

# Tubos Delgados de Grande Diâmetro Sob Pressão Interna e Flexão Transversal\*\*\*

## TEORIA EXÁTA

*J. M. DE TOLEDO MALTA, E. C.*

Ex-Engenheiro - Chefe da Secção de Estudos e Projetos da R. A. E. (3.ª S. T.)

Nas aduções de água e nas instalações hidro elétricas é frequente o emprego de tubos, possivelmente de concreto armado e, mais comumente, de aço, nas condições especificadas no título.

O cálculo da resistencia de tais tubos, no sentido transversal, é assunto que não está bem esclarecido, segundo se observa nos tratados sobre a materia, os quais, até onde alcança a noticia que dêles temos, ou se mostram simplesmente omissos, ou contribuem para divulgar e manter idéias e noções nem sempre corretas e algumas vezes erradas sobre esta importante questão. Na verdade, não se trata de uma simples questão de Resistencia dos Materiais mas, sim, de um problema de Estabilidade Elástica dos mais difíceis e complexos. Colocando-o em seus verdadeiros termos, encontrámos a solução que a seguir se apresenta, ignorando si outros, aqui ou alhures tenham chegado ou não a resultado igual, ou semelhante.

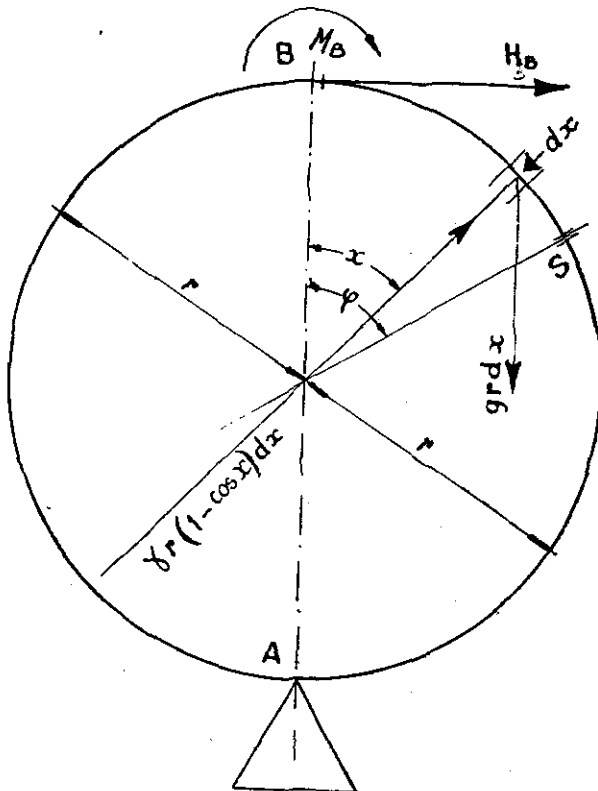


Fig. 1

(Para abreviar o texto, damos em anexo o formulário das integrais, não imediatas, que se apresentam na análise, permitindo pronta verificação).

(\*\*\*) Publicado na "Engenharia", N.º 67, Ano VI

## TUBO APOIADO SOBRE A GERATRIZ INFERIOR

Comprimento considerado	$l = 1$
Espessura (pequena)	$e$
Raio do círculo médio	$r$
Peso da chapa	$g$ por arco = 1
Peso do líquido	$\gamma$ por área = 1

Outras notações, de uso corrente, ou indicadas na figura.

## I — Generalidades

## 1 — Determinações das incógnitas hiperestáticas

Sendo  $M_Q$  o momento das cargas simétricas que atuam no arco  $\varphi$ , a expressão geral do momento flector na secção  $S$  (fig. 1) será:

$$M = M_B + H_B r(1 - \cos \varphi) + M_Q \quad (1)$$

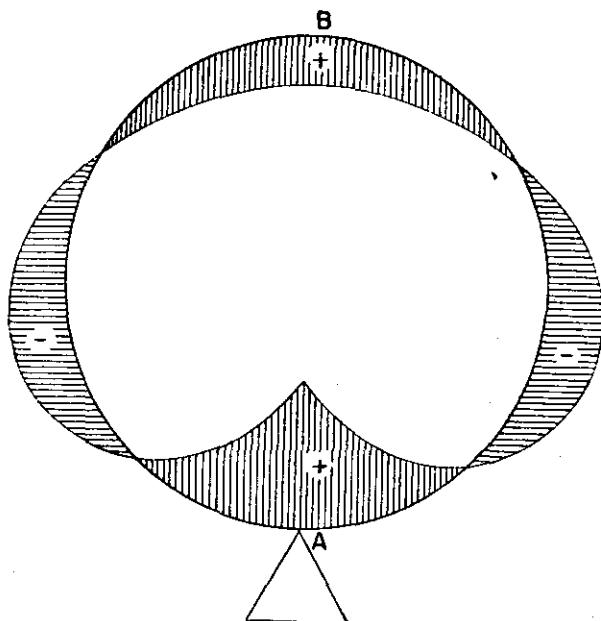


Fig. 2

Aplica-se o teorema de Castigliano ( $EJ = \text{const.}$ ):

$$A = \frac{r}{2EJ} \int_{-\pi}^{\pi} M^2 d\varphi \quad \frac{dA}{dX} = \delta_X = \frac{r}{EJ} \int_{-\pi}^{\pi} M \frac{dM}{dX} d\varphi$$

$$\text{a) } X = M_B \quad \delta_{M_B} = 0$$

$$\frac{dM}{dM_B} = 1 : \boxed{\int_0^{\pi} M d\varphi = 0} \quad (2)$$

$$\text{b) } X = H_B \quad \delta_{H_B} = 0 \quad \frac{dM}{dH_B} = r(1 - \cos \varphi)$$

$$\int_0^{\pi} M(1 - \cos \varphi) d\varphi = 0 \quad \text{e, em consequência de (2):}$$

$$\boxed{\int_0^{\pi} M \cos \varphi d\varphi = 0} \quad (3)$$

2 - Linha elástica

O anel considera-se como arco, cujas duas extremidades são engastadas no ponto A, separadas por um segmento infinitamente pequeno. Aplicando-se a força radial X na direção determinada pelo ângulo  $\varphi$  surge forças interiores  $V_1, H_1, M_1$  e  $V_2, H_2, M_2$ , à direita e à esquerda do apoio A, no qual provocam as reações  $V_A, H_A, M_A$ . (Fig. 3).

