

# A NORMAL LOGÍSTICA

**J. C. DIAS DE MORAES**

Engenheiro Químico e Sanitarista  
Departamento de Águas e Esgotos

## 1 — PARTE TEÓRICA

1.1 — *Preliminares*: a equação de Verhulst, também conhecida por logística, foi estabelecida por Verhulst há bastante tempo, tendo, contudo, caído no esquecimento. Yule, posteriormente, estabeleceu um método para a sua aplicação prática, conhecido por método de Yule. Mais recentemente, Krummeich modificou o método de Yule, mantendo, porém, o artifício mais importante introduzido por êle, o qual consiste na determinação das constantes da equação logística a partir de três populações equidistantes no tempo. Há, ainda, outros métodos, inclusive estatísticos, para a determinação das referidas constantes.

Neste trabalho, nós conseguimos estabelecer um novo método para o emprego prático da logística, através de uma modificação na equação de Verhulst, o qual traz uma simplificação considerável sobre os outros dois métodos acima citados. Esta modificação originou-se da sugestão feita pelo Prof. Fernando Arruda de Toledo Fraga, a quem ficamos gratos, de se aplicar à equação de Verhulst as funções hiperbólicas. A exploração desta idéia forneceu resultados surpreendentes, a ponto de termos chegado a estabelecer a normal logística, tal como foi estabelecida a normal probabilística.

Com esta modificação, a aplicação prática da logística para a estimativa de populações tornou-se, provavelmente, um dos processos mais simples e fácil para a estimativa de populações em engenharia sanitária.

Além disso, entre todos os processos existentes de estimativa de populações, a logística é o único de origem racional, daí o seu nome, e é o que mais se aproxima da realidade em muitos casos, não obstante ainda estar sujeito a críticas, e não corresponder às expectativas em bastantes casos particulares. Mas, apesar de tudo isso, ainda é o meio mais seguro de que dispõe o homem para estimar o crescimento dos grupos humanos, e principalmente quando as constantes são determinadas pelos processos estatísticos.

1.2 — *Equação Hiperbólica de Verhulst*: — a transformação da equação de Verhulst sob a forma atualmente conhecida, para a forma hiperbólica é simples.

A equação de Verhulst é:

$$P = \frac{P_s}{1 + e^{a-bt}} \quad (1)$$

sendo

P = população no tempo t

P<sub>s</sub> = população de saturação, constante

a = constante

b = constante

t = tempo

e = base dos logaritmos neperianos

Alguns autores dão a equação sob a forma

$$P = \frac{K}{1 + e^{\frac{\alpha - t}{\beta}}} \quad (2)$$

que é uma simples modificação da (1).

O coseno hiperbólico da variável  $\varphi$  é:

$$\cos h \varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} \quad (3)$$

o qual fornece sucessivamente:

$$2 \cos h \varphi = e^{\varphi} + e^{-\varphi} = e^{\varphi} \left( 1 + \frac{e^{-\varphi}}{e^{\varphi}} \right) = e^{\varphi} (1 + e^{-2\varphi}) \quad (4)$$

e

$$1 + e^{-2\varphi} = \frac{2 \cos h \varphi}{e^{\varphi}} \quad (5)$$

fazendo:

$$1 + e^{-2\varphi} = 1 + e^{a-bt} \quad (6)$$

teremos em (1)

$$P = \frac{P_s e^{\varphi}}{2 \cos h \varphi} \quad (7)$$

que é a equação de Verhulst sob a forma hiperbólica.

Ora,  $e^{\varphi}$  e  $2 \cos h \varphi$  são duas funções de  $\varphi$ , então

$$N = f(\varphi) = \frac{e^{\varphi}}{2 \cos h \varphi} = \frac{1}{1 + e^{-2\varphi}} \quad (8)$$

A função  $N$  é a função normal logística, que independe dos valores das constantes da equação de Verhulst. Assim, temos:

$$P = N P_s \quad (9)$$

forma transformada da equação logística.

1.3 — *Discussão da Normal Logística*: o campo de variação de  $\varphi$  é:

$$-\infty \leq \varphi \leq +\infty \quad (10)$$

para o valor negativo de  $\infty$  temos em (7)

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\infty} P = \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \frac{P_s e^{\varphi}}{2 \cos h \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \frac{P_s}{1 + e^{-2\varphi}} = 0 \quad (11)$$

para o valor nulo de  $\varphi$  vem:

$$P = \frac{P_s}{2} \quad (12)$$

e para o valor positivo de  $\infty$  temos:

$$\lim_{\varphi \rightarrow \infty} P = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{P_s}{1 + e^{-2\varphi}} = \lim_{\varphi \rightarrow \infty} \frac{P_s}{1 + \frac{1}{e^{2\varphi}}} = P_s \quad (13)$$

Assim, a curva toma a posição, relativamente ao sistema de coordenadas, dada na Fig. 1.

