$ e γ três operadores, o produto $\gamma \beta \gamma$ aplicado a um vetor u é por definição:

$$\gamma \beta \alpha u = \gamma \beta (\alpha u) = \gamma \beta v = \gamma (\beta v) = \gamma w$$

em que

$$\alpha u = v \qquad \beta v = w.$$

No caso de n fatôres iguais escreve-se

$$\alpha^n u = \alpha \alpha \alpha \cdots \alpha u.$$

EXEMPLOS

$$\alpha^3 u = \alpha \alpha (\alpha u) = \alpha (\alpha v) = \alpha w$$

em que

$$\alpha u = v \text{ e } \alpha v = w.$$

SOMA E DIFERENÇA DE OPERADORES

A soma ou a diferença entre dois operadores é um operador assim definido:

$$(\alpha \pm \beta) u = \alpha u \pm \beta u.$$

O operador quociente é a soma de um número real m e um axial $C \wedge$ como a seguir veremos:

OPERADOR q

Para facilidade de cálculo façamos na expressão (1) do quociente vetorial

$$A \,.\, B = \theta \qquad \text{e} \qquad A \wedge B = C \qquad \text{e} \qquad \frac{B}{A} = q$$

e teremos como resultado

$$q = \frac{\theta + C \wedge}{A^2} \tag{7}$$

que é a fórmula do operador quociente em que $\frac{\theta}{A^2}$ é um escalar e $\frac{C}{A^2}$ um vetor.

INVERSO DE UM OPERADOR

O operador α aplicado a um vetor a dá como resultado um vetor b.

$$\alpha a = b.$$

Dados o operador α e o vetor b é as vêzes possível determinar um operador tal que aplicado ao vetor b nos dê o vetor primitivo a. Êste operador é chamado inverso de α e é representado pela notação α^{-1}

$$\alpha^{-1}(b) = a$$

ou

$$\alpha^{-1}\alpha a = a$$

$$\alpha^{-1}\alpha = 1.$$

A equação acima define pois o operador inverso.

INVERSO DO OPERADOR QUOCIENTE

Evidentemente o inverso do operador $\frac{B}{A}$ não é o operador $\frac{A}{B}$ como podia parecer a primeira vista, isto é:

$$\left(\frac{A}{B}\right)\left(\frac{B}{A}\right) \neq 1.$$

Para a determinação do inverso do operador $\frac{B}{A}$ é necessário travarmos conhecimento com outros operadores e assim bem como das operações entre êles efetuadas.

OPERADORES LINEARES SIMPLES

Os operadores lineares que nos interessam na determinação do operador inverso são os três seguintes operadores chamados simples, o operador m (OMOTETIA), o operador $C \wedge$, (axial) e o operador *H (a, b) chamado diade.*

Vamos vêr as propriedades de cada um de per-sí.

OPERADOR m

Sendo m um número, aplicar êsse operador a um vetor é apenas multiplicar o módulo dêsse vetor por m. Esta operação já é conhecida do cálculo vetorial.

Temos

$m a = m\,|a|\,\hat{a}$ em que $\hat{a}$ é o versor de a. Êsse operador é distribuitivo em *relação a soma e comutativo em* relação ao produto.

$$m(a + b) = ma + mb$$

$$m(ca) = mca = cma$$

vê-se *assim* que o *operador m é linear.*

OPERADOR AXIAL $C \wedge$

Êsse operador aplicado a um vetor a dá como resultado o vetor $C \wedge a$ multiplicação vetorial) já definido pelo cálculo vetorial.

O operador axial é distribuitivo em relação a soma e comutativo em relação ao produto *por* um *número.*

$$c \wedge (a + b) = c \wedge a + c \wedge b$$

$$c \wedge (ma) = mc \wedge a$$

vê-se *assim que o operador* axial é linear.

OPERADOR H DIADE

Chama-se diade, e é representado pelo símbolo H (a, b) em que a e b são dois vetores quaisquer, um operador que aplicado a um vetor u dá como resultado o vetor definido por:

$$H(a, b)\, u = (a \,.\, u)\, b\,.$$

Os vetores a e b são chamados os vetores do diade.

Evidentemente se o vetor u fôr normal ao vetor a, então o vetor resultante H u é nulo.

$$H(a, b)\, u = (a \,.\, u)\, b = 0$$

vê-se assim que u é a direção nula do operador H. O diade transforma pois *todos os vetores em vetores paralelos ao vetor b*, com excessão dos vetores normais ao vetor a que são transformados em vetores nulos.

Sendo evidentemente as relações:

$$n\, H(a, b) = H(n\, a, b) = H(a, n\, b)$$

e

$$H(a, b)\,(u + v) = H(a, b)\, u + H(a, b)\, v$$

vê-se que o operador H é linear em relação a cada um dos dois vetores que o determinam.