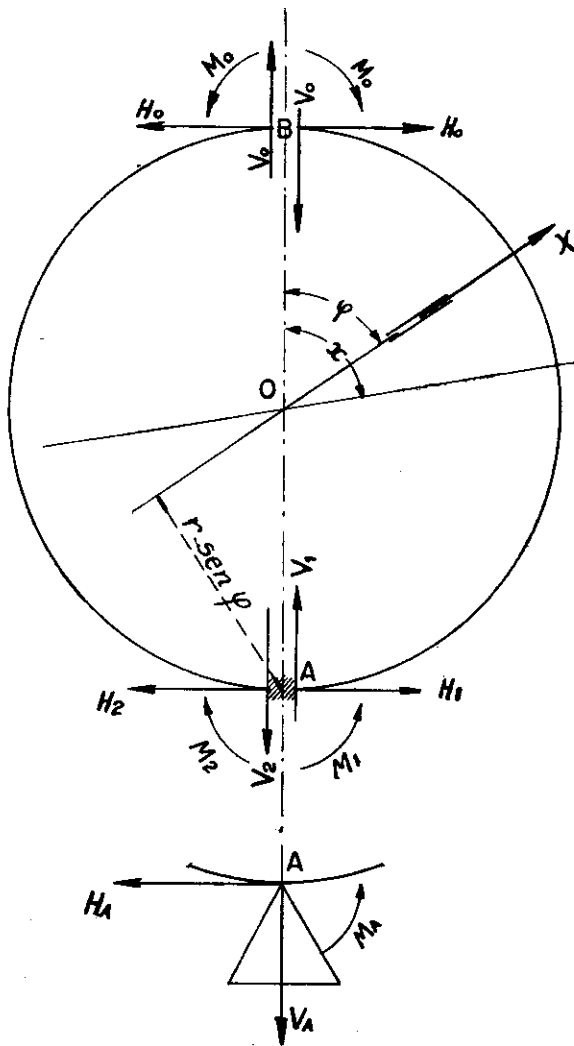


Fig. 3

Tomando-se para origem das coordenadas polares o eixo vertical OB, como no parágrafo precedente, teremos na secção B as forças interiores  $V_0, H_0, M_0$ , que se elegem como incógnitas hiperestáticas e em função das quais podem ser escritas todas as anteriormente mencionadas, da maneira seguinte:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 - X \text{ sen } \varphi & V_2 &= V_0 \\ H_1 &= -H_0 - X \text{ cos } \varphi & H_2 &= -H_0 \\ M_1 &= M_0 + 2rH_0 + rX \text{ sen } \varphi & M_2 &= M_0 + 2rH_0 \\ V_A &= V_2 - V_1 = X \text{ sen } \varphi \\ H_A &= H_2 - H_1 = X \text{ cos } \varphi \\ M_A &= M_1 - M_2 = rX \text{ sen } \varphi \end{aligned}$$

Satisfeitas as condições de equilíbrio estático, podemos, portanto, escrever os esforços interiores em qualquer ponto do anel em função de  $V_0, H_0, M_0$ , bem como as suas derivadas parciais em relação a X.

Sendo, pois,  $M_X$  os momentos flectores provocados pela força  $X$ , teremos:

a) metade direita

$$x \leq \varphi \quad M_X = M_0 + Hr(1 - \cos x) \quad \frac{dM_X}{dX} = 0$$

$$\boxed{x \geq \varphi} \quad M_X = M_0 + Hr(1 - \cos x) + Xr \operatorname{sen}(x - \varphi)$$

$$\boxed{\frac{dM_X}{dM} = r \operatorname{sen}(x - \varphi)}$$

b) metade esquerda

$$0 \leq x \leq \pi \quad M_X = M_0 + Hr(1 - \cos x) \quad \frac{dM_X}{dX} = 0$$

Resulta portanto, que as derivadas parciais de  $M_X$  em relação a  $X$  só não são nulas no arco  $XA$ , á direita.

Si a força  $X$  atuando com as demais cargas (simétricas) se anula, teremos  $M_X = 0$  e  $M$  como na eq. (1); porem  $\frac{\delta M}{\delta X} = \frac{\delta M_X}{\delta X}$  não se anulará em todos os pontos, como acabamos de ver. Segue-se, pelo teorema de Castigliano, que o deslocamento do ponto  $X$  no sentido radíal de dentro para fora, será:

$$\Delta X = \frac{r^2}{EJ} \int_{\varphi}^{\pi} M \operatorname{sen}(x - \varphi) d\varphi \quad (4)$$

## II — Peso Proprio do Tubo

$$M_Q = -gr^2 \int_0^{\varphi} (\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}x) dx = -gr^2(\varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - 1)$$

$$M = M_B + rH_B(1 - \cos\varphi) - gr^2(\varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - 1) \quad (5)$$

$$1.^{\circ} \text{ Condição: } \int_0^{\pi} M d\varphi = 0$$

$$\pi M_B + \pi r H_B = 0.$$

Donde

$$M_B + rH_B = 0. \quad (6)$$

$$2.^{\circ} \text{ Condição: } \int_0^{\pi} M \cos \varphi d\varphi = 0$$

$$-\frac{\pi r}{2} H_B - \frac{\pi}{4} gr^2 = 0$$

Donde

$$H_B = -\frac{1}{2} gr$$

e pela (6):

$$M_B = +\frac{1}{2} gr^2$$

Substituindo esses valores na (5) vem:

$$M = \frac{1}{2} gr^2 (2 - \cos\varphi - 2\varphi \operatorname{sen}\varphi) \quad (7)$$

A força cortante é  $T = \frac{dM}{r d\varphi}$ :

$$T = -\frac{1}{2} gr (2\varphi \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \quad (8)$$

A força normal é  $N = -H_B \cos\varphi - gr \varphi \operatorname{sen}\varphi$ :

$$N = -\frac{1}{2} gr (2\varphi \operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi) \quad (9)$$

### III — Peso do Líquido (isoladamente)

Supõe-se que o tubo está cheio até a geratriz superior, sem outra pressão.

$$M_Q = \gamma r^3 \int_0^\pi (1 - \cos x) \operatorname{sen}(\varphi - x) dx$$

$$M_Q = \frac{1}{2} \gamma r^3 (2 - 2\cos\varphi - \varphi \operatorname{sen}\varphi)$$

$$M = M_B - r H_B (1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2} \gamma r^3 (2 - 2\cos\varphi - \varphi \operatorname{sen}\varphi) \quad (10)$$

$$1.^\text{a} \text{ Condição: } \int_0^\pi M d\varphi = 0$$

$$\pi M_B + \pi r H_B + \frac{\pi}{2} \gamma r^3 = 0$$

Donde

$$M_B + r H_B = -\frac{1}{2} \gamma r^3 \quad (11)$$

$$2.^\text{a} \text{ Condição: } \int_0^\pi M \cos\varphi d\varphi = 0$$

$$-\frac{\pi r}{2} H_B - \frac{3\pi}{8} \gamma r^3 = 0$$

Donde

$$H_B = -\frac{3}{4} \gamma r^2$$

E, pela (11):

$$M_B = +\frac{1}{4} \gamma r^3$$

Levados os valores supra à (10), resulta:

$$M = \frac{1}{4} \gamma r^3 (2 - \cos\varphi - 2\varphi \operatorname{sen}\varphi) \quad (12)$$



$\varphi^\circ$	$K_1 = MP : Pr$	$K_2 = TP : P$	$K_3 = N_\theta : P$	$K_4 = N_\gamma : P$
0°	+ 0.0796	— 0 —	+ 0.0796	+ 0.2388
45°	— 0.0143	+ 0.1444	— 0.0321	+ 0.1737
50° 37'	— 0 —	—	—	—
90°	— 0.0909	+ 0.0796	— 0.2500	+ 0.0684
105° 15'	— 0.1015	— 0 —	— 0.3025	+ 0.0576
135°	— 0.0496	— 0.1992	— 0.3208	+ 0.1095
146° 19'	— 0 —	—	—	—
180°	+ 0.2388	— 0.5000	— 0.0796	+ 0.3988

2. — Sobre a forma do apóio. A teoria exposta presume que o tubo tem apóio continuo sobre a geratriz inferior. Essa hipótese jamais se realiza na prática: 1.º, porque os suportes são dispostos de distância em distância, de modo que o tubo trabalha como viga-contínua no sentido longitudinal; 2.º, porque cada suporte é um bérço de ângulo central entre 30° 60°, e nunca o simples cutêlo ideado na teoria. Crêmos ser a primeira divergência, entretanto geralmente inadvertida, a que mais pode afetar os resultados teóricos.\* Quanto à segunda, parece não ter a importância que alguns tratadistas lhe têm atribuído. Em consequência do princípio de Saint-Venant, a substituição da reação concentrada por outra distribuída, equivalente, sómente nas proximidades da região alterada poderá modificar a distribuição dos esforços internos e de maneira apreciável.