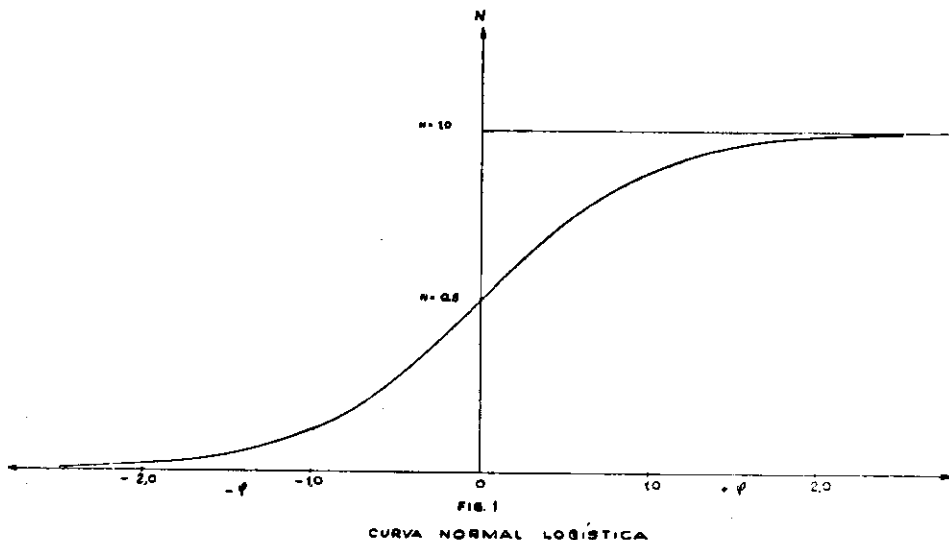
1.4 — *Vantagens do Uso da Logística Hiperbólica*: — na equação normal dada em (8) nós vemos imediatamente a vantagem da aplicação da equação logística hiperbólica. A função exponencial  $e^\varphi$  e o coseno hiperbólico são dados em tabelas naturais ou logarítmicas. A determinação dos valores da normal logística em função de  $\varphi$  torna-se portanto fácil.

Determinado o valor específico de  $P_s$ , o cálculo de P para diferentes valores do tempo torna-se fácil, reduzindo-se a uma simples operação de multiplicação.

Por outro lado, a equação (9) é de forma logarítmica, podendo fornecer um ábaco. Será publicado, aliás, um ábaco completo, para resolver a logística. Além disso, em trabalho posterior, será também publicado um papel logístico normal, a semelhança do papel normal de probabilidades.

Assim, o trabalho imenso da aplicação prática da logística sob a forma (1), fica praticamente eliminado pela aplicação do nosso processo

1.5 — *Interpretação Gráfica*: — o gráfico da equação de Verhulst tem a forma geral dada na Fig. 1.



Neste gráfico a assintota superior é dada pelo valor  $N = 1$ . A forma da curva, que é sempre a mesma, é dada pela função normal  $N$ . O fato dela ser mais achatada ou não depende do valor da população de saturação.

Quanto maior  $P_s$  tanto menos achatada será a curva. Para baixos valores de  $P_s$  a curva torna-se achatada e longa.

1.6 — *Posição do Ponto de Inflexão*: — o ponto de inflexão é dado pela troca de sinais da derivada segunda da função considerada, para valores maiores ou menores em torno das raízes reais que anulam a derivada segunda.

Tomando a equação sob a forma de:

$$P = \frac{P_s}{1 + e^{-2\varphi}} = P_s (1 + e^{-2\varphi})^{-1} \quad (14)$$

e derivando obteremos

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{2e^{-2\varphi}}{1 + e^{-2\varphi}} \times \frac{P_s}{1 + e^{-2\varphi}} \quad (15)$$

considerando a segunda parte do segundo membro vem:

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{2e^{-2\varphi}P}{1+e^{-2\varphi}} \quad (16)$$

substituindo  $1 + e^{-2\varphi}$  de (14) vem

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{2e^{-2\varphi}P^2}{P_s} \quad (17)$$

A segunda derivada fornece sucessivamente:

$$\frac{d^2P}{d\varphi^2} = \frac{4e^{-2\varphi}P}{P_s} \left( \frac{dP}{d\varphi} - P \right) \quad (18)$$

$$\frac{d^2P}{d\varphi^2} = \frac{4e^{-2\varphi}P^2}{P_s} \left( \frac{2e^{-2\varphi}}{1+e^{-2\varphi}} - 1 \right) \quad (19)$$

$$\frac{d^2P}{d\varphi^2} = \frac{4e^{-2\varphi}P^2}{P_s} \left( \frac{e^{-\varphi}}{\cosh\varphi} - 1 \right) \quad (20)$$

anulando a (20) vem

$$\frac{e^{-\varphi}}{\cosh\varphi} - 1 = 0 \quad (21)$$

$$\frac{e^{-\varphi}}{\cosh\varphi} = 1 \quad (22)$$

$$2e^{-\varphi} = e^{\varphi} + e^{-\varphi} \quad (23)$$

$$e^{2\varphi} = 1 \quad (24)$$

de onde, finalmente:

$$\boxed{\varphi = 0} \quad (25)$$

o outro valor que anula a derivada segunda é  $\varphi = \infty$ , não se verificando, contudo, a segunda condição necessária para satisfazer o ponto de inflexão.

Para estudarmos os sinais da derivada segunda para os valores em torno de  $\varphi = 0$  basta discutirmos o valor de

$$\frac{e^{-\varphi}}{\cosh\varphi} - 1 \quad (26)$$

Para  $\varphi < 0$ , vem  $e^{+\varphi} > 1$  e  $\cosh\varphi > 1$ , e como  $e^{+\varphi} > \cosh\varphi$  vem então:

$$\frac{e^{-\varphi}}{\cosh\varphi} - 1 > 0 \quad (26a)$$

ou seja positivo. Para  $\varphi > 0$ , vem  $e^{-\varphi} < 1$  e  $\cosh\varphi > 1$ , fornecendo:

$$\frac{e^{-\varphi}}{\cosh\varphi} - 1 < 0 \quad (27)$$

ou seja negativo. Então, para a derivada segunda teremos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \varphi < 0 & \quad \frac{d^2 P}{d \varphi^2} > 0 \\ \text{b)} \quad \varphi = 0 & \quad \frac{d^2 P}{d \varphi^2} = 0 \\ \text{c)} \quad \varphi > 0 & \quad \frac{d^2 P}{d \varphi^2} < 0 \end{aligned} \quad (28)$$

Conclui-se que  $\varphi = 0$  é o único ponto de inflexão da curva normal logística.

