

Tubos de concreto percintados sob tensão inicial para pressões elevadas

(anexo ao parecer)

pelo eng. J. M. de Toledo Malta

Eng. Chefe da 3.ª S. T.

Tubos espessos sob pressão

1.ª PARTE

Tubos homogêneos

Theoria Geral

1. — Seja o tubo de raio interno a_1 , e externo a_2 de comprimento l , cuja secção transversal se vê representada na figura 1. A pressão interna é p por unidade de superfície, actuando uniformemente e normalmente em todos os pontos da parede interna.

Isolemos dentro da espessura da parede cylindrica um elemento de comprimento l , limitados por dois cylindros de raios x e $x + dx$ e por dois planos radiaes formando entre si o angulo diedro infinitamente pequeno $d\varphi$.

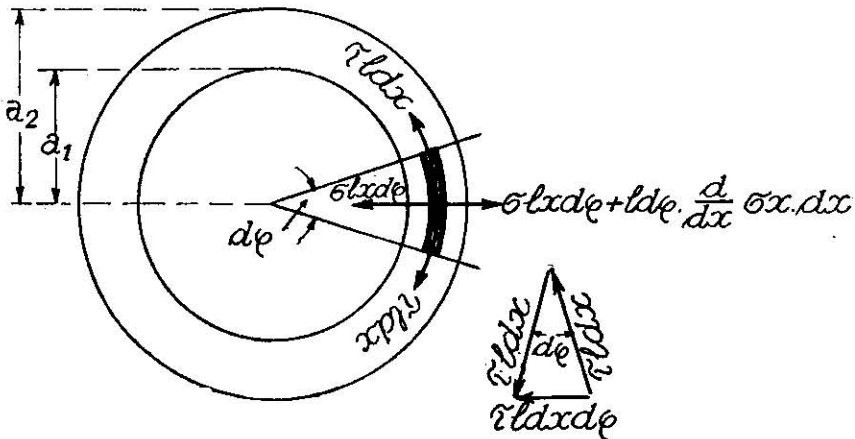


Fig. 1

Sejam σ e τ os esforços unitários sobre as faces desse elemento: o primeiro na direcção radial, o segundo na tangencial. E' de ver que taes são as duas direcções principaes do estado elastico considerado, porquanto é evidente, por causa da symetria, não haver esforço algum de escorregamento nas faces do elemento. Subintende-se que prescindimos dos esforços molleculares parallellos ao eixo do tubo, o qual se suppõe livre de se deformar sem nenhum vinculo nessa direcção axial.

Na figura representam-se os esforços no sentido considerado positivo, correspondente á extensão. Resulta que as forças radiaes dão uma resultante $l d\varphi \frac{d}{dx} \sigma x \cdot dx$ dirigida para fóra.

A resultante das forças tangenciaes, segundo a mesma convenção, é $l d\varphi \tau dx$, dirigida para dentro.

O equilibrio do elemento exige que se tenha, por conseguinte:

$$\boxed{\frac{d}{dx} \sigma x = \tau} \quad (1)$$

2. — Submettido ás forças que o sollicitam, o tubo, sendo homogeneo, deforma-se conservando a sua forma circular. O raio do elemento considerado, que era x , augmenta passando a ser $x + u$. O problema que é conhecer σ e τ redunda em determinar essa dilatação u ; pois as deformações, radial e tangencial, a que estão ligados esses esforços pela lei fundamental da elasticidade, são funcções de u facilmente deduzidas

A deformação proporcional na direcção radial é, por definição:

$$\boxed{\varepsilon_r = \frac{du}{dx}} \quad (2)$$

Na direcção tangencial, visto que a circumferencia é proporcional ao raio, temos evidentemente:

$$\boxed{\varepsilon_t = \frac{u}{x}} \quad (3)$$

3. — Até aqui não fizemos hypothese alguma sobre a lei segundo a qual se deforma o material do tubo.

As equações 1) 2) 3) são absolutamente geraes.

Daqui em diante porem, precisaremos recorrer a tal lei para exprimirmos σ e τ em funcção de ε_r e ε_t .

Portanto tudo quanto se segue somente é applicavel aos materiaes que se conformam com a lei de Hooke, pelo menos dentro dos limites dos esforços maximos e minimos a que estejam sujeitos.

A lei de Hooke traduz-se pelas seguintes formulas da Resistencia dos Materiaes, onde E é o modulo de elasticidade e m o coefferiente de Poisson, ou de contracção transversal:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{E} - \frac{\tau}{mE}$$

$$\varepsilon_t = \frac{\tau}{E} - \frac{\sigma}{mE}$$

das quaes se tira :

$$\sigma = \frac{mE}{m^2 - 1} (\varepsilon_t + m \varepsilon_r)$$

$$\tau = \frac{mE}{m^2 - 1} (\varepsilon_r + m \varepsilon_t)$$

E, escrevendo em vez de ε_r e ε_t seus valores dados em 2) e 3)

$$\begin{cases} \sigma = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(\frac{u}{x} + m \frac{du}{dx} \right) \\ \tau = \frac{mE}{m^2 - 1} \left(\frac{du}{dx} + m \frac{u}{x} \right) \end{cases} \quad (4)$$

Effectuando-se agora sobre a primeira, destas duas ultimas, a operação indicadada em (1) e igualando o resultado á segunda, resulta :

$$x \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0 \quad (5)$$

4. — Esta equação differencial, que contem a solução do problema, integra-se com facilidade. Multiplicando-a por $\frac{1}{x}$, factor de integração, poderemos escrever

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{x \frac{du}{dx} - u}{x^2} = 0$$

que é uma differencial exacta. Integrando a vem

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 2N$$

que tambem se póde escrever dest'outra forma :

$$xdu + udx = N(2xdx)$$

outra differencial exacta que, integrada, nos dá: $xu = Nx^2 + A$

ou

$$u = Nx + \frac{A}{x} \quad (6)$$

Esta ultima é bem a integral geral da equação (5) visto conter duas constantes arbitrarías, N e A . Estas serão determinadas em cada caso mediante condições apropriadas aos limites.