APLICAÇÃO

São evidentes as seguintes relações.

$$H(a, b)\, u = (a \,.\, u)\, b \text{ definição de diade}$$

$$H(c, b)\, a \wedge b = [c \,.\, a \wedge b]\, b = [c\, a\, b]\, b$$

$$H(i, j)\, j = (i \,.\, j)\, j = 0$$

$$H(i, j)\, i = j$$

$$H[a + c, b] = H(a, b) + H(c, b)\,.$$

COMPOSIÇÃO DO OPERADOR q

Do que ficou exposto se conclue que o operador quociente (7) é a soma dos operadores simples a omotetia e o axial.

$$q = m + c \wedge .$$

OPERAÇÃO ENTRE OPERADORES

a) Invariantes de um operador.

Sendo dados os vetores u, v e w vamos exprimí-los em função de outros três vetores a, b e c não coplanares.

Temos pois $a \wedge b \,.\, c \neq 0$.

Podemos escrever

$$u = u_1 a + u_2 b + u_3 c$$

$$v = v_1 a + v_2 b + v_3 c$$

$$w = w_1 a + w_2 b + w_3 c$$

em que u_1, u_2, u_3, v_1, v_2 etc. são escalares determinados.

Efetuando o produto misto dos três vetores anteriores teremos:

$$u \wedge v \, . \, w = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} a \wedge b \, . \, c = D \, a \wedge b \, . \, c \qquad (8)$$

em que D é o determinante acima indicado.

Sendo α um operador, aplicado α aos vetores u, v e w resultarão aos vetores abaixo indicados

$$\alpha u = u_1 \alpha a + u_2 \alpha b + u_3 \alpha c$$

$$\alpha v = v_1 \alpha a + v_2 \alpha b + v_3 \alpha c$$

$$\alpha w = w_1 \alpha a + w_2 \alpha b + w_3 \alpha c \, .$$

Efetuando o produto misto dêsses vetores resulta

$$\alpha u \triangle \alpha v \, . \, \alpha w = D \alpha a \triangle \alpha b \, . \, \alpha c \, . \qquad (9)$$

Dividindo (9) por 8 resulta a relação

$$\frac{\alpha u \wedge \alpha v \, . \, \alpha w}{u \wedge v \, . \, w} = \frac{\alpha a \wedge \alpha b \, . \, \alpha c}{a \wedge b \, . \, c} = I_3 \alpha \qquad (10)$$

em que $I_3 \alpha$ é uma relação independente dos dois têrnos de vetores (u, v . w) e (a b c) mas sòmente dependente de α. A relação $I_3 \alpha$ que é uma constante para cada α se chama *terceiro invariante* de α.

TERCEIRO INVARIANTE

Podemos pois escrever

$$I_3 \alpha = \frac{\alpha a \wedge \alpha b \, . \, \alpha c}{a \wedge b \, . \, c} \, . \qquad (11)$$

A expressão $I_3 \alpha$ é pois um operador que aplicado a um operador α dá o seu terceiro invariante.

E' pois uma operação realisada entre operadores.

TERCEIRO INVARIANTE NULO

No caso de $\alpha a \wedge \alpha b \, . \, \alpha c = 0$, *o terceiro invariante é nulo e se escreve:*

$$I_3 \alpha = 0$$

veremos mais tarde que a condição para que um operador α admita um operador inverso α^{-1} é que $I_3 \alpha \neq 0$.

OUTROS INVARIANTES

Já vimos que sendo X um número e α um operador a diferença $\alpha - X$ é um operador. Façamos nulos o terceiro invariante dêsse operador.

Isto é

$$I_3 \; (\alpha - X) = 0 \, .$$

Aplicando a expressão 11 e desenvolvendo resulta a expressão de terceira ordem em x.

$$X^3 - \frac{a \wedge \alpha b \cdot c + a \wedge b \cdot \alpha c + \alpha a \wedge b \cdot c}{a \wedge b \cdot c} X^2 +$$

$$+ \frac{\alpha a \wedge \alpha b \cdot c + \alpha a \wedge b \cdot \alpha c + a \wedge \alpha b \cdot \alpha c}{a \wedge b \cdot c} X^1 -$$

$$- \frac{\alpha a \wedge \alpha b \cdot \alpha c}{a \wedge b \cdot c} = 0$$

que pode ser escrito sob a forma

$$X^3 - I_1 \alpha X^2 + I_2 \alpha X - I_3 \alpha = 0$$

em que

$$I_1 \alpha = \frac{a \wedge \alpha b \cdot c + a \wedge b \cdot \alpha c + \alpha a \wedge b \cdot c}{a \wedge b \cdot c} \qquad (12)$$

$$I_2 \alpha = \frac{\alpha a \wedge \alpha b \cdot c + \alpha a \wedge b \cdot \alpha c + a \wedge \alpha b \cdot \alpha c}{a \wedge b \cdot c} \qquad (13)$$

As expressões $I_1 \alpha$ e $I_2 \alpha$ são chamados respectivamente primeiro invariante e segundo invariante de α.