Por outro lado, em (14) para  $\varphi = 0$  vem:

$$\boxed{P = \frac{P_s}{2}} \quad (29)$$

então no ponto de inflexão a população é metade da população de saturação.

1.7 — *Conceituação dos Valores de t*: é necessário esclarecer que os valores de  $t$  são medidos numa unidade especial. De acôrdo com a condição de Yule, deve-se tomar três valores da população equidistantes no tempo. Este intervalo de tempo entre  $P_0$  e  $P_1$  constitui a unidade de medida dos valores de  $t$ , e o tempo  $t_0$  correspondente a  $P_0$  é a origem dos tempos nesta unidade, sendo, pois,  $t_0 = 0$ . O tempo  $t_1$  corresponde a  $P_1$  é  $t_1 = 1$ , e o tempo  $t_2$  correspondente a  $P_2$  é  $t_2 = 2$ . Estes períodos de tempo podem evidentemente ser de 10 em 10 anos, de 13 em 13 anos, etc, mas para cada caso sempre deve ser:

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_1 &= 1 \\ t_2 &= 2 \end{aligned} \quad (30)$$

Sendo  $i$  o número de anos adotado como intervalo de tempo entre  $P_0$  e  $P_1$  e entre  $P_1$  e  $P_2$ , e sendo  $T_0$  a data no nosso calendário considerada como origem, ou melhor, correspondente a  $P_0$ , uma data qualquer no nosso calendário será dada por:

$$T = T_0 + it \quad (31)$$

em que  $t$  pode tomar valores positivos, negativos ou nulo, assim como fracionários, porém sempre observando-se a condição de Yule para os três valores conhecidos de  $t$ , ou sejam  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$ , conforme a (30). Além disso, para os valores negativos de  $t$  há uma limitação, que é dada pelo fato de que  $T$  não pode ser inferior à data de fundação do agrupamento humano considerado.

1.8 — *Valores da Variável para Três Pontos Equidistantes no Tempo*: da igualdade (6) obtém-se imediatamente:

$$a - bt = -2\varphi \quad (32)$$

$$\varphi = \frac{bt - a}{2} \quad (33)$$

assim como:

$$t = \frac{2\varphi + a}{b} \quad (34)$$

Para  $n$  pontos diferentes e não equidistantes no tempo, entre dois pontos consecutivos teremos:

$$\begin{array}{ccccccc} P_0 & P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ t_0 & t_1 & t_2 & \dots & t_n \end{array} \quad (35)$$

em que

$$t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n$$

e em que as diferenças

$$\begin{array}{l} \Delta t_1 = t_1 - t_0 \\ \Delta t_2 = t_2 - t_1 \\ \vdots \\ \Delta t_n = t_n - t_{n-1} \end{array} \quad (35a)$$

não são necessariamente iguais. Considerando a (33) e as (35a) teremos sucessivamente:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{b t_0 - a}{2} \\ \varphi_1 &= \frac{b t_1 - a}{2} = \frac{b \Delta t_1}{2} + \frac{b t_0 - a}{2} \\ \varphi_2 &= \frac{b t_2 - a}{2} = \frac{b \Delta t_2}{2} + \frac{b t_1 - a}{2} \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1} &= \frac{b t_{n-1} - a}{2} = \frac{b \Delta t_{n-1}}{2} + \frac{b t_{n-2} - a}{2} \\ \varphi_n &= \frac{b t_n - a}{2} = \frac{b \Delta t_n}{2} + \frac{b t_{n-1} - a}{2} \end{aligned} \quad (36)$$

as quais fornecem:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{b \Delta t_1}{2} + \varphi_0 \\ \varphi_2 &= \frac{b \Delta t_2}{2} + \varphi_1 \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1} &= \frac{b \Delta t_{n-1}}{2} + \varphi_{n-2} \\ \varphi_n &= \frac{b \Delta t_n}{2} + \varphi_{n-1} \end{aligned} \quad (36a)$$

somando as duas últimas

$$\varphi_n = \frac{b}{2} (\Delta t_{n-1} + \Delta t_n) + \varphi_{n-2} \quad (37)$$

Subtraindo a penúltima da última

$$\varphi_n = \frac{b}{2} (\Delta t_n - \Delta t_{n-1}) + 2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2} \quad (37a)$$

Para a condição de Yule estendida a todos os pontos teremos:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0 \\
 t_1 &= 1 \\
 t_2 &= 2 \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\
 t_n &= n
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

em que n varia de acôrdo com uma sucessão de números inteiros. Também teremos:

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots \Delta t_n = 1
 \tag{38a}$$

Nestas condições as equações (36a), (37) e (37a) passam a ter a forma:

$$\varphi_n = \frac{b}{2} + \varphi_{n-1}
 \tag{39}$$

$$\varphi_n = b + \varphi_{n-2}
 \tag{39 a}$$

$$\varphi_n = 2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}
 \tag{39 b}$$

Da última tiramos:

$$\varphi_{n-1} = \frac{\varphi_n + \varphi_{n-2}}{2}
 \tag{40}$$

De onde se conclue que, satisfeita a condição de Yule, o valor da variável  $\varphi$  é sempre a média aritmética dos valores da mesma variável dos pontos que lhe são adjacentes.