Da equação (6) tiramos

$$\frac{u}{x} = N + \frac{A}{x^2} \text{ e } \frac{du}{dx} = N - \frac{A}{x^2}$$

Valores que, substituidos nas equações (4), nos dão:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{m E}{m^2 - 1} \left[(m + 1) N - (m - 1) \frac{A}{x^2} \right] \\ \tau = \frac{m E}{m^2 - 1} \left[(m + 1) N + (m - 1) \frac{A}{x^2} \right] \end{cases} \quad (7)$$

Si puzermos

$$\frac{m EN}{m - 1} = Q \quad \frac{m EA}{m + 1} = S$$

obteremos as equações de forma simplificada:

$$\begin{cases} \sigma = Q - \frac{S}{x^2} \\ \tau = Q + \frac{S}{x^2} \end{cases} \quad (8)$$

Note-se que até aqui não interveiu, directa ou indirectamente, a pressão interna p . As equações (7) e (8) são geraes e applicaveis a qualquer especie de sollicitação, seja interna ou externa, que, pela sua symetria e uniformidade, não possa alterar a fôrma circular do tubo.

5. — Si as forças exteriores se reduzem á pressão interna p , devemos ter $\sigma = -p$ para $x = a_1$ e $\sigma = 0$ para $x = a_2$. Donde se deduzem os valores de Q e S das equações (8):

$$\begin{aligned} S &= p \frac{a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} \\ Q &= p \frac{a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \end{aligned}$$

Portanto, substituindo esses valores nas (8):

$$\begin{aligned} \sigma &= - \frac{p a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{a_2^2 - x^2}{x^2} \\ \tau &= + \frac{p a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} \frac{a_2^2 + x^2}{x^2} \end{aligned} \quad (10)$$

6. — As equações ou formulas acima reclamam diversos commentarios. Ellas dão os valores dos esforços molleculares principaes em qualquer ponto da parede do tubo. Em particular permitem calcular

os valores maximos absolutos de taes esforços. Ambos occorrem na face interna do tubo ($x = a_1$):

$$\begin{aligned} \max. \sigma &= \sigma_1 = -p \\ \max. \tau &= \tau_1 = \frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} p \end{aligned}$$

Pergunta-se si o conhecimento desse dois maximos é sufficiente para se avaliar a resistencia do tubo.

A resposta não tem a precisão que se poderia esperar de uma sciencia tão avançada como é a Resistencia dos Materiaes. Em verdade tratando-se de um estado elastico duplo ou triplo, ignora-se a que causa se deva attribuir directamente a possibilidade da ruptura. A falta de uma noção positiva é supprida por theorias ou, antes, opiniões. A mais simples de todas é a que suppõe a ruptura dependente unicamente do maior dos esforços principaes. Segundo outras a causa determinante da ruptura não é o maior dos esforços principaes porem a maior deformação. Estas subdividem-se em duas: a primeira considera como decisiva a maxima distorsão, a segunda como tal considera a maxima dilatação.

Difficilimo seria fundamentar a preferencia por uma ou outra dessas tres theorias. Em certos casos ellas conduzem a resultados largamente discordantes. Então o mais prudente será ater-se á hypothese mais desfavoravel. Todavia, no caso particular que é o objecto deste estudo, pode-se dizer que ha um esforço principal francamente predominante, a saber, o esforço τ , na direcção tangencial, o qual é uma extensão. O outro esforço, σ , muito menor em valor absoluto, é de compressão.

Actuando perpendicularmente ao anterior, augmenta-lhe a dilatação respectiva pelo effeito da expansão transversal. Por estas duas razões, predominancia de τ , aggravada pelo signal contrario de σ , podemos preferir, no caso particular figurado, a theoria baseada na consideração da maxima dilatação.

Segundo essa theoria, verifica-se a resistencia da peça substituindo ao estado real um *estado elastico de comparação* no qual um unico *esforço elastico de comparação* seja capaz de provocar a mesma dilatação maxima. No caso em apreço temos:

$$\begin{aligned} \frac{u}{x} &= N + \frac{A}{x^3} \\ \max. \frac{u}{x} &= N + \frac{A}{a_1^3} \end{aligned}$$

Chamando-se R ao esforço elastico de comparação,

$$R = E \left(\max. \frac{u}{x} \right) = EN + \frac{AE}{a_1^3}$$

substituindo-se

$$EN = \frac{m-1}{m} Q = \frac{m-1}{m} \frac{p a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}$$

$$AE = \frac{m+1}{m} S = \frac{m+1}{m} \frac{p a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}$$

resulta

$$R = \frac{p [(m-1) a_1^2 + (m+1) a_2^2]}{m (a_2^2 - a_1^2)} \quad (11)$$

7. — Convem consignar uma particularidade da segunda das formulas (10). Já vimos que para $x = a_1$,

$$\tau_1 = \frac{a_2^2 + a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} p$$

Façamos $x = a_2$, virá

$$\tau_2 = \frac{2 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2} p$$

Portanto, $\tau_1 - \tau_2 = p$. Quer dizer que a differença entre as extensões tangenciaes nas duas faces da parede cylindrica é independente das dimensões transversaes do tubo e igual á pressão interna.

Esta particularidade leva-nos a uma conclusão inesperada. Si τ é sempre muito maior do que p (o que acontece, por exemplo, nos encanamentos de aço ou ferro fundido sob pressões usuaes) a variação de τ é relativamente pequena e, nesse caso, pode-se admittir sem erro apreciavel que este esforço de extensão se distribue uniformemente. Si em vez se trata, por exemplo, de tubos para alimentação de turbinas de alta pressão (para não falar nas peças de artilharia) — já então o valor de p talvez se aproxime do limite admissivel para τ . Nesse caso, por delgado que seja o tubo, não será licito, sem grave erro, admittir-se a hypothese daquella distribuição uniforme, porquanto os valores extremos de τ poderão variar quasi do singelo para o dobrado. Em summa: o indice da uniformidade de distribuição das tensões tangenciaes, num tubo sob pressão, é unicamente o menor ou maior valor da relação $\frac{p}{\tau}$, nunca o da relação entre a espessura e o raio, como vulgarmente se presume.