Pode-se admitir, portanto, com razoavel aproximação, supondo-se que a extensão do bérço é pequena em relação ao círculo: 1.º, que as reações aí se distribuem uniformemente; 2.º que os esforços internos sómente nessa extensão se alteram, sendo os erros, nas demais partes do arco, também pequenos e tanto mais desprezíveis quanto mais elas se afastam do apóio. Isso pôsto a correção dos esforços teóricos torna-se questão elementar, como se mostra na figura 4.

No ponto *A* a força cortante será zéro, em vez de  $\frac{1}{2} P$ . Portanto o momento  $M_A$  será o  $M_\pi$ , dado pela teoria, menos a área do triângulo  $ATT'$ :

$$M_A \cong M_\pi - \frac{1}{8} \beta r P$$

aproximadamente, considerando-se retilíneo o trêcho  $TT'$  do diagrama de forças cortantes.

3. — Deformações. Linha Elástica. Passemos a aplicar a fórmula (4) ao caso de sollicitações expresso pela equação (14):

$$\frac{4\pi EJ}{Pr^3} \Delta X = \int_\varphi^\pi (2 - \cos x - 2x \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} (x - \varphi) d\varphi$$

Substituindo  $\operatorname{sen} (x - \varphi) = \cos\varphi \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}\varphi \cos x$ , vem:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi EJ}{Pr^3} \Delta X = & \cos\varphi \int_\varphi^\pi (2 - \cos x - 2x \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} x dx - \\ & - \operatorname{sen}\varphi \int_\varphi^\pi (2 - \cos x - 2x \operatorname{sen} x) \cos x dx \end{aligned}$$

\* — Em outro artigo, caso o assunto desperte algum interesse, pretendemos tratar desta questão.

Feitas as integrações resulta:

$$\frac{8 \pi EJ}{Pr^3} \Delta X = -2\varphi \operatorname{sen} \varphi - (\pi^2 - 4 - \varphi^2) \cos \varphi + 4 \quad (17)$$

Para  $\varphi = 0$   $\Delta X_0 = -\frac{\pi^2 - 8}{8\pi} \frac{Pr^3}{EJ}$  (18)

Tira-se da (18):  $\frac{EJ}{Pr^3} = -\frac{\pi^2 - 8}{8\pi \Delta X_0}$ , relação que, levada à (17), permita escrever-se  $\Delta X$  em função de  $\Delta X_0$ :

$$\Delta X = \frac{\Delta X_0}{\pi^2 - 8} [2\varphi \operatorname{sen} \varphi + (\pi^2 - 4 - \varphi^2) \cos \varphi - 4] \quad (19)$$

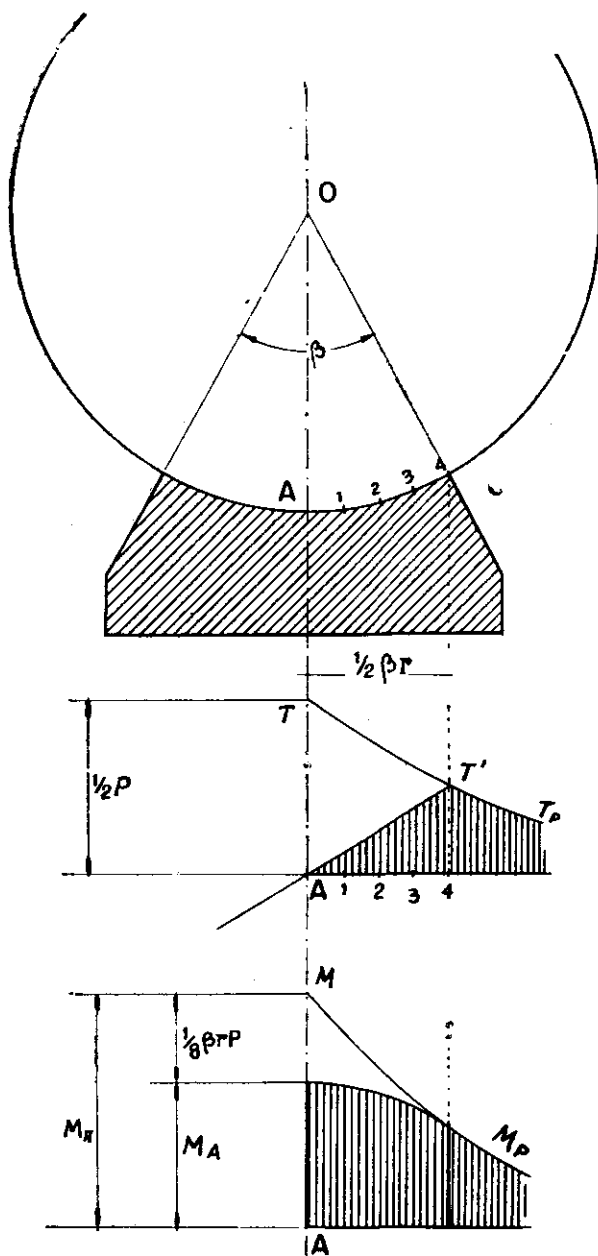


Fig. 4



Igualando a zero a derivada  $\frac{d\Delta X}{d\omega}$ , teremos as secções onde  $\Delta X$  passa por um máximo ou por um mínimo.

$$\varphi_0 = \begin{cases} 0^\circ \\ 112^\circ 40' = 1.967 \text{ rad.} \\ 180^\circ \end{cases}$$

A seguir damos alguns valores da relação  $\Delta X/\Delta X_0$ :

$\varphi^0 =$	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$112^\circ 40'$	$135$	$180^\circ$
$\frac{\Delta X}{\Delta X_0} =$	1	0.438	-0.461	-0.638	-0.481	0

Com os dados supra foi desenhada a linha elástica da figura 5.

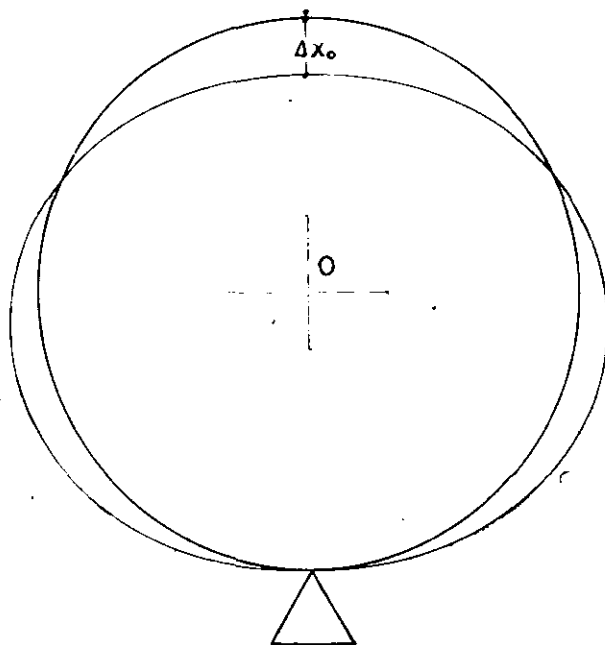


Fig. 5

Fomos obrigados a desenvolver esta parte preliminar, conquanto se trate de matéria já editada, por ser peça indispensável do processo subsequente.

## V — Pressão interna — Teoria Exata

1 — **Secção circular.** Quando se aplica a um tubo de secção circular de espessura  $e$  e raio  $r$  uma pressão interna  $p$ , sabe-se que, sendo pequena a relação  $e/r$ , as tensões provocadas serão de simples extensão uniformemente distribuída e igual a  $p r/e$ . Si essa pressão fôr gerada por um líquido pesado, o tubo, suportado nas condições da fig. 1, será solicitado, além disso, pelos esforços  $M, N, T$ , determinados pela teoria precedente, donde decorrem outras tensões, de cisalhamento e flexão composta. Quais serão, pois, as tensões finais?