Pelas equações (36a) conclui-se imediatamente a condição seguinte:

$$\varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n
 \tag{41}$$

Observamos, também, pela primeira equação (36) que um ou mais valores de  $\varphi$  podem ser negativos.

1.9 — *Determinação de  $P_s$* : — a determinação de  $P_s$  é grandemente facilitada pela condição de Yule. Assim, para três pontos equidistantes no tempo teremos em (5) e (7):

$$\frac{P_s}{P_0} = 1 + e^{-2\varphi_0}$$

$$\frac{P_s}{P_1} = 1 + e^{-2\varphi_1}
 \tag{42}$$

$$\frac{P_s}{P_2} = 1 + e^{-2\varphi_2}$$

fornecendo

$$e^{-2\varphi_0} = \frac{P_s}{P_0} - 1$$

$$e^{-2\varphi_1} = \frac{P_s}{P_1} - 1
 \tag{43}$$

$$e^{-2\varphi_2} = \frac{P_s}{P_2} - 1$$

tomando os logaritmos neperianos vem:

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= -\frac{1}{2} \log_e \left( \frac{P_8}{P_0} - 1 \right) \\ \varphi_1 &= -\frac{1}{2} \log_e \left( \frac{P_8}{P_1} - 1 \right) \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{2} \log_e \left( \frac{P_8}{P_2} - 1 \right)\end{aligned}\quad (44)$$

Considerando a (39), oriunda da condição de Yule vem:

$$\log_e \left( \frac{P_8}{P_2} - 1 \right) = 2 \log_e \left( \frac{P_8}{P_1} - 1 \right) - \log_e \left( \frac{P_8}{P_0} - 1 \right) \quad (45)$$

Passando à forma não logarítmica:

$$\frac{P_8}{P_2} - 1 = \frac{\left( \frac{P_8}{P_1} - 1 \right)^2}{\frac{P_8}{P_0} - 1} \quad (45a)$$

Fazendo transformações sucessivas chegaremos à:

$$P_8 = \frac{P_1^2 P_2 + P_0 P_1^2 - 2 P_0 P_1 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2} \quad (46)$$

Dividindo por  $P_1^2$  vem:

$$P_8 = \frac{P_2 + P_0 - 2 \frac{P_0 P_2}{P_1}}{1 - \frac{P_0 P_2}{P_1^2}} \quad (47)$$

chamando de:

$$m = \frac{P_0 P_2}{P_1} \quad (48)$$

vem finalmente:

$$P_8 = \frac{P_0 + P_2 - 2m}{1 - \frac{m}{P_1}} \quad (49)$$

1.10 — *Determinação de a:* — tomando a (32) para  $\varphi_0$ :

$$2 \varphi_0 = b t_0 - a \quad (50)$$

De acôrdo com a condição de Yule, temos:

$$t_0 = 0 \quad (51)$$

e

$$a = -2 \varphi_0 \quad (52)$$

Substituindo  $\varphi_0$  da (44) vem finalmente:

$$a = \log_e \left( \frac{P_8}{P_0} - 1 \right) \quad (53)$$



1.11 — *Determinação de b*: — tomando a (32) para  $\varphi_1$  vem:

$$2\varphi_1 = b t_1 - a \quad (54)$$

$$b = \frac{a + 2\varphi_1}{t_1} \quad (55)$$

Considerando a (38), substituindo  $\varphi_1$  da (44) e "a" de (53) temos finalmente:

$$b = \log_e \left( \frac{P_3}{P_0} - 1 \right) \log_e \left( \frac{P_3}{P_1} - 1 \right) \quad (56)$$

1.12 — *Casos de Inaplicabilidade*: — a condição de Yule leva a três casos de inaplicabilidade da equação de Verhulst, os quais são quando qualquer uma das populações  $P_0$ ,  $P_1$  ou  $P_2$  coincidir com o ponto de inflexão da curva. Estes casos serão estudados num trabalho posterior.

1.13 — *Condição de Passagem*: — em trabalho posterior faremos um estudo sobre a condição de passagem da curva sobre três pontos dados. Esta condição é:

$$m = \frac{P_0 P_2}{P_1} \quad (57)$$

em que

$$P_1 < m \quad (58)$$

1.14 — *Valores de P*: — os dois ramos da curva, dum lado e do outro do eixo dos tempos, são simetricamente invertidos. Assim, para  $+\varphi$  teremos um valor

$$P = P(P_3, \varphi) \quad (59)$$

e para  $-\varphi$ :

$$P' = P(P_3, -\varphi) = P_3 - P(P_3, \varphi) \quad (60)$$

ou seja

$$P_3 = P(P_3, +\varphi) + P(P_3, -\varphi) \quad (61)$$

Dêste modo, achadas as populações para um ramo da curva pode-se facilmente determinar as populações para o outro ramo.

1.15 — *Construção do Quadro 1*: — a construção do Quadro 1, que dá os valores da normal logistica em função da variável  $\varphi$ , é fácil.

Ele pode ser feito pela equação (8), tanto sob a forma hiperbólica como sob a forma  $(1 + e^{-2\varphi})^{-1}$ .

Construímos esta tabela pela forma  $(1 + e^{-2\varphi})^{-1}$  por ser mais fácil. Os valores de  $e^{-2\varphi}$  são dados em manuais de engenharia. Para os valores de  $\varphi > 0$ , usamos a equação (60), que também é válida para a normal, como é evidente.

## 2 — PROCESSO DE CALCULO

2.1 — *Exemplo*: — para tornar claro o processo de cálculo vamos dar um exemplo de um caso real. O exemplo refere-se à cidade de Limeira.