8. — As formulas (10), segunda, e (11) mostram que tanto τ como R são sempre maiores do que p .

Conclue-se dahi ser irrealisavel um tubo singelo capaz de resistir a uma pressão interna superior ao limite de resistencia á extensão simples do material de que é feito, por mais que se lhe augmente a espessura.

Verifica-se, de mais a mais, que a partir de certo limite (proximamente igual ao diametro) o augmento da espessura não reduz quasi nada o valor de τ .

Essa limitação da resistencia dos tubos singelos, de pouca importancia na construcção dos encanamentos de ferro fundido ou de aço, destinados a supportar pressões hydraulicas moderadas, tornou-se grave preocupação dos fabricantes de tubos de ferro fundido para turbinas de alta pressão, em vista da escassa resistencia desse material á extensão. Todavia o campo em uue tal difficuldade se impoz mais seriamente foi o dos constructores de armas de fôgo, deante da potencia cada vez maior dos explosivos modernos, capazes de gerar pressões da ordem de 3000 atmosferas. Foram os fabricantes de armamentos os inventores do systema "fretté" hoje universalmente conhecido, solução engenhosissima de um problema aparentemente insuperavel, a qual da industria da guerra, já passou para a engenharia civil.

O artificio empregado, de que a seguir nos occuparemos, pode ir ao ponto de se inverter para compressão o esforço unitario de direcção tangencial. Este é o resultado que se deseja conseguir para os tubos de concreto armado por dois motivos: primeiro, por ser o concreto incapaz de supportar esforços de extensão por pouco que sejam apreciaveis; segundo, porque mesmo quando se dispõem na sua massa armaduras de aço, capazes de absorver por si sós esses esforços, ainda assim falta satisfazer a condição de estanqueidade do tubo, geralmente incompativel com as deformações consequentes, que o concreto não pode soffrer sem se fendilhar, tornando-se porôso e portanto imprestavel.

Tubos espessos sob pressão

2.^a PARTE

Tubos de concreto percintados sob tensão inicial

1. — Supponhamos que sobre o tubo da figura 1 se haja enrolado uma espiral de aço, fixando-a de maneira tal que qualquer dilatação radial do tubo seja contrariada pela espiral. Deste modo a pressão interna provocará tensões tangenciaes no concreto e no aço simultaneamente.

Para se fazer o estudo analytico do caso figurado é necessario considerar o enrolamento como se fosse um segundo tubo, ou luva continua, de secção longitudinal equivalente, cingindo exactamente o primeiro. Seja a_3 o raio exterior dessa luva ficticia.

Si tubo e enrolamento fossem ambos do mesmo material, não precisariamos tratar particularmente deste caso.

Bastaria fazer $a_2 = a_3$ em todas as equações e formulas da primeira parte, para se obter qualquer resultado desejado.

Tratando-se porem de uma peça mixta e heterogenea, a marcha dos calculos é algo diversa e um tanto mais longa. Todavia segue pelos mesmos tramites da anterior.

2. — Doravante affectaremos dos indices c e f , respectivamente, as grandezas referentes ao tubo de concreto e á luva ficticia de aço, para as distinguir.

As equações fundamentaes são:

$$U_c = N_c x + \frac{A_c}{x} \left(x \leq a_2 \right)$$

$$U_f = N_f x + \frac{A_f}{x} \left(x \geq a_2 \right)$$

Ha que determinar quatro constantes mediante as seguintes condições.

1. ^a) para	$x = a_1$	$\sigma_c = - p$
2. ^a) »	$x = a_1$	$\sigma_c = \sigma_f$
3. ^a) »	$x = a_2$	$U_c = U_f$
4. ^a) »	$x = a_3$	$\sigma_f = 0$

Escrevendo algebricamente essas condições segundo a (6) e (7) primeira, teremos as quatro equações seguintes:

$$(m + 1) a_1^2 N_c - (m - 1) A_c = - \frac{m^2 - 1}{m E_c} p a_1^2 \quad (I)$$

$$(m + 1) a_2^2 N_c - n (m + 1) a_2^2 N_f - (m - 1) A_c + n (m - 1) A_f = 0 \quad (II)$$

$$a_2^2 N_c - a_2^2 N_f + A_c - A_f = 0 \quad (III)$$

$$(m + 1) a_3^2 N_f - (m - 1) A_f = 0 \quad (IV)$$

O numero n que apparece na eq. II é a relação $\frac{E_f}{E_c}$ entre os modulos de elasticidade do ferro e do concreto.

Resolvendo o systema acima e pondo-se

$$\frac{m}{m - 1} N_c E_c = Q_c$$

$$\frac{m}{m - 1} N_f E_f = \frac{n m}{m - 1} N_f E_c = Q_f$$

$$\frac{m}{m + 1} A_c E_c = S_c$$

$$\frac{m}{m + 1} A_f E_f = \frac{n m}{m + 1} A_f E_c = S_f$$

acham-se os seguintes resultados:

$$Q_c = pa_1^2 \frac{(m+1)[n a_2^2 - (n-1) a_3^2] + (m-1) a_2^2}{m[(n+1)(a_3^2 - a_1^2) a_2^2 - (n-1)(a_2^4 - a_1^2 a_3^2)] - (n-1)(a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)}$$

$$Q_f = pa_2^1 \frac{2 n m a_2^2}{m[(n+1)(a_3^2 - a_1^2) a_2^2 - (n-1)(a_2^4 - a_1^2 a_3^2)] - (n-1)(a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)}$$

$$S_c = (p + Q_c) a_1^2$$

$$S_f = a_3^2 Q_f$$

Applicando agora as equações (8) da theoria geral, vêm os valores dos esforços:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{pa_1^2 - Q_c (x^2 - a_1^2)}{x^2} \\ \tau_c &= \frac{pa_1^2 + Q_c (x^2 + a_1^2)}{x^2} \end{aligned}} \quad (12)$$

$(a_1 \leq x \leq a_2)$

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_f &= - \frac{a_3^2 - x^2}{x^2} Q_f \\ \tau_f &= \frac{a_3^2 + x^2}{x^2} Q_f \end{aligned}} \quad (13)$$

$(a_2 \leq x \leq a_3)$

Nestas ultimas formulas é possível fazer uma simplificação.