OS TRÊS INVARIANTES EXPRESSOS EM FUNÇÃO DO TÊRNO i, J, k

No caso dos vetores a, b, e c se reduzem a i, j e k, as expressões dos três invariantes se tornam

$$\left.\begin{aligned} I_1 \alpha &= \alpha i . i + \alpha j . j + \alpha k . k \\ I_2 \alpha &= \alpha i \wedge \alpha j . k + \alpha j \wedge \alpha k . i + \alpha k \wedge \alpha i . j \\ I_3 \alpha &= \alpha i \wedge \alpha j . \alpha k . \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

TERCEIRO INVARIANTE DE ALGUNS OPERADORES

Aplicada a relação 14 terceira teremos

$$\left.\begin{aligned} I_3 m &= m^3 \\ I_3 1 &= 1 \\ I_3 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{OMOTETIA}$$

$$I_3 c \wedge = 0 \qquad \text{AXIAL}$$

$$I_3 H (a, b) = 0 \qquad \text{DIADE.}$$

No caso do operador quociente $q = \dfrac{\theta + c\wedge}{A^2}$ resulta para $I_3 q$

$$I_3 q = \frac{1}{A^6} [\theta^3 + \theta c^2] \qquad (15)$$

THEOREMA

O invariante terceiro de um produto de dois operadores é igual ao produto dos terceiros invariantes de cada fator.

$$I_3 (\alpha \beta) = I_3 \alpha I_3 \beta . \qquad (16)$$

Com efeito substituido na relação 11 os vetores a, b e c por β i, β j e β k resulta

$$\beta i \wedge \beta j \,.\, \beta k \; I_3 \alpha = \alpha \beta i \wedge \alpha \beta j \, \alpha \beta k$$

ou

$$I_3 \beta \; I_3 \alpha = I_3 (\alpha \beta) \,.$$

THEOREMA

O invariante terceiro de um operador a potência n é igual ao invariante do operador elevado a potência n, isto é

$$I_3 (\alpha^n) = (I_3 \alpha)^n. \tag{17}$$

Aplicando a expressão 16 poderemos escrever

$$I_3 (\alpha \,.\, \alpha \, \alpha - - - - \alpha) = I_3 \alpha \,.\, I_3 \alpha \; I_3 \alpha \,.\, - - - \; I_3 \alpha$$

ou

$$I_3 \alpha^n = (I_3 \alpha)^n.$$

THEOREMA

O terceiro invariante do inverso de um operador é igual ao inverso do terceiro invariante desse operador

$$I_3 (\alpha^{-1}) = \frac{1}{I_3 \alpha} \,. \tag{18}$$

Com efeito sabemos que sendo α^{-1} o operador inverso de α poderemos escrever

$$\alpha^{-1} \, \alpha = 1 \,.$$

Da equação 17 se tira para $n = -1$

$$I_3 (\alpha^{-1}) = (I_3 \alpha)^{-1}$$

ou

$$I_3 \alpha^{-1} = \frac{1}{I_3 \alpha} \,.$$

A expressão 16 dá

$$I_3 (\alpha \, \alpha^{-1}) = I_3 \alpha^{-1} \; I_3 \alpha = 1 \,.$$

b) CONJUGADO DE UM OPERADOR

Chama-se conjugado de um operador α e representa-se com o símbolo $K \alpha$, ao operador tal que satisfaça a relação

$$u \,.\, \alpha v = v \,.\, K \alpha u \tag{19}$$

em que u e v são dois vetores quaisquer.

CONJUGADOS DE UMA OMOTETIA

No caso $\alpha = m$ resulta

$$Km = m \,. \tag{20}$$

Com efeito aplicando a expressão 19 teremos

$$u \,.\, m v = v \,.\, K m u$$

ou

$$m u \,.\, v = v \,.\, K \alpha u$$

expressão que se verifica para $K m = m$

$$m u = v.\, m u = m v \,.\, u \,.$$

O conjugado de uma omotetia é a própria omotetia.

CONJUGADO DE UM AXIAL

No caso de $\alpha = c \wedge$

$$K c \wedge = - c \wedge . \tag{21}$$

Com efeito substituido em 19, $\alpha = c \wedge$ a expressão se verifica para $K c \wedge = - c \wedge$.

O conjugado de um operador axial é o axial com sinal trocado.

CONJUGADO DE UM DIADE

No caso de $\alpha = H\ (a, b)$ resulta

$$KH\,(a, b) = H\,(b, a)\ . \tag{22}$$

Fazendo $\alpha = H\,(a, b)$ na equação 19, a igualdade se verifica para $KH = H\,(b, a)$.

O conjugado de um diade é pois o diade inicial com os vetores trocados.