— Si as alterações de forma forem tão diminutas que não possam modificar os esforços internos, aplica-se o princípio da superposição, visto que as tensões serão proporcionais às deformações: é o que acontece, por exemplo, com os tubos de cimento armado cuja maior espessura lhes confere grande rigidez. Quando, porem,

a parede do tubo é tão delgada que suas deformações se tornam apreciáveis e até visíveis, já não se pode aplicar o mesmo princípio, uma vez que os esforços internos são alterados e novos esforços são provocados por essas próprias deformações: é o caso dos tubos de aço de grande diâmetro, cuja rigidez é geralmente fraca, em contraste com sua grande resistência. Neste caso, que constitui o objeto principal deste estudo, não se trata mais de um problema de Resistência dos Materiais, porem de Estabilidade Elástica.

2. **Círculo deformado.** Já sabemos que, referida a um eixo vertical ascendente, com o pólo no centro do círculo primitivo, a equação da linha elástica devida às cargas  $P$  (peso próprio e do conteúdo líquido) é  $\rho = r + \Delta X$ , sendo  $\Delta X$  as deformações radiâis, medidas positivamente de dentro para fóra, isto é, quando representam alongamento do raio primitivo  $r$ , e negativamente quando são de encurtamento.

No ponto  $B$  da geratriz superior, com  $\varphi = 0$ , temos determinado :

$$\Delta X_0 = - \frac{\pi^2 - 8}{8\pi} \frac{Pr^3}{EJ}$$

Pondo-se, porem,

$$p_c = \frac{3EJ}{r^3}$$

sendo  $p_c$  a chamada pressão crítica de flambagem, vem :

$$\Delta X_0 = - \frac{\pi^2 - 8}{8\pi} \frac{3P}{p_c}$$

Alem disso, para qualquer outra geratriz tambem já foi estabelecida á formula geral :

$$\Delta X = \frac{\Delta X_0}{\pi^2 - 8} [2\varphi \operatorname{sen} \varphi + (\pi^2 - 4 - \varphi^2) \operatorname{cos} \varphi - 4] \quad (19)$$

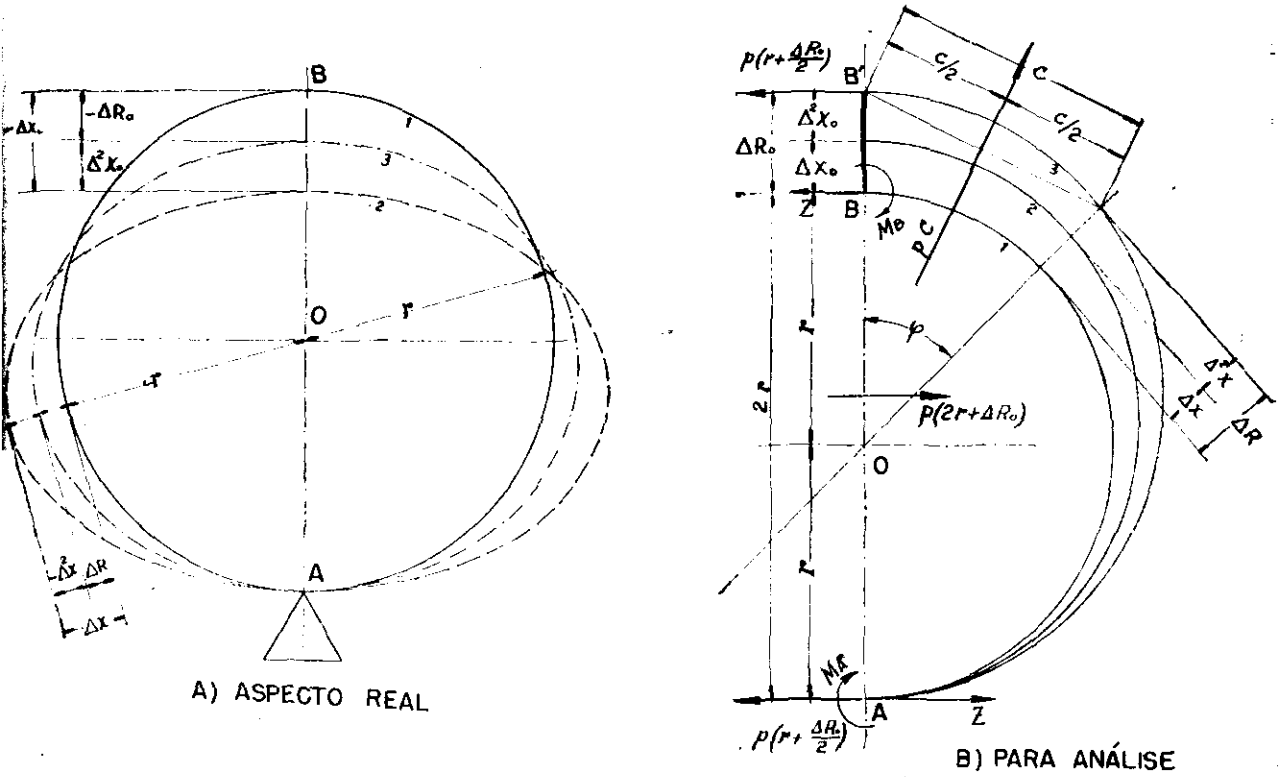
Submetendo-se o tubo à pressão interna  $p$ , essas deformações radiâis sofrem acréscimos  $\Delta^2 X$  de modo que o alongamento final do raio será  $\Delta R = \Delta X + \Delta^2 X$ , e a equação da nova linha elástica se tornará  $\rho = r + \Delta R$ . Suporemos, a seguir, que essas deformações do tubo, tanto iniciais como finais, são todas bastante pequenas para que se possam cancelar, sem erro apreciável, os termos onde elas se apresentem no 2.º gráu.

A linha elástica final tem na realidade a forma que se vê na figura 6 (A). Entretanto, para evitar equívocos de sinâis, imaginamos outra (B) da mesma familia, na qual todos os  $\Delta X$  e  $\Delta R$  são positivos, e sobre ela fundamos toda a análise subseqüente.

Consideramos o tubo (vide figura 6 B) cortado pelo seu centro O por um plano vertical, sendo a metade esquerda suprimida e substituída pelos esforços de ligação. Não havendo eixo horizontal de simetria, o problema é duas vezes estáticamente indeterminado, visto que as duas reações horizontais  $H_A$  e  $H_B$ , cuja soma é  $(2r + \Delta R_0)p$ , são diferentes. Chamamos  $Z$  à diferença, para mais ou para menos, entre cada uma delas e seu valor médio  $p(r + \frac{1}{2} \Delta R_0)$  de modo que

$$H_A = p \left( r + \frac{\Delta R_0}{2} \right) - Z \quad H_B = p \left( r + \frac{\Delta R_0}{2} \right) + Z$$

Supômos a reação  $Z$  aplicada no ponto  $B$  do círculo original, rigidamente ligado ao ponto correspondente  $B'$  do tubo em seu estado final. Os momentos em  $B$  e  $B'$  são iguâis a  $M_B$ , porquanto a pequena diferença  $Z \Delta R_0$ , entre ambos, é do 2.º gráu em  $\Delta$  e deve ser cancelada.