Como x difere muito pouco de a_3 , pondo-se $\varepsilon = a_3 - x$ virá, approximadamente, mas sem erro apreciavel:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_f &= - \frac{2\varepsilon}{a_3} Q_f \\ \tau_f &= 2 Q_f \end{aligned}} \quad (13 \text{ bis})$$

$(\varepsilon = a_3 - x)$

3. — O esforço elastico de compressão deduz-se dos resultados precedentes pela formula geral $R = E \left(\max. \frac{u}{x} \right)$.

Feitas as operações acha-se

$$\boxed{R_c = 2Q_c + \frac{m+1}{m} p} \quad (14)$$

$(x = a_1)$

$$\boxed{R_f = \frac{(m-1) a_2^2 + (m+1) a_3^2}{m a_2^2} Q_f} \quad (15)$$

$(x = a_2)$

Entretanto sendo $(a_3 - a_2)$ muito pequeno R_f pouco differe de $r_f = 2 Q_f$.

4. — Até aqui temos considerado a espiral solidaria com o tubo, simplesmente. Analysaremos agora o que succederá se provocarmos, por qualquer meio independente da pressão interna, um estado de tensão permanente sobre o enrolamento em espiral de aço.

Consideremos a luva ficticia de raio externo a_3 . No seu estado de repouso inicial isto é, antes de ser collocada a envolver o tubo, o seu raio interior era $a_2 - \lambda a_2$ isto é, um pouco menor que o raio exterior do tubo.

No processo da collocação será necessario dilatar o raio da espiral de uma extensão linear λa_2 . A dilatação proporcional λ é frequentemente obtida por aquecimento. O mesmo resultado pode ser obtido por estiramento do fio. De um modo geral aquella dilatação pode resultar dos dois methodos applicados simultaneamente. Sendo t a differença entre as temperaturas do fio e do tubo, α o coefferiente de dilatação do aço e R_i a extensão unitaria empregada, teremos:

$$\lambda = \alpha t + \frac{R_i}{E_f}$$

Depois de collocado o enrolamento, o aço se resfia até voltar á temperatura inicial. O raio interior da luva ficticia, que era a_2 a quente, diminue, sem todavia alcançar a dimensão primitiva a frio, $a_2 - \lambda a_2$, que a isso se oppõe o tubo de concreto. Portanto ao mesmo tempo que a capa de aço permanece tensa, donde uma dilatação U_{fa_2} do seu raio interior, o tubo é comprimido, soffrendo o seu raio exterior uma dilatação negativa U_{ca_2} . Igualando o raio das duas superficies em contacto, teremos a equação seguinte: $a_2 + U_{ca_2} = (a_2 - \lambda a_2) + U_{fa_2}$ ou simplesmente:

$$U_f - U_c = \lambda a_2$$

5. — Passemos a determinar as quatro constantes do caso considerado. Uma das condições determinantes é justamente a expressa pela equação precedente.

1. ^a)	para	$x = a_1$	$\sigma = 0$
2. ^a)	para	$x = a_2$	$\sigma = \sigma_f$
3. ^a)	para	$x = a_2$	$U_c = U_f - \lambda a_2$
4. ^a)	para	$x = a_3$	$\sigma_f = 0$

Procedendo sempre como no caso anterior, escreveremos as quatro equações seguintes, que traduzem algebricamente as quatro condições acima.

$$(m + 1) a_1^2 N_c - (m - 1) A_c = 0 \quad (\text{I})$$

$$(m + 1) a_2^2 N_c - n(m + 1) a_2^2 N_f - (m - 1) A_c + n(m - 1) A_f = 0 \quad (\text{II})$$

$$a_2^2 N_c - a_2^2 N_f + A_c - A_f = -\lambda a_2 \quad (\text{III})$$

$$(m + 1) a_3^2 N_f - (m - 1) A_f = 0 \quad (\text{IV})$$

Resolvendo e determinando os valores de Q e S achamos:

$$Q_c = \frac{-n m \lambda E_c a_2^2 (a_3^2 - a_2^2)}{m [(n+1)(a_3^2 - a_2^2)a_2^2 - (n-1)(a_2^4 - a_1^2 a_3^2) - (n-1)(a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)]}$$

$$Q_f = \frac{n m \lambda E_c a_2^2 (a_2^2 - a_1^2)}{m [(n+1)(a_3^2 - a_2^2)a_2^2 - (n-1)(a_2^4 - a_1^2 a_3^2)] - (n-1)(a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)}$$

$$S_c = a_1^2 Q_c$$

$$S_f = a_3^2 Q_f$$

donde, pelas eq. (8) os esforços σ e τ :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= Q_c \frac{x^2 - a_1^2}{x^2} \\ \tau_c &= Q_c \frac{x^2 + a_1^2}{x^2} \end{aligned} \quad (16)$$

$(a_1 \leq x \leq a_2)$

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -Q_f \frac{a_3^2 - x^2}{x^2} \\ \tau_f &= Q_f \frac{a_3^2 + x^2}{x^2} \end{aligned} \quad (17)$$

$(a_2 \leq x \leq a_3)$

Fazendo-se a mesma simplificação do caso anterior, teremos as formulas approximadas:

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -\frac{2\varepsilon}{a_3} Q_f \\ \tau_f &= 2 Q_f. \end{aligned} \quad (17 \text{ bis})$$

6. — Calculando finalmente os esforços elasticos de comparação pelo mesmo methodo do caso anterior, obteremos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} R_c &= 2 Q_c \\ (x &= a_1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} R_f &= \frac{(m-1)a_2^2 + (m+1)a_3^2}{ma_2^2} Q_f \\ (x &= a_2) \end{aligned} \quad (19)$$

Porem R_f pouco differe de $\tau_f = 2Q_f$ sendo $(a_3 - a_2)$ quantidade desprezivel. Note-se que as formulas (13) e (17) bem como as (15) e (19) são de forma identica. O que varia, das primeiras para as segundas, é o valor de Q_f .