Por falta de dados estatísticos populacionais, o que ocorre sistematicamente nas nossas cidades do interior, fizemos um levantamento altamente preciso do número de casas da cidade, desde 1900, por meio dos livros de registro do impôsto predial. Esta estimativa, juntamente feita por meio de outros métodos, serviu de base para o novo projeto dos sistemas de águas e esgotos desta cidade, feito por nós a alguns anos atrás.

2.2 — *Dados para o cálculo:* — devem ser seleccionadas três populações,  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  (ou número de casas) correspondentes a três datas  $T_0$ ,  $T_1$  e  $T_2$  equidistantes no tempo.

$$\begin{aligned} P_0 &= 1561 \text{ casas} & T_0 &= 1930 \text{ anos} \\ P_1 &= 3048 \text{ casas} & T_1 &= 1940 \text{ anos} \\ P_2 &= 5537 \text{ casas} & T_2 &= 1950 \text{ anos} \end{aligned} \quad (62)$$

de tal modo que:

$$i = T_1 - T_0 = T_2 - T_1 = 1940 - 1930 = 10 \text{ anos} \quad (63)$$

2.3 — *Condição de Passagem:* — da equação (57)

$$m = \frac{P_0 P_2}{P_1} = \frac{1561 \times 5537}{3048} = 2851 \quad (64)$$

então

$$P_1 > m$$

o que mostra que os três pontos escolhidos satisfazem a condição de passagem.

De todos os valores obtidos no levantamento seleccionamos vários conjuntos de três valores conforme consta do Quadro 2, com as respectivas observações sobre a condição de passagem.

Tomamos o conjunto de valores n.º 1, entretanto, poderia ter sido tomado o de n.º 2, e ainda melhor seria fazer o cálculo para os dois conjuntos, ou mais, si tivesse, pois com a obtenção de várias curvas logísticas dispõe-se de mais dados para uma decisão final.

2.4 — *Cálculo de  $P_s$ :* — o cálculo de  $P_s$  é feito a partir da equação (49):

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{P_0 + P_2 - 2m}{1 - \frac{m}{P_1}} = \frac{1561 + 5537 - 2 \times 2851}{1 - \frac{2851}{3048}} \\ P_s &= 22060 \end{aligned} \quad (65)$$

O valor de  $m$  já foi determinado em (64).

2.5 — *Cálculo de  $a$ :* — Partindo-se da equação (9) temos para  $P_0$ :

$$N_0 = \frac{P_0}{P_s} = \frac{1561}{22060} = 0,07076 \quad (66)$$

Com o valor de  $N_0 = 0,07076$  entra-se na coluna da direita do Quadro 1, e obtêm-se por interpolação o valor de  $\varphi_0$ ; que é  $\varphi_0 = -1,288$ .

Ora, a equação (52) fornece  $a$  em função de  $\varphi_0$ :

$$a = -2\varphi_0 = -2 \times (-1,288) = 2,576 \quad (67)$$

2.6 — *Cálculo de  $b$ :* — do mesmo modo temos:

$$N_1 = \frac{P_1}{P_s} = \frac{3048}{22060} = 0,1382 \quad (68)$$

fornecendo, pelo Quadro 1:

$$\varphi_1 = -0,915 \quad (69)$$

A equação (55) fornece:

$$\begin{aligned} b &= \frac{a + 2\varphi_1}{t_1} = a + 2\varphi_1 = 2,576 + 2 \times (-0,915) \\ b &= 0,746 \end{aligned} \quad (70)$$

porque sempre  $t_1 = 1$  (condição de Yule).

O cálculo de  $a$  e  $b$  por este processo torna-se surpreendentemente simples, além de diminuir bastante o erro devido a uma série de operações aritméticas, como é exigido pelos métodos de Yule e Krummeich.

2.7 — *Construção do Quadro 3:* — para se obter as populações (ou número de prédios) é necessário se saber os valores de  $\varphi$  nas diferentes datas. Para isso aplica-se a equação (39)

$$\varphi_n = \frac{b}{2} + \varphi_{n-1}$$

tomando como ponto de partida o valor já determinado de  $\varphi_0 = -1,288$  e  $\varphi_1 = 0,915$ , tanto para  $t > 0$  como para  $t < 0$ .

Tendo-se os valores de  $\varphi$  entra-se no Quadro 1 e obtêm-se os valores da normal logística  $N$ , os quais multiplicados por  $P_s = 22.060$  (equação 9) fornecem imediatamente os valores de  $P$ .

Para os dados intermediários, tais como 1.955, 1.965, etc., toma-se a equação (36a), na qual