- 1 - Círculo original.
- 2 - Círculo deformado pelo peso próprio e da água (P).
- 3 - Linha elástica depois de aplicada a pressão interna (P + p)

Fig. 6

Isso posto, escrevamos agora a expressão do momento flector antagonista  $M_e$  na secção genérica de angulo polar  $\varphi$ :

$$M_e = M_B - Zr(1 - \cos \varphi) - p \left( r + \frac{\Delta R_0}{2} \right) [r + \Delta R_0 - (r + \Delta R) \cos \varphi] + \frac{1}{2} pc^2.$$

O valor da córdã c é dado pela conhecida fórmula trigonométrica:

$$c^2 = (r + \Delta R_0)^2 + (r + \Delta R)^2 - 2(r + \Delta R_0)(r + \Delta R) \cos \varphi$$

Cancelados os termos do 2.º grau em  $\Delta R$  ou  $\Delta R_0$ , obtem-se:

$$\frac{1}{2} c^2 = 2r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + 2r \Delta R_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} + 2r \Delta R \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$$

E, da mesma fórma:

$$\begin{aligned} - \left( r + \frac{\Delta R_0}{2} \right) [r + \Delta R_0 - (r + \Delta R) \cos \varphi] = & - \\ & - 2r^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} - r \Delta R_0 \left( 1 + \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right) + \\ & + r \Delta R \left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Somando membro a membro as duas ultimas igualdades vem:

$$-\left(r + \frac{\Delta R_0}{2}\right)[r + \Delta R_0 - (r + \Delta R) \cos \varphi] + \frac{1}{2} c^2 = - \\ - r \Delta R_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + r \Delta R$$

Portanto escreveremos:

$$M_\varepsilon = M_B - Zr(1 - \cos \varphi) - pr \Delta R_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + pr \Delta R$$

3. — Esses momentos  $M_\varepsilon$  são os que se manifestam depois de estabelecido o equilibrio elástico. São efeito das deformações  $\Delta X$  e causa das deformações  $\Delta^2 X$ , em presença da pressão interna.

Para determiná-los não seria licito partir da linha elástica  $\rho = r + \Delta X$  e aplicar o teorema de Castigliano para a determinação das incognitas  $Z$  e  $M_B$ . O resultado seria errôneo, porque esse famoso teorema presuppõe a proporcionalidade entre as deformações e as cargas exteriores que as produzem, hipótese nunca verificada quando os esforços interiores, provenientes da aplicação de tais cargas, dependem das deformações produzidas, as quais são ignoradas. Si elas fossem conhecidas o teorema seria applicavel, porquanto os esforços interiores são uma função da linha elástica, perfeitamente determinada. É o que acontece no caso da deformação elíptica do tubo, expressa por certo achatamento  $\varepsilon$ . A ellipse deformada é uma outra ellipse, de modo que não há sinão substituir  $\varepsilon$  por  $\varepsilon + \Delta \varepsilon$  para se passar de uma linha elástica para outra. No caso presente, porem, não é isso o que acontece: não um, somente mas todos os  $\Delta X$  se mudam em outros tantos  $\Delta R$ , não mais de acordo com a primitiva função de  $\varphi$  que os definia (eq. 19) porem de acôrdo com outra função, de fôrma diferente e ainda desconhecida. Para contornar esta dificuldade, tornando applicavel o teorema de Castigliano, vamos supôr conhecida essa função, sob e forma de série de Fourier, cujos coeficientes serão posteriormente determinados pela equação  $\Delta R = \Delta X + \Delta^2 X$ .

Visto que  $\Delta X_0$  é dado, escreveremos:

$$\Delta R = \Delta X + \Delta^2 X = \Delta X_0 [B_0 + B_1 \cos \varphi + \sum_{m=2}^{m=\infty} B_m \cos m\varphi]$$

Donde, com  $\varphi = 0$ :

$$\Delta R_0 = \Delta X_0 + \Delta^2 X = \Delta X_0 \sum_{m=0}^{m=\infty} B_m$$

Substituindo esses valores na expressão de  $M_\varepsilon$ , resulta:

$$M_\varepsilon = M_B - Zr(1 - \cos \varphi) - pr \Delta X_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sum_0^\infty B_m + \\ + pr \Delta X_0 (B_0 + B_1 \cos \varphi + \sum_2^\infty B_m \cos m\varphi)$$

Para achar  $Z$  e  $M_B$  temos as duas equações conhecidas:

$$\int_0^\pi M d\varphi = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^\pi M \cos \varphi d\varphi = 0$$

1.ª equação

$$\pi M_B - \pi Zr - \frac{\pi}{2} pr \Delta X_0 \sum_0^\infty B_m + \pi pr \Delta X_0 B_0 = 0 \\ M_B = Zr + \frac{1}{2} pr \Delta X_0 \sum_0^\infty B_m - pr \Delta X_0 B_0$$

2.ª equação

$$\frac{\pi}{2} Zr - \frac{\pi}{4} pr \Delta X_0 \sum_0^{\infty} B_m + \frac{\pi}{2} pr \Delta X_0 B_1 = 0$$

$$Z = p \Delta X_0 (-2B_1 + \sum_0^{\infty} B_m) = p \Delta X_0 (B_0 - B_1 + \sum_2^{\infty} B_m)$$

$$M_B = pr \Delta X_0 \sum_2^{\infty} B_m$$

Substituindo esses valores na última fórmula de  $M_c$  obtem-se, afinal:

$$M = pr \Delta X_0 \sum_2^{\infty} B_m \cos m\varphi \tag{20}$$

Desta equação se tira  $M_A = pr \Delta X_0 \sum_2^{\infty} B_m \cos m\pi$ .

Porem, pela estática,  $M_A = M_B - 2Zr$ , portanto:

$$M_A = pr \Delta X_0 (B_1 - B_0).$$

Comparando as duas expressões do valôr de  $M_A$ , conclue-se que

$$B_1 - B_0 = \sum_2^{\infty} B_m \cos m\pi$$

Donde

$$B_0 = B_1 - \sum_2^{\infty} B_m \cos m\pi \tag{21}$$

4. — Estabelecida que foi a fórmula dos momentos, podemos agora calcular a deformação  $\Delta^2 X$  por meio do teorema de Castigliano. Aplicando-se na secção de ângulo  $\varphi$  uma força radial  $X = 0$  de dentro para fóra, as derivadas parciais  $dM/dX$  serão nulas de zêro a  $\varphi$  e iguais a  $r \text{sen}(x - \varphi)$  de  $\varphi$  a  $\pi$ . Agora  $x$  é a variavel independente e  $\varphi$  uma constante.

Temos, segundo o processo já exposto, eq. (4):

$$\Delta^2 X = \int_{\varphi}^{\pi} \frac{M_c r \text{sen}(x - \varphi) r dx}{EJ}$$

Ou, por outra fórmula:

$$\frac{\Delta^2 X \cdot EJ}{r^2} = \cos \varphi \int_{\varphi}^{\pi} M_c \text{sen} x dx - \text{sen} \varphi \int M_c \cos x dx$$

Efetuadas as integrações, chega-se ao resultado seguinte:

$$\frac{\Delta^2 X \cdot EJ}{pr^3} = - \Delta X_0 \sum_2^{\infty} \frac{\cos m\pi \cos \varphi + \cos m\varphi}{m^2 - 1} B_m$$

Ponhamos porem,

$$\frac{EJ}{r^3} = \frac{p_c}{3}$$

Teremos, então

$$\Delta^2 X = - \frac{3p}{p_c} \Delta X_0 \sum_2^{\infty} \frac{\cos m\pi \cos \varphi + \cos m\varphi}{m^2 - 1} B_m$$

Como já foi dito no item 3, a condição fundamental, a ser preenchida para a validade das equações supra, exprime-se pela igualdade  $\Delta R = \Delta X + \Delta^2 X$ . Portanto, suprimido o fator comum  $\Delta X_0$ , temos necessariamente:

$$B_0 + B_1 \cos \varphi + \sum_2^{\infty} B_m \cos m\varphi = \frac{2\varphi \operatorname{sen} \varphi + (\pi^2 - 4 - \varphi^2) \cos \varphi - 4}{\pi^2 - 8} - \frac{3p}{p_c} \sum_2^{\infty} \frac{\cos m\pi \cos \varphi + \cos m\varphi}{m^2 - 1} B_m$$