7. — O problema que nos propuzémos está completamente resolvido. As formulas (16) a (19) dão os esforços no tubo percintado vasio.

As (13) a (15) determinam o acrescimo de cada um desses esforços devido á acção isolada da pressão interna. De modo que o estado elastico final do tubo percintado sob pressão resultará da somma algebrica dos primeiros esforços e dos segundos.

A exactidão dos resultados depende porem, tanto da correcta avaliação das grandezas geometricas e barometricas do problema, quanto do conhecimento das constantes que caracterizam propriedades physicas dos materiaes componentes do tubo: modulo de elasticidade, coefficiente de Poisson e coefficiente de dilatação thermica.

Tal conhecimento é quasi sempre imperfeito. Para um material de determinada especie, aquellas constantes podem variar entre limites bastante afastados. A incerteza naturalmente se agrava quando concorrem dois materiaes de propriedades tão differentes como o ferro e o concreto.

Alem disso certas condições do problema muito difficilmente se podem realizar com a exactidão desejavel, por exemplo, o grau de aquecimento ou de estiramento previo da espiral, sua fixação perfeita sob determinada tensão, etc.

Por fim não devemos esquecer que as formulas por nós deduzidas baseiam-se na applicabilidade da lei de Hooke ao concreto, dentro dos limites de variação dos esforços admissiveis, hypothese controversa, embora consagrada pelas normas de quasi todos os paizes. Ha mais: admittimos facilmente que o coefficiente de Poisson é o mesmo para o concreto e para o aço, o que não é muito certo. Já a determinação desse coefficiente, que intervem com importantes funcções em todo calculo de elasticidade, é bastante delicada.

Admitte-se geralmente que o seu valor, para o aço, aproxima-se de $10/3$. Para o concreto será provavelmente maior, talvez proximo de 4, porem ligeiramente variavel em funcção dos esforços principaes, como se sabe que acontece com os materiaes pedregosos.

De todas essas considerações se conclue que apesar da correcção mathematica da theoria, no campo pratico das applicações os resultados dos calculos serão quasi sempre inquinados de erros varios, de diversas origens. Assim a confiança que possam merecer é relativa.

Depende muito do maior ou menor acerto com o qual se avaliam as constantes physicas envolvidas na theoria, bem como da maior ou menor conformidade entre a realização e as hypotheses admittidas, entre as grandezas effectivas e as suppostas no calculo. Em todo o caso, a prova experimental do tubo, tanto o ensaio de laboratorio, quanto o uso em condições normaes, será indispensavel e decisiva.

Tubos espessos sob pressão

3.^a PARTE

Tubos de concreto percintados multiplos sob tensão inicial

1. — Para pressões muito elevadas e diâmetros consideráveis pode acontecer que não se consiga, com o emprego de uma única espiral tensa, que o concreto do tubo em carga trabalhe á compressão, sem que a tensão máxima do aço exceda o limite permittivel. Nesse caso ha um recurso: sobre o recobrimento de concreto da primeira espiral enrola-se uma segunda, podendo-se repetir a operação tantas vezes quantas seja necessario. Teremos, dessa forma um tubo multiplo, constituido por uma serie de tubos percintados, encaixados uns sobre os outros sob tensão inicial e permanente.

Vamos analysar o caso de um tubo duplo, desse genero. Isto será sufficiente para se comprehender a marcha dos calculos qualquer que seja a multiplicidade do tubo, a qual, todavia, cremos que só excepcionalmente passará de triplice.

2. — Sejam a_1 o raio exterior do recobrimento da primeira espiral, a_5 o raio exterior da luva ficticia equivalente á segunda espiral. Teremos assim dois tubos percintados: o primeiro definido pelos raios a_1, a_2, a_3 , o segundo pelos raios a_3, a_4, a_5 . Distinguiremos umas das outras as grandezas respectivas pelos indices I e II, quando seja necessario evitar ambiguidade. A espiral do primeiro tubo soffreu previamente o alongamento proporcional λ_I . Seja λ_{II} o alongamento previo da segunda espiral. A superficie de contacto entre os dois tubos I e II é o cylindro de raio a_3 , sobre o qual actuaem esforços radiaes σ_3 . Determinar esses esforços é resolver o problema, porque uma vez conhecido σ_3 , poderemos analysar separadamente o estado elastico de cada tubo: o primeiro submettido á pressão interna quando exista, (formulas 12 a 15), á tensão inicial (formulas 16 a 18) e á pressão externa σ_3 (cujo formulario logo se verá): o segundo á tensão inicial e á pressão interna σ_3 (formulas 12 a 19 mediante simples substituição de symbolos: a_1 por a_5 , a_2 por a_4 , a_3 por a_3 , λ por λ_{II}).

O tubo I, sob a acção combinada das forças que o sollicitam soffrerá uma dilatação U_{I3} do raio a_3 . Simultaneamente, o raio a_3 do tubo II se alongará de U_{II3} . A equação $U_{I3} = U_{II3}$ determinará σ_3 .