THEOREMA

O conjugado de uma soma de operadores é igual a soma dos conjugados dos operadores.

$$K\,(\alpha + \beta) = K\alpha + K\beta. \tag{23}$$

Com efeito da definição do conjugado resulta:

$$u \,.\, (\alpha + \beta)\ v = v \,.\, K\,(\alpha + \beta)\ u$$

$$u \,.\, (\alpha + \beta)\ v = u \,.\, \alpha v + u \,.\, \beta v = v \,.\, K\alpha u + v \,.\, K\beta u \,.$$

ou

$$v \,.\, K\,(\alpha + \beta)\ u = v \,.\, K\alpha u + v \,.\, K\beta u = v \,.\, (K\alpha + K\beta)\ u$$

donde

$$K\,(\alpha + \beta) = K\alpha + K\beta\,.$$

De 23 se deduz que

$$K\,(m\,\alpha) = m K \alpha\,. \tag{24}$$

CONJUGADO DO OPERADOR QUOCIENTE

Ao operador

$$q = \frac{\theta}{A^2} + \frac{C \wedge}{A^2}\,.$$

Aplicado o operador K resulta

$$K q = K \left(\frac{\theta}{A^2} + \frac{C \wedge}{A^2} \right) = K \frac{\theta}{A^2} + K \frac{C \wedge}{A^2} = \frac{\theta}{A^2} - \frac{C \wedge}{A^2}\,.$$

THEOREMA

O conjugado do conjugado de um operador é o próprio operador

$$K K \alpha = \alpha . \tag{25}$$

Com efeito da definição do conjugado resulta

$$u . K K \alpha v = v . K \alpha u = u . v$$

donde

$$K K \alpha = \alpha .$$

CONJUGADO DE UM OPERADOR INVERSO

De 25 se conclue que:

$$K^2 = 1$$

ou

$$K = K^{-1} \tag{26}$$

isto é o conjugado do inverso de um operador é igual ao conjugado do operador.

THEOREMA

O conjugado de um produto de dois operadores é igual ao produto dos conjugados de cada operador colocados em ordem invertida.

$$K (\alpha \beta) = K \beta K \alpha . \tag{27}$$

Com efeito

$$u . K (\alpha \beta) v = v . (\alpha \beta) u = v \alpha (\beta u) = \beta u . K \alpha v = u . K \beta K \alpha v$$

ou

$$u . K (\alpha \beta) v = u . K \beta K \alpha v$$

donde

$$K (\alpha \beta) = K \beta K \alpha .$$

Pela mesma razão

$$K (\alpha \beta \gamma) = K \gamma K \beta K \alpha .$$

CONJUGADO DE UMA POTÊNCIA

No caso de n fatores iguais a α resulta

$$K \alpha^n = (K \alpha)^n . \tag{28}$$

Exemplos $K \alpha^3 = (K \alpha)^3$, $K (K \alpha)^3 = (KK \alpha)^3 = \alpha^3$.
No caso de n negativos vem:

$$K \alpha^{-n} = (\alpha^{-1})^n .$$

CONJUGADO DOS INVARIANTES

Os invariantes sendo escalares teremos as relações

$$K I_1 = I_1 \qquad K I_2 = I_2 \qquad K I_3 = I_3 .$$

c) IDENTIDADE DE TERCEIRA ORDEM

Sendo α um operador e $I_1 \alpha$, $I_2 \alpha$ e $I_3 \alpha$ os seus invariantes existe a seguinte relação do terceiro gráu entre α e seus invariantes.

$$\alpha^3 - I_1 \alpha \alpha^2 + I_2 \alpha \alpha - I_3 \alpha = 0 . \tag{29}$$

A relação acima fica perfeitamente demonstrada si nas equações dos invariantes primeiro, segundo e terceiro substituirmos o vetor c respectivamente por $\alpha^2 c$, $-\alpha c$ e c e somamos membro a membro as relações. Resulta então: sendo a, b e c vetores quaisquer não coplanares resulta:

$$a \wedge b \,.\, (\alpha^2 I_1 \alpha - \alpha I_2 \alpha + I_3 \alpha)\; c = a \wedge b \,.\, \alpha^3 c$$

$$(\alpha^2 I_1 \alpha - \alpha I_2 \alpha + I_3 \alpha)\; c = \alpha^3 c$$

ou

$$\alpha^3 - I_1 \alpha \alpha^2 + I_2 \alpha \alpha - I_3 \alpha = 0 .$$

THEOREMA

Os invariantes do conjugado de α são respectivamente iguais aos invariantes de α.

$$I_1 K \alpha = I_1 \alpha , \qquad I_2 K \alpha = I_2 \alpha , \qquad I_3 K \alpha = I_3 \alpha . \tag{30}$$

Com efeito, aplicando a identidade 29 ao operador $K\alpha$ resulta:

$$(K\alpha)^3 - I_1 K\alpha\, (K\alpha)^2 + I^2 K\alpha\, (K\alpha) - I^3 K\alpha = 0.$$

Aplicando K na expressão resultante vem:

$$K\, (K\alpha)^3 - K I_1 K \alpha\, (K\alpha)^2 + K I_2 K \alpha\, (K\alpha) - K I_3 K \alpha = 0$$

ou

$$\alpha^3 - I_1 K \alpha^2 + I_2 K \alpha \alpha - I_3 K \alpha = 0 .$$

Comparando essa relação com 29 teremos as igualdades (30).

d) OPERADOR RECÍPROCO

Chama-se recíproco de um operador α e se designa com a expressão $R\alpha$, ao operador tal que sendo a e b dois vetores quaisquer resulta sempre a igualdade:

$$R\alpha\, (a \wedge b) = \alpha a \wedge \alpha b . \tag{31}$$

A relação acima define pois o operador R, uma vez que independe de a e b. O recíproco de um operador é uma operação realisada entre operadores.