Mediante permitidas transposições de termos, a equação supra pode ser posta sob a fôrma seguinte:

$$B_0 + B_1 \cos \varphi + \sum_2^{\infty} \left[ 1 + \frac{3p}{(m^2 - 1)p_c} \right] B_m \cos m\varphi = \frac{2\varphi \operatorname{sen} \varphi + (\pi^2 - 4 - \varphi^2) \cos \varphi - 4}{\pi^2 - 8} - \sum_2^{\infty} \frac{3p}{(m^2 - 1)p_c} B_m \cos m\pi \cos \varphi$$

Para abreviar, ponhamos

$$\frac{2\varphi \operatorname{sen} \varphi + (\pi^2 - 4 - \varphi^2) \cos \varphi - 4}{\pi^2 - 8} = F(\varphi)$$

$$1 + \frac{3p}{(m^2 - 1)p_c} = \frac{3p + (m^2 - 1)p_c}{(m^2 - 1)p_c} = f_m \quad (m=2, 3 \dots \infty)$$

$$\frac{3p}{(m^2 - 1)p_c} = \Psi_m \quad (m=2, 3 \dots \infty)$$

A última equação será então:

$$B_0 + B_1 \cos \varphi + f_2 B_2 \cos 2\varphi \dots + f_m B_m \cos m\varphi \dots = F(\varphi) - (\Psi_2 B_2 \dots + \Psi_m B_m \dots) \cos m\pi \cos \varphi$$

Multiplicando-se ambos os membros desta equação por  $\cos m\varphi d\varphi$  e integrando-os de zero a  $\pi$ , todos os termos das séries se anularão, excéto o que contem  $f_m B_m$ , para o qual

$$\int_0^{\pi} \cos^2 m\varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Resulta portanto

$$B_m = \frac{2}{\pi f_m} \int_0^{\pi} F(\varphi) \cdot \cos m\varphi d\varphi$$

O resultado da operação será diferente quando se fizer  $m = 1$ . Neste caso anular-se-ão todos os termos das duas séries excéto os que contêm  $\cos \varphi$ , para os quais

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ obtendo-se o valôr de } B_1:$$

$$B_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi) \cdot \cos \varphi d\varphi - \sum_2^{\infty} \Psi_m \cos m\pi B_m$$

Multiplicando-se, enfim, ambos os membros da equação por  $d\varphi$  e intregando de zero a  $\pi$ , anulam-se todos os termos das duas séries excéto o que contem  $B_0$ , cujo valôr será então:

$$B_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\varphi) d\varphi$$

Efetuando-se as integrações indicadas nas três últimas equações e pondo-se em lugar de  $f_m$  e  $\Psi_m$  os seus valores próprios, resultam as fórmulas seguintes que determinam os valores de todos os coeficientes  $B$ :

$$B_m = \frac{8}{\pi^2 - 8} \frac{\cos m\pi}{m^2 - 1} \frac{p_c}{3p + (m^2 - 1)p_c} \quad (22)$$

$$B_1 = \frac{4\pi^2 - 33}{6(\pi^2 - 8)} - \sum_2^{\infty} \frac{3p \cos m\pi}{(m^2 - 1)p_c} B_m \quad (23)$$

$$B_0 = 0 \quad (m = 2, 3, \dots, \infty) \quad (24)$$

Substituindo-se o valor achado  $B_0 = 0$  na eq. (21), acha-se também para  $B_1$  o valor seguinte:

$$B_1 = \sum_2^{\infty} B_m \cos m\pi \quad (23a)$$

Igualando-se os dois valores de  $B_1$  dados por (23) e, (23a), e pondo-se em lugar de  $B_m$  o seu valor dado por 22, obtém-se o seguinte resultado:

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{(m^2 - 1)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2} \dots = \frac{4\pi^2 - 33}{48} \cong 0.1350$$

Graças à rápida convergência da série supra, pode-se facilmente verificar a perfeita exatidão da igualdade obtida, provando-se, portanto, que são realmente idênticos os dois valores de  $B_1$ , fórmulas 23 e 23a.

Caso particular:  $p = 0$ . Neste caso a fórmula 23 dá:

$$B_1 = \frac{4\pi^2 - 33}{6(\pi^2 - 8)} \cong 0.5775$$

Porem, quando  $p = 0$ , deve-se ter, evidentemente,  $\Delta R_0 = \Delta X_0$ , ou  $\Delta R_0/\Delta X_0 = 1$ . Donde, em consequência da equação fundamental, que exprime  $\Delta R$  em série de Fourier:

$$B_1 + \sum_2^{\infty} B_m = 1 \quad (p = 0)$$

Ora, sendo  $p = 0$ , a fórmula (22) dá

$$B_m = \frac{8}{\pi^2 - 8} \frac{\cos m\pi}{(m^2 - 1)^2} \quad (p = 0)$$

Deduz-se portanto:

$$1 - \frac{4\pi^2 - 33}{6(\pi^2 - 8)} = \frac{\pi^2 - 8}{8} \sum_2^{\infty} \frac{\cos m\pi}{(m^2 - 1)^2}$$

ou

$$\sum_2^{\infty} \frac{\cos m\pi}{(m^2 - 1)^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{15^2} \dots = \frac{2\pi^2 - 15}{48} \cong 0.0987$$

A exatidão deste resultado pode ser verificada com bastante facilidade.

Com a determinação dos coeficientes da série de Fourier o problema esta resolvido de maneira teoricamente perfeita. Alguns complementos são porem necessários tendo-se em vista o cálculo numérico, destinado às aplicações práticas.

5. Levando-se o valor achado de  $B_m$  à eq. (20) que dá  $M_\varepsilon$ , e pondo-se em vez  $\Delta X_0$  o seu valor em função de  $P$ , obtem-se a fórmula desses momentos flectores em série de Fourier:

$$M_\varepsilon = -Pr \sum_2^\infty \frac{\cos m\pi}{(m^2 - 1)\pi} \frac{3p}{3p + (m^2 - 1)p_c} \cos m\varphi$$

Ponhamos

$$A_m = \frac{\cos m\pi}{(m^2 - 1)\pi} \frac{3p}{3p + (m^2 - 1)p_c} \quad (24)$$

Ponhamos tambem

$$\lambda = \frac{p}{p_c}$$

Teremos então

$$A_m = \frac{\cos m\pi}{(m^2 - 1)\pi} \frac{m = 3\lambda}{3\lambda + m^2 - 1} \quad (25)$$

$m = 2, 3, \dots, \infty$

$$B_m = \frac{p_c}{3p} \frac{8\pi}{\pi^2 - 8} A_m \cong 4.48 \frac{A_m}{\lambda} \quad (26)$$

$m = 2, 3, \dots, \infty$

$$\Psi_m B_m = \frac{8\pi}{\pi^2 - 8} \frac{A_m}{m^2 - 1} \cong 13.44 \frac{A_m}{m^2 - 1} \quad (27)$$

$m = 2, 3, \dots, \infty$

Numéricamente a fórmula dos momentos, em série, apresenta-se da seguinte maneira: (\*)

$$M_\varepsilon = -\frac{Pr}{3\pi} \frac{3p}{3p + 3p_c} \cos 2\varphi + \frac{Pr}{8\pi} \frac{3p}{3p + 3p_c} \cos 3\varphi \dots$$

$$\dots + \frac{Pr \cos m\pi}{(m^2 - 1)\pi} \frac{3p \cos m\varphi}{3p + (m^2 - 1)p_c} \dots$$

Simbólicamente

$$M_\varepsilon = -Pr \sum_2^\infty A_m \cos m\varphi \quad (28)$$

(\*) O primeiro termo da série supra é  $-\frac{Pr}{3\pi} \frac{p}{p + p_c}$ . Si a pressão fôsse externa, em vez de interna, teriamos obtido:  $+\frac{Pr}{3\pi} \frac{p}{p_c - p}$ . Confirma-se, portanto, o caráter da pressão crítica, estabelecido pela teoria clássica da flambagem dos tubos sob pressão externa; pois si fôr  $p = p_c$ , o momento crescerá até o infinito, isto é, o completo esmagamento será certo e inevitavel, por menor que seja a deformação inicial.