3. — Começemos por analysar o effeito da pressão externa σ_3 sobre o tubo I. A determinação das constantes se faz pelas quatro condições seguintes:

$$\begin{aligned} \text{para } x = a_1 \quad \sigma_c &= 0 \\ \text{» } x = a_2 \quad \sigma_c &= \sigma_f \\ \text{» } x = a_2 \quad U_c &= U_f \\ \text{» } x = a_3 \quad \sigma_f &= -\sigma_3 \end{aligned}$$

Feitos os calculos, resulta :

$$Q_c = - \frac{(m+1)a_2^2}{D_1} a_3^2 \sigma_3$$

$$Q_f = - \frac{[m+1+n(m-1)]a_2^2 + (n-1)(m+1)a_1^2}{D_1} a_3^2 \sigma_3$$

nas quaes D_1 é o mesmo denominador das formulas anteriores que dão os outros Q_c e Q_f :

$$D_1 = m [(n+1)(a_3^2 - a_1^2)a_2^2 - (n-1)(a_2^4 - a_1^2 a_3^2)] -$$

$$- (n-1)(a_2^2 - a_1^2)(a_3^2 - a_2^2)$$

$$S_c = a_1^2 Q_c \quad S_f = a_3^2 (\sigma_3 + Q_f)$$

donde

$$\sigma_c = Q_c \frac{x^2 - a_1^2}{x^2}$$

$$\tau_c = Q_c \frac{x^2 + a_1^2}{x^2}$$

$$a_1 \leq x \leq a_2$$
(20)

$$\sigma_f = \frac{a_3^2 \sigma_3 + Q_f (a_3^2 - x^2)}{x^2}$$

$$\tau_f = \frac{a_3^2 \sigma_3 + Q_f (a_3^2 + x^2)}{x^2}$$

$$a_2 \leq x \leq a_3$$
(21)

Approximadamente os esforços no aço são :

$$\sigma_f = \left(\sigma_3 + Q_f \frac{2\varepsilon}{a_3^2} \right)$$

$$\tau_f = \sigma_3 + 2Q_f$$
(21 bis)

Calculando os esforços elasticos de comparação, acha-se:

$$R_c = 2Q_c$$

$$x = a_1$$
(22)

$$R_f = \frac{m+1}{m} \frac{a_3^2}{a_2^2} \sigma_3 + \frac{(m+1)a_3^2 + (m-1)a_2^2}{ma_2^2} Q_f$$

$$x = a_2$$
(23)

Approximadamente

$$R_f = \frac{m+1}{m} \sigma_3 + 2Q_f$$
(23 bis)

4. — Supponhamos agora que o tubo duplo esteja submettido á pressão interna p e escrevamos as expressões de U_{I3} e U_{II3} .

$$a_3 U_{I3} = a_3^2 N_{I3} + A_{I3} \quad \text{porem}$$

$$N_{I3} = \frac{m-1}{mE_f} Q_{I3} \quad A_{I3} = \frac{m+1}{mE_f} S_{I3}$$

Portanto podemos escrever :

$$mE_f a_3 U_{I3} = (m-1) a_3^2 Q_{I3} + (m+1) S_{I3}$$

$$mE_c a_3 U_{II3} = (m-1) a_3^2 Q_{II3} + (m+1) S_{II3}$$

ou

$$mE_f a_3 U_{II3} = n(m-1) a_3^2 Q_{II3} + n(m+1) S_{II3}$$

A forma geral da equação $U_{I3} = U_{II3}$ será portanto a seguinte:

$$\boxed{(m-1)(Q_{I3} - nQ_{II3}) a_3^2 + (m+1)(S_{I3} - nS_{II3}) = 0} \quad (24)$$

Parece desnecessario insistir sobre a significação dos symbolos Q e S que figuram nesta ultima equação.

Basta frizar que os de indice I referem-se ao conjuncto de sollicitações do tubo I (p , λ_I e σ_3) e os de indice II ao correspondente do tubo II (σ_3 e λ_{II}).

Sommando, portanto, os resultados parciaes, temos:

$$Q_{Ic} = \frac{C_1^I p + C_2^I \lambda_I E_c + C_3^I \sigma_3}{D_I}$$

$$Q_{I3} = \frac{F_1^I p + F_2^I \lambda_I E_c + F_3^I \sigma_3}{D_I}$$

$$S_{Ic} = (p + Q_{Ic}) a_1^2$$

$$S_{I3} = (\sigma_3 + Q_{I3}) a_3^2$$

Os symbolos significam

$$C_1^I = (m-1) a_1^2 a_2^2 + (m+1) [n a_2^2 - (n-1) a_3^2] a_1^2$$

$$C_2^I = -n m a_2^2 (a_3^2 - a_2^2)$$

$$C_3^I = -(m+1) a_2^2 a_3^2$$

$$F_1^I = 2 n m a_1 a_2^2$$

$$F_2^I = n m a_2^2 (a_2^2 - a_1^2)$$

$$F_3^I = [(m+1) + (n-1)(m-1)] a_2^2 a_3^2 - (n-1)(m+1) a_1^2 a_3^2$$

As expressões analogas para o tubo II são:

$$Q_{IIc} = \frac{C_2^{II} \lambda_{II} E_c + C_3^{II} \sigma_3}{D_{II}}$$

$$Q_{II3} = \frac{F_2^{II} \lambda_{II} E_c + F_3^{II} \sigma_3}{D_{II}}$$

$$S_{IIc} = a_3^2 (\sigma_3 + Q_{IIc})$$

$$S_{II3} = a_3^2 Q_{II3}$$

Os symbolos de indice *II* significam, analogamente

$$\begin{aligned}
 D_{II} &= m [(n+1)(a_5^2 - a_3^2) a_4^2 - (n-1)(a_4^2 - a_3^2) a_5^2] - (n-1)(a_4^2 - a_3^2)(a_5^2 - a_4^2) \\
 C_2^{II} &= -n m a_4^2 (a_5^2 - a_4^2) \\
 C_3^{II} &= (m-1) a_3^2 a_4^2 + (m+1) [n a_4^2 - (n-1) a_3^2] a_3^2 \\
 F_2^{II} &= n m a_4^2 (a_4^2 - a_3^2) \\
 F_3^{II} &= 2 n m a_3^2 a_4^2
 \end{aligned}$$