A cada operador α corresponde um operador recíproco $R\alpha$. Como efeito dado um terno de vetores a b c não coplanares resulta a expressão de correspondência:

$$R\alpha = \begin{vmatrix} \alpha b \wedge \alpha c & \alpha c \wedge \alpha a & \alpha a \wedge \alpha b \\ b \wedge c & c \wedge a & a \wedge b \end{vmatrix}$$

perfeitamente definida. O operador R aplicado ao operador α dá o seu recípro $R\alpha$. O operador R não é operador linear como podemos verificar. Aplicado ao operador m dá

$$R\,(m) = m^2 . \tag{32}$$

Com efeito da definição resulta

$$R\,(m)\,(a \wedge b) = m a \wedge m b = m^2 a \wedge b$$

ou

$$R m = m^2$$

vê-se fàcilmente que

$$R u \wedge = H\,(u, u) \text{ recíproco de um axial} \tag{33}$$

$$R H\,(a, b) = 0 \text{ recíproco de um DIADE} \tag{34}$$

O recíproco de um diade é nulo.

THEOREMA

Si o reciproco de um operador fôr nulo o operador é um diade.

Com efeito para $R\alpha = 0$ resulta

$$R\alpha (a \wedge b) = \alpha a \wedge \alpha b = 0 .$$

Ora si $\alpha a \wedge \alpha b = 0$ então αa é paralelo a αb, isto é o operador α transforma qualquer vetor em vetor paralelo ao vetor b, isto é um diade.

RECIPROCO DE UM QUOCIENTE

Para

$$q = \frac{\theta - c \wedge}{A^2}$$

resulta:

$$R q = \frac{1}{A^4} \mid \theta^2 - \theta c \wedge + H (c, c) \mid \tag{35}$$

Com efeito

$$R q (a \wedge b) = \left(\frac{\theta - c \wedge}{A^2}\right) a \wedge \left(\frac{\theta - c \wedge}{A^2}\right) b =$$

$$= \frac{1}{A^4} \mid \theta^2 a \wedge b - \theta a \wedge (c \wedge b) - (c \wedge a) \wedge \theta b + (c \wedge a) \wedge (c \wedge b) \mid =$$

$$= \frac{1}{A^4} \left\{ \theta^2 a \wedge b - \theta [- (a . c) b + (a . b) c + (b . c) a - (b . a) c] + [c a b] c \right\}$$

$$= \frac{1}{A^4} \left\{ \theta^2 a \wedge b - \theta c \wedge (a \wedge b) + H (c, c) \; a \wedge b \right\}$$

ou

$$R q = \frac{1}{A^4} [\theta^2 - \theta c \wedge + H (c, c)] .$$

THEOREMA

O reciproco de um produto de operadores é igual ao produto do reciproco de cada operador na mesma ordem.

Sendo α e β dois operadores e $R\alpha$ e $R\beta$ respectivamente os seus recíprocos vem:

$$R (\alpha \beta) = R\alpha R\beta . \tag{36}$$

Com efeito pela definição de reciprocos teremos:

$$R\beta (a \wedge b) = \beta a \wedge \beta b .$$

Aplicando a ambos os membros o operador $R\alpha$ teremos:

$$R\alpha R\beta (a \wedge b) = R\alpha (\beta a \wedge \beta b)$$

ou

$$R\alpha R\beta (a \wedge b) = \alpha \beta a \wedge \alpha \beta b = R (\alpha \beta) (a \wedge b)$$

donde

$$R\alpha R\beta = R (\alpha \beta) .$$

APLICAÇÃO

Sendo m uma omotetia e α um operador qualquer

$$R (m \beta) = m^2 R\alpha .$$

THEOREMA

O produto dos operadores $K\alpha$ e $R\alpha$ é igual ao terceiro invariante de α.

1) $$K\alpha R\alpha = I_3\alpha. \quad (37)$$

Com efeito por definição de conjugado e de R poderemos escrever:

$$K\alpha\left\{ R\alpha (a \wedge b) \right\} . \alpha c = R\alpha (a \wedge b) . \alpha c = \alpha a \wedge \tilde{\alpha} b . \tilde{\alpha} c =$$
$$= I_3 \alpha a b \wedge c .$$

Sendo a b e c vetores quaisquer não complanares resulta

$$K\alpha R\alpha = I_3\alpha$$

vejamos agora que $R\alpha K\alpha = I_3\alpha$.