Vê-se que para cada valôr da relação  $\lambda = p/p_c$  os coeficientes variam de maneira diferente. Para se abranger todo o campo das applicações é necessário fazer variar  $\lambda$  de zêro ao infinito, a intervalos variáveis, de maneira tal que seja lícito interpolar para os valores intermediários. Conseguimos satisfazer a esta condição considerando  $\lambda = /0/0/30/0/60/1/0/1/5/2/0/3/0/4/0/5/0/7/0/10/0/\infty/$ , valores para os quais calculámos os coeficientes até alcançar-se, na sexta casa decimal, uma cifra menos que 5.

Procedendo-se dessa fôrma, os resultados obtidos são bastantes corretos, pelo menos até a terceira casa decimal, com aproximação mais que suficiente para o uso a que se destinam. Infelizmente as séries são pouco convergentes, tanto menos quanto maior o valôr de  $\lambda$ . Para  $\lambda = \infty$ , somente com  $m = 179$  se obtem  $A_m < 0.000005$ . Com  $\lambda = 0.30$  chega-se ao mesmo limite com  $m = 16$ .

Reunimos no quadro seguinte os resultados numéricos desses cálculos, mediante os quais será possível resolver qualquer caso particular que se apresente na prática.

$\lambda = p/p_c$	$-\frac{M_A}{Pr} = \sum_2^{\infty} A_m \cos m\pi$	$-\frac{M_B}{Pr} = \sum_2^{\infty} A_m$	$(B_0 = 0)$ $B_1 = \sum_2^{\infty} B_m \cos m\pi$	$(B_0 = 0)$ $\sum_0^{\infty} B_m = \frac{\Delta R_0}{\Delta X_0}$
0	0.0000	0.0000	0.5775	1.0000
0.3	0.0307	0.0213	0.4592	0.7780
0.6	0.0514	0.0341	0.3840	0.6387
1.0	0.0707	0.0447	0.3168	0.5172
1.5	0.0377	0.0528	0.2617	0.4194
2.0	0.1000	0.0580	0.2239	0.3537
3.0	0.1172	0.0641	0.1750	0.2707
4.0	0.1289	0.0675	0.1444	0.2201
5.0	0.1377	0.0697	0.1232	0.1856
7.0	0.1510	0.0724	0.0961	0.1424
10.0	0.1620	0.0745	0.0725	0.1059
$\infty$	0.2388	0.0796	0.0000	0.0000

O quadro supra faz vêr que a fôrma circular primitiva não se restabelece jámais, por maior que seja a pressão interna, pois apenas no limite, com  $p = \infty$ , teremos  $\Delta R = 0$  e toda a flexão oriunda de  $P$  anulada por momentos antagonistas iguáis e contrários aos iniciais. Nem poderia ser de outra maneira, porquanto não há possibilidade de momentos no círculo nem, tampouco, de se voltar ao círculo sem momentos. Para pressões limitadas, por grandes que sejam, os momentos antagonistas  $M_e$  são sempre menores, em valôr absoluto, do que os primitivos  $M_P$ . A relação  $M_A : M_B$  igual a 3 no limite  $p = \infty$ , (como no caso das cargas  $P$ ) tende para 1 à medida que a pressão decréscce, de modo que a redução do momento na geratriz superior é sempre maior, relativamente, que na inferior, onde o momento é máximo.

6. — Tensões Finaís. — Antes de ser posta em carga, uma tubulação pode funcionar durante certo tempo sem pressão. A verificação das tensões máximas desdobra-se em duas fases, por conseguinte:

Fase I — Tubo cheio sem pressão: ação isolada de  $P$ .

Fase II — Tubo cheio sob pressão interna: ação conjunta de  $P + p$ .

Basta considerar a secção do apoio que é de todas a mais severamente solicitada.

A seguir designaremos por  $\sigma_I$  e  $\sigma_{II}$  as tensões máximas calculadas para a I e II fases, e por  $\sigma_a$  a tensão máxima admissível, em virtude de norma legal ou de especificação.

Sendo  $\beta$  o ângulo central do berço de apoio, temos

$$\sigma_I = \frac{NP}{le} + \frac{6MP}{le^2}$$

Podemos por aproximadamente:

$$\begin{aligned} MP &\cong (0.239 - 0.125 \beta) Pr \\ NP &\cong 0.230 P \end{aligned}$$

Seja  $n = 0.239 - 0.125 \beta$ . Então teremos

$$\sigma_I = \frac{0.280 P}{le} + \frac{6 n Pr}{le^2}$$

Para a Fase II, chamemos  $k$  ao coeficiente igual a  $\sum_2^{\infty} A_m \cos m\pi$  que se encontra no quadro numérico, em frente ao correspondente valôr de  $\lambda = p/p_c$ . Teremos:

$$\sigma_{II} = \sigma_I - \frac{6 k Pr}{le^2} + p \frac{r}{e}$$

Ou, sendo  $p = \lambda p_c$ :

$$\sigma_{II} = \sigma_I - \frac{6 k Pr}{le^2} + \lambda p_c \frac{r}{e} \quad (29)$$

A curva  $k = f(\lambda)$  desenhada na fig. 7 vai servir, juntamente com as fórmulas supra, para se resolverem com facilidade diversos problemas de verificação de tensões finais.

**1.º Problema** — Para um tubo dado, achar a pressão  $p_0$  abaixo da qual  $\sigma_{II}$  se conserva menor ou, no máximo igual a  $\sigma_I$ .

**Solução** — A equação (29) fornece a condição

$$\lambda p_c \frac{r}{e} \leq \frac{6 k Pr}{le^2}$$

ou 
$$\frac{k}{\lambda} \geq \frac{le p_c}{6 P}$$

No limite 
$$\frac{k_0}{\lambda_0} = \frac{le}{6 P} p_c$$

Marcando no diagrama da fig. 7 o ponto

$$\left( \lambda = 1, \quad k = \frac{le}{6 P} p_c \right)$$

e ligando-o á origem por uma linha réta, a intersecção desta com a curva dará  $\lambda_0$  e  $k_0$ . Qualquer pressão inferior a  $p_0 = \lambda_0 p_c$  não fará sinão reduzir as tensões da fase I. No limite, com  $p = p_0$ , a tensão máxima inicial será restabelecida.

**2.º Problema** — Para um tubo dado achar a máxima pressão  $p_0$  que se lhe pode aplicar sem que seja excedida a tensão máxima admissível  $\sigma_a$ .