Retomemos agora a equação (24) escrevendo-a em funcção de *C* e *F*. Virá :

$$\sigma_3 = 2 \frac{F_1^I p - F_2^I \lambda_I E_c - K C_2^{II} \lambda_{II} E_c}{2 F_3^I + 2 K C_3^{II} + (n-1)(m+1) D_I} \quad (25)$$

onde $K = \frac{D_I}{D_{II}}$

5. — Conhecido σ_3 o problema está resolvido como já fizemos sentir. Os esforços serão :

1.º) $a_1 \leq x \leq a_2$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{eI} &= \frac{p a_1^2 - (x^2 - a_1^2) Q_{Ic}}{x^2} \\
 \tau_{eI} &= \frac{p a_1^2 + (x^2 + a_1^2) Q_{Ic}}{x^2}
 \end{aligned} \quad (26)$$

2.º) $a_2 \leq x \leq a_3$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{II} &= - \frac{\sigma_3 a_3^2 + (a_3^2 - x^2) Q_{IIc}}{x^2} \\
 \tau_{II} &= \frac{\tau_3 a_3^2 + (a_3^2 + x^2) Q_{IIc}}{x^2}
 \end{aligned} \quad (27)$$

Approximadamente :

$$\left\{ \begin{aligned}
 \sigma_{II} &= - \sigma_3 - \frac{2 \varepsilon_I}{a_3} Q_{IIc} \\
 \tau_{II} &= \sigma_3 + 2 Q_{IIc}
 \end{aligned} \right. \quad (27 \text{ bis})$$

3.º) $a_3 \leq x \leq a_4$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{eI} &= - \frac{\sigma_3 a_3^2 - (x^2 - a_3^2) Q_{IIc}}{x^2} \\
 \tau_{eI} &= \frac{\sigma_3 a_3^2 + (x^2 + a_3^2) Q_{IIc}}{x^2}
 \end{aligned} \quad (28)$$

4.º) $a_4 \leq x \leq a_5$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{II}} &= - \frac{Q_{\text{III}} (a_5^2 - x^2)}{x^2} \\ \tau_{\text{II}} &= \frac{Q_{\text{III}} (a_5^2 + x^2)}{x^2} \end{aligned} \quad (29)$$

Approximadamente:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{\text{II}} &= - Q_{\text{III}} \frac{2 \varepsilon_{\text{II}}}{a_5} \\ \tau_{\text{II}} &= 2 Q_{\text{III}} \end{aligned} \right. \quad (29 \text{ bis})$$

6. — O calculo de um tubo com tres enrolamentos seguiria os mesmos tramites do anterior.

Si a_6 e a_7 são os raios exteriores do segundo recobrimento de concreto e da terceira luva ficticia, equivalente ao terceiro enrolamento, e si λ_{III} é o seu alongamento proporcional previo, começariamos analysando o effeito da compressão exterior σ_5 na superficie de contacto entre o tubo *III* e o tubo *II*.

Em seguida, escrevendo a equação $U_{\text{III}_5} = U_{\text{II}_5}$ determinaríamos σ_5 , resolvendo o problema do mesmo modo que o fizemos no caso do tubo duplo.

Todavia a complicação dos calculos cresce mais rapidamente que o numero de espiraes adicionadas, tornando-se o processo analytico fastidioso para quatro ou mais enrolamentos.

Felizmente, na quasi totalidade dos casos que se apresentam na pratica, não se vae alem de um ou dois.

Eis porque, dando por terminada esta analyse, podemos consideral-a sufficiente.

Tubos de concreto percintados sob tensão inicial

APPENDICE

Calculo summario

1. — Chamemos a ao raio interior do tubo, d á espessura do concreto e e á espessura equivalente da espiral de aço. Seja λ o alongamento previo da espiral.

Deseja-se determinar λ , e , d , de modo a serem satisfeitas as trez condições seguintes:

- 1.ª) estando o tubo vasio, a compressão do concreto τ_c , devido á tensão inicial, deve ser igual a K_c maximo admissivel para o concreto.
- 2.ª) estando o tubo sujeito á pressão de ensaio p_e , a extensão da espiral deve ser igual a K_r , maximo admissivel para o aço.

3.^a) sob a mesma pressão de ensaio a compressão remanescente do concreto deve ser nulla.

O problema assim proposto não admittre solução directa e ao mesmo tempo correcta. Tratando-se de uma questão do dominio exclusivo da theoria da elasticidade, em que os esforços dependem das deformações, o unico calculo correcto é necessariamente o de verificação.

Desde já temos tratado em outro estudo. Entretanto, como primeira approximação, poderemos resolver o problema proposto, admitindo a hypothese de serem uniformemente distribuidos os esforços tangenciaes em toda a espessura do tubo.

A theoria demonstra que isso não se verifica exactamente, pois os esforços tangenciaes variam de accordo com a formula $\tau = Q + \frac{S}{x^2}$. Todavia, em casos especiaes o erro talvez não seja muito consideravel.

2. — Consideremos primeiramente o effeito isolado da pressão interna p . Sejam r_c e r_f os esforços tangenciaes no concreto e no aço. A pressão no plano diametral deve ser equilibrada pelos esforços de extensão do tubo.