Aplicando a esquerda e em ambos os membros da expressão 37 o operador $K\alpha^{-1}$ que igual $(K\alpha)^{-1}$ vêm

$$K\alpha^{-1} K\alpha = R\alpha = K\alpha^{-1} I_3 \alpha$$

ou

$$R\alpha = I_3\alpha \quad K\alpha^{-1}. \quad (38)$$

Aplicando na expressão acima e a direita o operador $K\alpha$, resulta

$$R\alpha K\alpha = I_3\alpha K\alpha^{-1} K\alpha$$

ou

$$R\alpha K\alpha = I_3\alpha.$$

Podemos pois escrever:

$$K\alpha R\alpha = R\alpha K\alpha = I_3\alpha. \quad (39)$$

OPERADOR INVERSO

A expressão 38 sendo geral qualquer que seja o operador α, poderemos nesta expressão trocar α por $K\alpha$ resultando o seguinte:

$$R K\alpha = I_3 K\alpha K K\alpha^{-1}$$

ou

$$R K\alpha = I_3\alpha\alpha^{-1} \quad (40)$$

pois $I_3 K\alpha = I_3\alpha$ relação 30

e

$$KK = 1.$$

Da expressão 40 sendo o terceiro invariante um escalar teremos:

$$\alpha^{-1} = \frac{R K\alpha}{I_3\alpha} \quad (41)$$

que é a expressão que nos dá o operador α^{-1} inverso de um dado operador α.

INVERSO DO OPERADOR QUOCIENTE

Sendo

$$q = \frac{\theta + c \wedge}{A^2}$$

$$K q = \frac{\theta - c \wedge}{A^2}$$

já sabemos de 35 que

$$R\,K\,q = \frac{1}{A^4}\,[\theta^2 - \theta\, c \wedge + H\,(c, c)]$$

e de (15) sabemos que

$$I_3\,q = \frac{1}{A^6}\,[\theta^3 + \theta\, c^2]\,.$$

Donde

$$q^{-1} = \frac{R\,K\,q}{I_3\,q} = \frac{\frac{1}{A^4}\,[\theta^2 - \theta\, c \wedge + H\,(c, c)]}{\frac{1}{A^6}\,[\theta^3 + \theta\, c^2]}$$

simplificando

$$q^{-1} = A^2\,\frac{\theta^2 - \theta\, c \wedge + H\,(c, c)}{\theta^3 + \theta\, c^2}\,. \tag{42}$$

EXERCÍCIO

Seja

$$A = i + j + k \qquad e \qquad B = 2i + j - k$$

resulta

$$\theta = A\,.\,B = 2, \quad A^2 = 3 \quad c = A \wedge B = -2i + 3j - k \quad c^2 = 14$$

$$\frac{B}{A} = q = \frac{2}{3} + \frac{-2i + 3j - k}{3} \wedge .$$

Aplicado o operador q ao vetor i resulta o vetor v

$$q\,i = \frac{2i - j - 3k}{3} = v\,.$$

O operador inverso de q é dado pela fórmula

$$q^{-1} = \frac{4 - 2c \wedge + H\,(c, c)}{12}$$

Aplicado êste operador ao vetor v teremos o vetor i.
Pois por definição $q^{-1}\,v = i$

$$\frac{4 - 2c \wedge + H\,[c, c]}{12}\,v = i$$

$$[4 - 2c \wedge + H\,(c, c)]\,v = 12\,i$$

$$4\,v - 2c \wedge v + H\,[c, c]\,v = 12\,i\,.$$

Efetuando as operações

$$4\,v = 4\,\frac{2i - j - 3k}{3} = \frac{8i - 4j - 12k}{3}$$

$$-2c \wedge v = -2\,(-2i + 3j - k) \wedge \left(\frac{2i - j - 3k}{3}\right) = \frac{20i + 16j + 8k}{3}$$

$$H\,[c, c]\,v = (c\,.\,v)\,c = (-2i + 3j - k)\,.\left(\frac{21 - j - 3k}{3}\right)(-2i + 3j - k) =$$

$$= \frac{8i - 12j + 4k}{3}$$

ou

$$\frac{8\,i - 4\,j - 12\,k}{3} + \frac{20\,i + 16\,j + 8\,k}{3} + \frac{8\,i - 12\,j + 4\,k}{3} = \frac{36\,i}{3} = 12\,i$$

2como queríamos mostrar.

Além disso

$$q^{-1}\,q = \left(\frac{A^2\,\theta^2 - \theta\,c \wedge + H\,|\,c,\,c\,|}{\theta^3 + \theta\,c^2}\right)\left(\frac{\theta + c \wedge}{A^2}\right) = 1\,.$$

EXERCÍCIO

Vamos agora aplicar o quociente de dois vetores na resolução de um circuito elétrico.

PRELIMINAR

Vamos considerar vetores paralelos a um plano. Seja XY êste plano.