$$\Delta t_n = 0,5 \quad (71)$$

e então

$$\varphi_n = \frac{b}{4} + \varphi_{n-1} \quad (72)$$

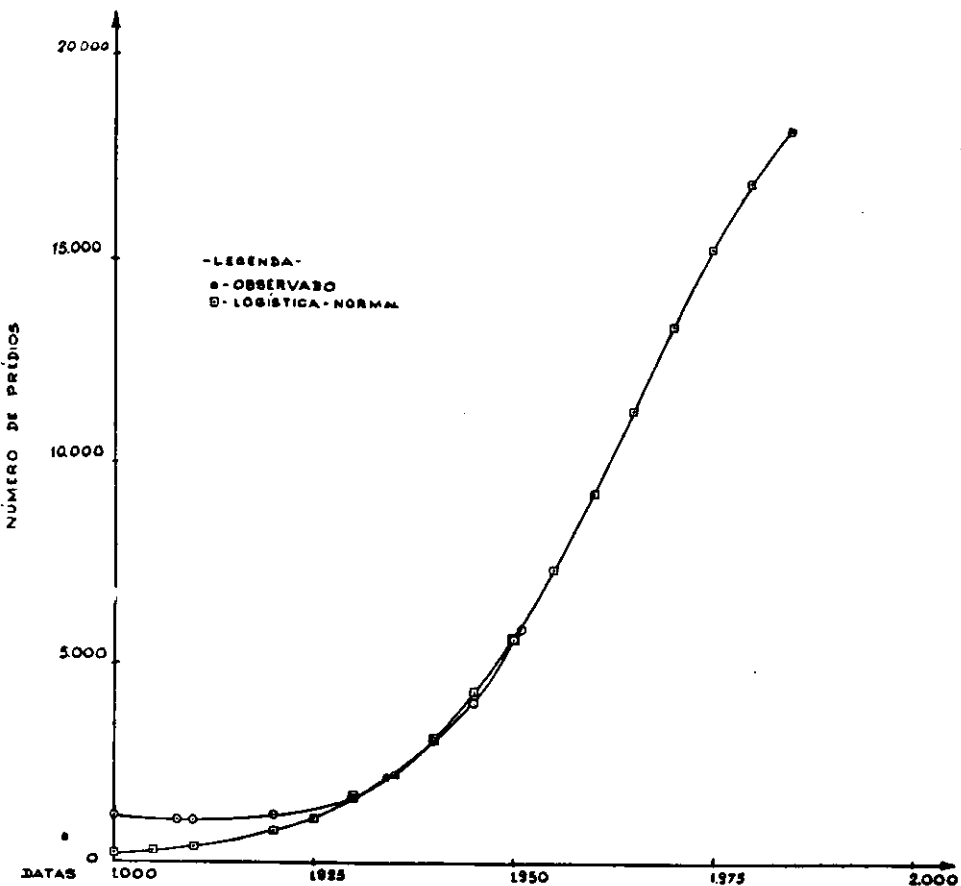


FIG. Nº 2  
ESTIMATIVA DE PRÉDIOS  
PARA A CIDADE DE LIMEIRA

Para outros dados intermediários o valor de  $\Delta t_n$  seria fracionário proporcionalmente às datas intermediárias.

2.8 — *Construção da Curva:* — com os dados obtidos fizemos a curva, em escala regular, a qual está na Fig. 2.

Nesta curva constam os dados reais do levantamento, e em seguida os da estimativa.

É interessante se determinar os valores anteriores a  $P_0$ , para se comparar a aderência da curva real com a teórica, determinada a partir de três dados conhecidos.

Não constam da curva os valores obtidos pelo processo de Krummeich.

### SUMÁRIO

O Autor estabelece a equação normal logística, e por meio das suas propriedades desenvolve um novo método de cálculo para as constantes  $P_0$ ,  $a$  e  $b$  da equação original, simplificando notavelmente as operações matemáticas para a sua determinação.

Fornece uma tabela dos valores da normal logística em função da variável  $\varphi$  para uso em aplicações práticas.

Mostra a aplicação da normal logística, num exemplo real aplicado à cidade de Limeira, Estado de S. Paulo, Brasil.

### SUMMARY

The Author establishes the normal equation of the logistic, and by means of its characteristics he develops a new method to determinate the constants  $P_0$ ,  $a$  and  $b$  of the original equation, giving a great simplification concerning the mathematical operations for their determination.

He gives a table of the normal logistic values in function of the variable  $\varphi$ , in order to facilitate the practical application of the logistic.

He shows the application of the normal logistic by an real exemple, applied to the city of Limeira, State of S. Paulo, Brazil.

QUADRO N.º 1 — FUNÇÃO LOGÍSTICA NORMAL.

$\varphi$	N	$\varphi$	N
— $\infty$	0	— 1,59	0,03992
— 3,00	0,00247	— 1,58	0,04070
— 2,50	0,00674	— 1,57	0,04149
— 2,00	0,01799	— 1,56	0,04229
		— 1,55	0,04311
— 1,99	0,01834		
— 1,98	0,01871	— 1,54	0,04394
— 1,97	0,01908	— 1,53	0,04479
— 1,96	0,01946	— 1,52	0,04565
— 1,95	0,01984	— 1,51	0,04653
		— 1,50	0,04742
— 1,94	0,02023		
— 1,93	0,02063	— 1,49	0,04834
— 1,92	0,02104	— 1,48	0,04927
— 1,91	0,02146	— 1,47	0,05021
— 1,90	0,02188	— 1,46	0,05117
		— 1,45	0,05215
— 1,89	0,02231		
— 1,88	0,02275	— 1,44	0,05315
— 1,87	0,02320	— 1,43	0,05417
— 1,86	0,02366	— 1,42	0,05520
— 1,85	0,02413	— 1,41	0,05625
		— 1,40	0,05732
— 1,84	0,02460		
— 1,83	0,02509	— 1,39	0,05841
— 1,82	0,02558	— 1,38	0,05952
— 1,81	0,02608	— 1,37	0,06065
— 1,80	0,02660	— 1,36	0,06180
		— 1,35	0,06297
— 1,79	0,02712		
— 1,78	0,02765	— 1,34	0,06416
— 1,77	0,02820	— 1,33	0,06538
— 1,76	0,02875	— 1,32	0,06661
— 1,75	0,02931	— 1,31	0,06786
		— 1,30	0,06914
— 1,74	0,02989		
— 1,73	0,03047	— 1,29	0,07044
— 1,72	0,03107	— 1,28	0,07176
— 1,71	0,03168	— 1,27	0,07310
— 1,70	0,03230	— 1,26	0,07447
		— 1,25	0,07586
— 1,69	0,03293		
— 1,68	0,03357	— 1,24	0,07727
— 1,67	0,03422	— 1,23	0,07871
— 1,66	0,03489	— 1,22	0,08017
— 1,65	0,03557	— 1,21	0,08166
		— 1,20	0,08317
— 1,64	0,03626		
— 1,63	0,03697	— 1,19	0,08471
— 1,62	0,03733	— 1,18	0,08627
— 1,61	0,03842	— 1,17	0,08787
— 1,60	0,03917	— 1,16	0,08948
		— 1,15	0,09112