**Solução** — As fórmulas precedentes de  $\sigma_I$  e  $\sigma_{II}$  dão

$$\sigma_I - \frac{6 k Pr}{le^2} + \lambda p_c \frac{r}{e} \leq \sigma_a$$

ou 
$$k \geq \frac{le}{6 P} p_c \lambda - (\sigma_a - \sigma_I) \frac{le^2}{6 Pr}$$

No limite 
$$k_0 = \frac{le}{6 P} p_c \lambda_0 - (\sigma_a - \sigma_I) \frac{le^2}{6 Pr}$$

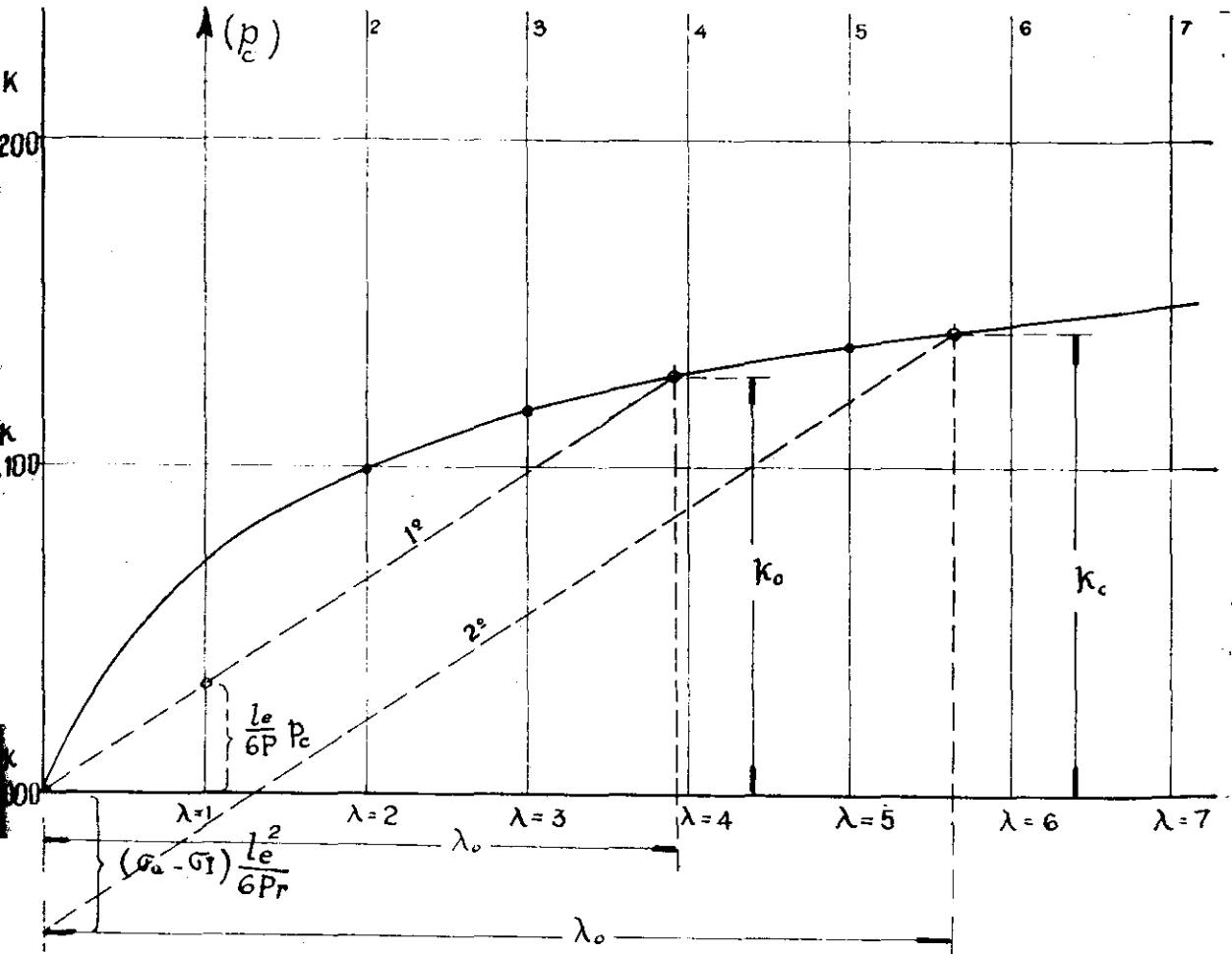


Fig. 7

Vê-se que sendo  $\sigma_1 = \sigma_a$  este problema se confunde com o primeiro. Medindo-se na origem uma ordenada negativa  $(\sigma_a - \sigma_1) \frac{l_e^2}{6Pr}$  e traçando por sua extremidade uma paralela á reta do problema anterior, teremos determinado na intersecção com a curva os valores procurados de  $k_0$  e  $\lambda_0$ . Donde  $p_0 = \lambda_0 p_c$ .

Si, para um tubo dado qualquer, fazendo variar a pressão interna, calcularmos os valores correspondentes da tensão máxima  $\sigma_{II}$ , e si traduzirmos os resultados num gráfico, obteremos sempre uma curva semelhante à que se vê na figura 8. A linha réta  $OM$  representa a variação das tensões de tração simples que seriam provocadas pela pressão interna no tubo de secção circular perfeita. Ora a teoria exposta demonstra que no limite, com  $p = \infty$ , desaparecem todas as deformações primitivamente ocasionadas pelo peso do tubo cheio e, com élas, todas as solicitações de flexão; de modo que ficam atuando, afinal, precisamente aquelas trações simples, e unicamente élas. Deduz-se, portanto, que  $OM$  é um assíntota da curva  $\sigma_{II}$ .

A conclusão final a que nos leva esta rigorosa análise é simplicíssima: um tubo capaz de resistir isoladamente à pressão interna (sem flexões) e ao seu peso, cheio, (sem pressão) pode, até certo limite resistir com folga à soma dessas duas solicitações. O interesse prático da questão reside justamente no proveito econômico que dessa folga seja possível tirar-se, nos casos concretos.



$$9. \int \varphi^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi = \frac{\varphi^3}{6} - \frac{\varphi^2 \operatorname{sen} 2\varphi + \varphi \operatorname{cos} 2\varphi}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2\varphi}{8} + c$$

$$10. \int \varphi^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} \varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \left( -\varphi^2 \operatorname{cos} 2\varphi + 2\varphi \operatorname{sen} 2\varphi + \operatorname{cos} 2\varphi \right) + c$$

A seguir:  $m =$  numero inteiro e  $m \geq 2$

$$11. \int \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi = \frac{-m \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi + \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi}{m^2 - 1} + c$$

$$12. \int \operatorname{sen} \varphi \cdot \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi = \frac{m \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} m\varphi + \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi}{m^2 - 1} + c$$

$$13. \int \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi = \frac{-m \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} m\varphi}{m^2 - 1} + c$$

$$14. \int \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi = \frac{m \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi}{m^2 - 1} + c$$

$$15. \int \varphi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi = \frac{-m}{m^2 - 1} \int \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi - \frac{m^2}{m^2 - 1} \int \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi + \frac{\varphi (m \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} m\varphi + \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi)}{m^2 - 1} + \frac{m \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi}{m^2 - 1} + c$$

$$16. \int \varphi \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi = \frac{m}{m^2 - 1} \int \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi + \frac{2m}{m^2 - 1} \int \varphi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi - \frac{\varphi (m \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi + \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} m\varphi)}{m^2 - 1} + \frac{m \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi - \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi}{m^2 - 1} + c$$

$$17. \int \varphi^2 \operatorname{cos} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi = \frac{\varphi^2 (m \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi - \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi)}{m^2 - 1} - \frac{2m}{m^2 - 1} \int \varphi \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi + \frac{2}{m^2 - 1} \int \varphi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi + c$$

$$18. \int \varphi^2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi = \frac{\varphi^2 (-m \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi + \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi)}{m^2 - 1} + \frac{2m}{m^2 - 1} \int \varphi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{cos} m\varphi \, d\varphi - \frac{2}{m^2 - 1} \int \varphi \operatorname{cos} \varphi \operatorname{sen} m\varphi \, d\varphi + c$$