Neste caso o quociente vetorial $\frac{B}{A}$, em que

$$B = b_1\,i + b_2\,j \qquad \text{e} \qquad A = a_1\,i + a_2\,j\,,$$

será expresso por:

$$\frac{B}{A} = \frac{b_1\,i + b_2\,j}{a_1\,i + a_2\,j} = (a_1\,i + a_2\,j)\,.\,(b_1\,i + b_2\,j) + (a_1\,i + a_2\,j) \wedge (b_1\,i + b_2\,j) \wedge$$

ou

$$\frac{B}{A} = R + c\,k \wedge$$

em que R e c são dois escalares e k o vetor unitário normal ao plano XY.

OPERADOR Z

Chamando Z ao operador quociente teremos:

$$Z = R + c\,k \wedge\,. \tag{43}$$

CONJUGADO

O conjugado do operador Z é:

$$K\,Z = R - c\,k \wedge.$$

OPERADOR (c k) ∧

Para o operador $(c\,k \wedge)^2$ teremos a seguinte relação:

$$(c\,k \wedge)^2 = -\,c^2 + H\,(c\,k,\,c\,k) = -\,c^2 + c^2\,H\,(k,\,k)\,. \tag{44}$$

Com efeito aplicando êste operador a um vetor x teremos:

$$(c\,k \wedge)^2\,x = c\,k \wedge (c\,k \wedge x) = -\,(c\,k\,.\,c\,k)\,x + (c\,k\,.\,x)\,c\,k =$$

$$= -\,c^2\,x + H\,(c\,k,\,c\,k)\,x$$

ou

$$(c\,k)^2 = -\,c^2 + H\,(c\,k,\,c\,k)\,.$$

Como porém vamos operar sòmente com vetores situados no plano X Y, o operador H (c k, c k) operando sôbre qualquer vetor do plano dá um vetor nulo poderemos escrever

$$(c\,k\,\wedge)^2 = -\,c^2 .$$

PRODUTO DO OPERADOR Z PELO SEU CONJUGADO

Sendo

$$Z = R + c\,k\,\wedge$$

e

$$K\,Z = R - c\,k\,\wedge$$

vêm

$$Z\,(k\,Z) = (R + c\,k\,\wedge)\,(R - c\,k\,\wedge) = R^2 - R\,c\,k\,\wedge + R\,c\,k\,\wedge - (c\,k\,\wedge)^2$$

ou

$$Z\,(K\,Z) = R^2 + c^2 .$$

Isto é o produto do operador Z pelo seu conjugado é um escalar.

OPERADOR INVERSO DE Z

Da expressão $Z^{-1}\,Z = 1$ vêm $Z^{-1} = \frac{1}{Z}$.

Sabemos que o operador Z^{-1} inverso do operador Z, é dado pela fórmula

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{R^2 - R\,c\,k\,\wedge + H\,(c\,k, c\,k\,\wedge)}{R^3 + R\,c^2}$$

anulando o têrmo H (c k, c k) pelas razões já expostas vem:

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{R^2 - R\,c\,k\,\wedge}{R^3 + R\,c^2} .$$

Ou, dividindo por R ambos os têrmos vem:

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{R - c\,k\,\wedge}{R^2 + c^2} = \frac{K\,(R + c\,k\,\wedge)}{R^2 + c^2}$$

ou

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{K\,Z}{Z\,K\,Z} . \tag{45}$$

Ora, podemos considerar a expressão (45) como oriunda da expressão $\frac{1}{Z}$ na qual multiplicamos ambos os têrmos por K Z.

Assim, sendo $Z = R + c\,k\,\wedge$ vem:

Da expressão

$$Z^{-1} = \frac{1}{R + c\,k\,\wedge} = \frac{1}{(R + c\,k\,\wedge)}\left(\frac{R - c\,k\,\wedge}{R - c\,k\,\wedge}\right) = \frac{R - c\,k\,\wedge}{R^2 + c^2}$$

vejamos agora o problema inverso. Dado o operador Z^{-1} achar o operador Z.

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} \text{ vem } Z = \frac{1}{Z^{-1}} = \frac{1}{\dfrac{R - c\,k\,\wedge}{R^2 + c^2}} = \frac{R^2 + c^2}{R - c\,k\,\wedge} .$$

Multiplicando ambos os membros por $R + c\,k \wedge$ vem:

$$Z = \left(\frac{R^2 + c^2}{R - c\,k}\right)\left(\frac{R + c\,k\wedge}{R + c\,k\wedge}\right) = \frac{R^2 + c^2}{R^2 + c^2}\,(R + c\,k\wedge) = R + c\,k\wedge .$$

APLICAÇÃO

Chamando E a fôrça electromotriz e I a intensidade da corrente, o quociente $\frac{E}{I} = Z = R + c\,k\wedge$.

O operador Z é chamado impedância do circuito.

Quando E é expresso em volts. e I em ampéres a impedância é expressa em omhs.

A impedância é composta de duas resistências, em que R é a resistência do circuito e c a reatância.