(Continuação)

φ	N	φ	N
— 1,14	0,09279	— 0,69	0,2010
— 1,13	0,09449	— 0,68	0,2042
— 1,12	0,09622	— 0,67	0,2075
— 1,11	0,09797	— 0,66	0,2108
— 1,10	0,0997	— 0,65	0,2142
— 1,09	0,1016	— 0,64	0,2176
— 1,08	0,1034	— 0,63	0,2210
— 1,07	0,1053	— 0,62	0,2244
— 1,06	0,1072	— 0,61	0,2279
— 1,05	0,1091	— 0,60	0,2315
— 1,04	0,1111	— 0,59	0,2351
— 1,03	0,1130	— 0,58	0,2387
— 1,02	0,1151	— 0,57	0,2423
— 1,01	0,1171	— 0,56	0,2460
— 1,00	0,1192	— 0,55	0,2497
— 0,99	0,1213	— 0,54	0,2535
— 0,98	0,1235	— 0,53	0,2573
— 0,97	0,1256	— 0,52	0,2612
— 0,96	0,1279	— 0,51	0,2650
— 0,95	0,1301	— 0,50	0,2689
— 0,94	0,1324	— 0,49	0,2729
— 0,93	0,1347	— 0,48	0,2769
— 0,92	0,1371	— 0,47	0,2809
— 0,91	0,1394	— 0,46	0,2850
— 0,90	0,1419	— 0,45	0,2891
— 0,89	0,1443	— 0,44	0,2932
— 0,88	0,1468	— 0,43	0,2973
— 0,87	0,1493	— 0,42	0,3015
— 0,86	0,1519	— 0,41	0,3058
— 0,85	0,1545	— 0,40	0,3100
— 0,84	0,1571	— 0,39	0,3144
— 0,83	0,1598	— 0,38	0,3186
— 0,82	0,1625	— 0,37	0,3230
— 0,81	0,1652	— 0,36	0,3274
— 0,80	0,1680	— 0,35	0,3318
— 0,79	0,1708	— 0,34	0,3363
— 0,78	0,1736	— 0,33	0,3407
— 0,77	0,1765	— 0,32	0,3452
— 0,76	0,1795	— 0,31	0,3498
— 0,75	0,1824	— 0,30	0,3543
— 0,74	0,1854	— 0,29	0,3589
— 0,73	0,1885	— 0,28	0,3635
— 0,72	0,1915	— 0,27	0,3682
— 0,71	0,1947	— 0,26	0,3729
— 0,70	0,1978	— 0,25	0,3775

(Continuação)

$\varphi$	N
— 0,24	0,3822
— 0,23	0,3870
— 0,22	0,3917
— 0,21	0,3965
— 0,20	0,4013
— 0,19	0,4061
— 0,18	0,4110
— 0,17	0,4158
— 0,16	0,4207
— 0,15	0,4256
— 0,14	0,4305
— 0,13	0,4354
— 0,12	0,4403
— 0,11	0,4452
— 0,10	0,4502
— 0,09	0,4551
— 0,08	0,4601
— 0,07	0,4651
— 0,06	0,4700
— 0,05	0,4750
— 0,04	0,4800
— 0,03	0,4850
— 0,02	0,4900
— 0,01	0,4950
0	0,5000
0,01	0,5050
0,02	0,5100
0,03	0,5150
0,04	0,5200
0,05	0,5250
0,06	0,5300
0,07	0,5349
0,08	0,5399
0,09	0,5449
0,10	0,5498
0,11	0,5548
0,12	0,5597
0,13	0,5646
0,14	0,5695
0,15	0,5744
0,16	0,5793
0,17	0,5842
0,18	0,5890
0,19	0,5939
0,20	0,5987

$\varphi$	N
0,21	0,6035
0,22	0,6083
0,23	0,6130
0,24	0,6178
0,25	0,6225
0,26	0,6271
0,27	0,6318
0,28	0,6365
0,29	0,6411
0,30	0,6457
0,31	0,6502
0,32	0,6548
0,33	0,6593
0,34	0,6637
0,35	0,6682
0,36	0,6726
0,37	0,6770
0,38	0,6814
0,39	0,6856
0,40	0,6900
0,41	0,6942
0,42	0,6985
0,43	0,7029
0,44	0,7068
0,45	0,7109
0,46	0,7150
0,47	0,7191
0,48	0,7231
0,49	0,7271
0,50	0,7311
0,51	0,7350
0,52	0,7388
0,53	0,7427
0,54	0,7465
0,55	0,7503
0,56	0,7540
0,57	0,7577
0,58	0,7613
0,59	0,7649
0,60	0,7685
0,61	0,7721
0,62	0,7756
0,63	0,7790
0,64	0,7824
0,65	0,7858

(Continuação)

φ	N
0,66	0,7892
0,67	0,7925
0,68	0,7958
0,69	0,7990
0,70	0,8022
0,71	0,8053
0,72	0,8085
0,73	0,8115
0,74	0,8146
0,75	0,8176
0,76	0,8205
0,77	0,8235
0,78	0,8264
0,79	0,8292
0,80	0,8320
0,81	0,8348
0,82	0,8375
0,83	0,8402
0,84	0,8429
0,85	0,8455
0,86	0,8481
0,87	0,8507
0,88	0,8532
0,89	0,8557
0,90	0,8581
0,91	0,8606
0,92	0,8629
0,93	0,8653
0,94	0,8676
0,95	0,8699
0,96	0,8721
0,97	0,8744
0,98	0,8765
0,99	0,8787
1,00	0,8808
1,01	0,8829
1,02	0,8849
1,03	0,8870
1,04	0,8889
1,05	0,8909
1,06	0,8928
1,07	0,8947
1,08	0,8966
1,09	0,8984
1,10	0,9003

φ	N
1,11	0,90203
1,12	0,90378
1,13	0,90551
1,14	0,90721
1,15	0,90888
1,16	0,91052
1,17	0,91213
1,18	0,91373
1,19	0,91529
1,20	0,91683
1,21	0,91834
1,22	0,91983
1,23	0,92129
1,24	0,92273
1,25	0,92414
1,26	0,92553
1,27	0,92690
1,28	0,92824
1,29	0,92956
1,30	0,93086
1,31	0,93214
1,32	0,93339
1,33	0,93462
1,34	0,93584
1,35	0,93703
1,36	0,93820
1,37	0,93935
1,38	0,94048
1,39	0,94159
1,40	0,94268
1,41	0,94375
1,42	0,94480
1,43	0,94583
1,44	0,94685
1,45	0,94785
1,46	0,94883
1,47	0,94978
1,48	0,95073
1,49	0,95166
1,50	0,95258
1,51	0,95347
1,52	0,95435
1,53	0,95521
1,54	0,95606
1,55	0,95689



(Continuação)

$\varphi$	N
1,56	0,95771
1,57	0,95851
1,58	0,95930
1,59	0,96008
1,60	0,96083
1,61	0,96158
1,62	0,96267
1,63	0,96303
1,64	0,96374
1,65	0,96443
1,66	0,96511
1,67	0,96578
1,68	0,96643
1,69	0,96707
1,70	0,96770
1,71	0,96832
1,72	0,96893
1,73	0,96953
1,74	0,97011
1,75	0,97069
1,76	0,97125
1,77	0,97180
1,78	0,97235
1,79	0,97288
1,80	0,97340

$\varphi$	N
1,81	0,97392
1,82	0,97442
1,83	0,97491
1,84	0,97540
1,85	0,97587
1,86	0,97634
1,87	0,97680
1,88	0,97725
1,89	0,97769
1,90	0,97812
1,91	0,97854
1,92	0,97896
1,93	0,97937
1,94	0,97977
1,95	0,98016
1,96	0,98054
1,97	0,98092
1,98	0,98129
1,99	0,98166
2,00	0,98201
2,50	0,99326
3,00	0,99669
$\infty$	1,00000

**QUADRO 2**  
**CONDIÇÃO DE PASSAGEM PARA A LOGÍSTICA**

Conjunto de Valores	Datas	i	t	Prédios	Condição de Passagem
1	1930	—	0	1.561	Sim
	1940	10	1	3.048	
	1950	10	2	5.567	
2	1929	—	0	1.497	Sim
	1939	10	1	2.960	
	1949	10	2	5.332	
3	1900	—	0	1.116	Não
	1920	20	1	1.184	
	1940	20	2	3.048	
4	1909	—	0	1.077	Não
	1929	20	1	1.497	
	1949	20	2	5.332	

## QUADRO N.º 3

## ESTIMATIVA DE PRÉDIOS PARA A CIDADE DE LIMEIRA

Datas T anos	Observado Prédios	$\varphi$	N	Estimativa de Prédios	
				Normal	Krummeich
1900	1.116	— 2,4070	0,00899	198	180
1905	—	— 2,2205	0,01169	259	—
1908	1.063	—	—	—	—
1909	1.077	—	—	—	—
1910	1.069	— 2,0340	0,01722	380	272
1915	—	—	—	—	—
1920	1.184	— 1,6610	0,03489	770	670
1925	—	— 1,4745	0,04980	1.099	—
1929	1.497	—	—	—	—
1930	1.561	— 1,2880	0,07070	1.560	1.561
1934	2.142	—	—	—	—
1935	—	— 1,1015	0,0997	2.199	—
1939	2.960	—	—	—	—
1940	3.048	— 0,9150	0,1382	3.049	3.048
1941	3.429	—	—	—	—
1942	3.540	—	—	—	—
1943	3.740	—	—	—	—
1944	3.806	—	—	—	—
1945	3.971	— 0,7285	0,1910	4.213	4.163
1946	4.180	—	—	—	—
1947	4.330	—	—	—	—
1948	5.087	—	—	—	—
1949	5.332	—	—	—	—
1950	5.567	— 0,5420	0,2520	5.559	5.567
1951	5.817	—	—	—	—
1955	—	— 0,3555	0,3296	7.271	7.253
1960	—	— 0,1690	0,4158	9.173	9.111
1965	—	+ 0,0175	0,5085	11.218	11.199
1970	—	+ 0,2040	0,6011	13.260	13.224
1975	—	+ 0,3905	0,6856	15.124	15.105
1980	—	+ 0,5770	0,7609	16.785	16.748
1985	—	+ 0,7635	0,8215	18.122	18.174