Da expressão acima tiramos

$$E = Z\,I$$

ou aplicando o operador Z^{-1} em ambos os membros

$$Z^{-1}E = Z^{-1}Z\,I$$

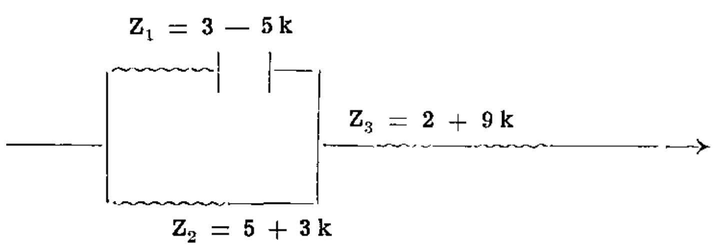
$$Z^{-1}E = I.$$

No caso de vários circuitos em paralelos a impedância é dada por

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

em que Z_1 Z_2 Z_3 são as impedâncias de cada circuito.

Seja calcular o circuito elétrico abaixo.



Uma impedância Z_1 composta de 3 omhs de resistência e 5 omhs de reatância condensativa está em paralelo com uma bobina de 5 omhs de resistência e 3 omhs de reatância indutiva.

Em série com esta combinação está uma impedância Z_3 de 2 omhs de resistência e 9 omhs de reatância indutiva. Se uma F.E.M de 100 volts fôr estabelecido através do circuito qual é a corrente e qual a voltagem através cada ramo?

$$Z_1 = 3 - 5\,k\,\wedge$$

$$E = 100\,i \qquad Z_2 = 5 + 3\,k\,\wedge$$

$$Z_3 = 2 + 9\,k\,\wedge .$$

Ora a impedância em paralélo é

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{3 - 5\,k\,\wedge} + \frac{1}{5 + 3\,\wedge}.$$

Porém

$$\frac{1}{3 - 5k\wedge} = \frac{K(3 - 5k\wedge)}{9 + 25} = \frac{3 + 5k\wedge}{34} = \frac{1}{Z_1}$$

$$\frac{1}{5 + 3k\wedge} = \frac{K(5 + 3k\wedge)}{25 + 9} = \frac{5 - 3k\wedge}{34} = \frac{1}{Z_2}$$

$$\frac{3 + 5k\wedge + 5 - 3k\wedge}{34} = \frac{8 + 2k\wedge}{34} = \frac{1}{Z}.$$

Logo

$$Z = \frac{34}{8 + 2k\wedge} = \frac{34K(8 + 2k\wedge)}{64 + 4} = \frac{8 - 2k\wedge}{2} = (4 - k\wedge) \text{ omhs.}$$

O circuito total será

$$Z_t = Z + Z_3 = (4 - k\wedge) + (2 + 9k\wedge) = (6 + 8k\wedge) \text{ omhs}$$

donde será

$$Z^{-1} = \frac{K(6 + 8k\wedge)}{36 + 64} = \frac{6 - 8k\wedge}{100} = \textit{omhs.}$$

A corrente total será

$$I_3 = Z^{-1}E = \frac{6 - 8k\wedge}{100}(100\,i) = (6\,i - 8\,j) \text{ ampéres.}$$

A queda de voltagem atravéz de Z_3 é

$$E_3 = Z_3 I_3 = (2 + 9k\wedge)(6\,i - 8\,j) = (84\,i + 38\,j) \text{ volts.}$$

A queda de voltagem atravéz do circuito paralélo é

$$E_1 - E_3 = 100\,i - (84\,i + 38\,j) = (16\,i - 38\,j) \text{ volts.}$$

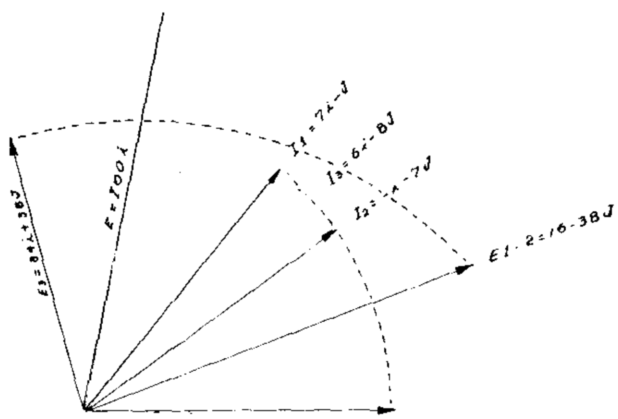
A corrente atravéz de Z_1 é

$$I_1 = Z_1^{-1}(E_1 - E_2) = \frac{3 + 5k\wedge}{34}(16\,i - 38\,j) = (7\,i - j) \text{ ampéres.}$$

A corrente atravéz Z_2 pode ser obtida por

$$I_2 = I_3 - I_1 = (6\,i - 8\,j) - (7\,i - j) = -(i + 7\,j) \text{ ampéres.}$$

O diagrama vetorial é o da figura abaixo



$$|I_3| = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ AMP.}$$

$$J_2 = \sqrt{49 + 1} \text{ VOLTS.}$$