Portanto

$$er_f + dr_c = pa \quad (1)$$

o alongamento proporcional precisa ser o mesmo no tubo e na espiral, portanto

$$\frac{r_f}{E_f} = \frac{r_c}{E_c} = \frac{n r_c}{n E_c} = \frac{n r_c}{E_f} \quad \text{ou}$$

$$r_f - n r_c = 0 \quad (2)$$

Donde se deduz:

$$\begin{array}{l} r_c = - \frac{pa}{d + ne} \\ r_f = \frac{npa}{d + ne} \end{array} \quad (3)$$

3. — Analysemos agora o effeito da tensão inicial λ sobre o tubo vasio. Escrevendo que o raio exterior do tubo comprimido é igual ao raio interior da espiral, obtemos a seguinte equação

$$\tau_f - n \tau_c = \lambda E_f \quad (4)$$

Sendo τ_f e τ_c os esforços tangenciaes no aço e no concreto.

Numa secção diametral a força de compressão do concreto equilibra a de extensão do aço, portanto

$$e\tau_f + d\tau_c = 0 \quad (5)$$

de (4) e (5) deduzimos:

$$\begin{array}{l} \tau_c = - \frac{e \lambda E_f}{d + ne} \\ \tau_f = \frac{d \lambda E_f}{d + ne} \end{array} \quad (6)$$

4. — Sejam finalmente R_c , R_f os esforços tangenciaes no concreto e no aço, do tubo sob tensão previa sujeito á pressão interna p . Somando os resultados anteriores (5) e (6), vem

$$\boxed{\begin{aligned} R_c &= \frac{pa - e\lambda E_f}{d + ne} \\ R_f &= \frac{npa + d\lambda E_f}{d + ne} \end{aligned}} \quad (7)$$

5. — Achadas as equações (6) e (7) passemos a escrever as condições do problema proposto no item 1.

$$\begin{aligned} K_c &= - \frac{e\lambda E_f}{d + ne} \\ K_f &= \frac{nap_E + d\lambda E_f}{d + ne} \\ ap_E - e\lambda E_f &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo o systema acima, obtemos:

$$\lambda E_f = K_f \quad (8)$$

$$e = a \frac{p_E}{K_f} \quad (9)$$

$$d = a \left(\frac{P_c}{K_c} - \frac{np_e}{K_f} \right) \quad (10)$$

6. — Esta analyse, salvo notações diferentes, é essencialmente identica á que se lê no folheto annexo Tuyaux Franki, exposta, porem, de modo comprehensivel, despida de complicações inuteis e de obscuridades talvez intencionaes.

Para proval-o basta applicar o nosso formulario do exemplo numerico do folheto Franki.

$$\text{EXEMPLO: } p_E = 20 \text{ K/cm.}^2 \quad n = 10 \quad a = 20 \text{ cm.} \\ K_c = 100 \text{ K/cm.}^2 \quad K_f = 3.500 \text{ K/cm.}^2$$

$$\text{Formula (8)} \quad \lambda E_f = 3.500 \text{ K/cm.}^2$$

$$\text{Formula (9)} \quad e = 20 \frac{20}{3500} = 0.114 \text{ cm.}$$

$$\text{Formula (10)} \quad d = 20 \left(\frac{20}{100} - \frac{200}{3500} \right) = 2.86 \sim 3 \text{ cm.}$$

Os resultados são exactamente os mesmos do folheto citado.

Verificação da resistencia do tubo Franki 1,50 de diametro interno

1. — Calculo pela Theoria da Elasticidade.

$$\text{Dados } a_1 = 75.00 \text{ cm.}$$

$$a_2 = 85.00 \text{ cm.}$$

$$a_3 = 85.39 \text{ cm.}$$

$$n = \frac{E_r}{E_c} = 10 \quad m = 4$$

1. — Calculo do denominador geral.

$$D = m [(n + 1) (a_3^2 - a_1^2) a_2^2 - (n - 1) (a_2^4 - a_1^2 a_3^2)] - (n - 1) (a_2^2 - a_1^2) (a_3^2 - a_2^2)$$

$$a_1^2 = 75.00 \times 75.00 = 5625.0000$$

$$a_2^2 = 85.00 \times 85.00 = 7225.0000$$

$$a_3^2 = 85.39 \times 85.39 = 7291.4521$$

$$a_2^4 = 52\,200\,625$$

$$a_1^2 a_3^2 = \frac{41.014.418'0625}{11.186.206.9375}$$

$$a_2^4 - a_1^2 a_3^2 = 11.186.206.9375$$

$$11 \times 1666'4521 \times 7225 = 132.441.281$$

$$- 9 \times 11186\,207 = - \frac{100.675.862}{31\,765\,419}$$

$$31765419 \times 4 = 127.061.676$$

$$- 9 \times 1600 \times 66'4521 = - \frac{956.910}{126.104.766}$$

$$D = 126.104.766$$

2. — Efeito isolado da pressão interna.

$$Q_c = \frac{(m + 1) [n a_2^2 - (n - 1) a_3^2] + (m - 1) a_2^2}{D} p a_1^2$$

$$n a_2^2 = 72250$$

$$(n - 1) a_3^2 = \frac{65\,623'0689}{6\,626.9311} \times 5 = 33.134,6555$$

$$(m - 1) a_2^2 = 3 \times 7225'0000 = \frac{21.675.0000}{54.809.6555}$$

$$Q_c = \frac{54\,809'6555 \times 5625}{126\,104\,766} p = 2'445 p$$

$$Q_r = \frac{2 n m a_1^2 a_2^2}{D} p$$

$$Q_r = \frac{2 \times 10 \times 4 \times 5625 \times 7225}{126\,104\,766} p = 25.782 p$$

a) Esforços no concreto (form. 12):

$$\sigma_c = - \frac{5625 p - 2'445 p (x^2 - 5625)}{x^2}$$

$$\tau_c = \frac{5625 p + 2'445 p (x^2 + 5625)}{x^2}$$

ou

$$\sigma_c = - p \left(\frac{19378}{x^2} - 2'445 \right)$$

$$\tau_c = p \left(\frac{19378}{x^2} + 2'445 \right)$$

Face interna ($x = a_1$)

$$\sigma_{c1} = - p \quad \tau_{c1} = 5'890 p$$

Face externa ($x = a_2$)

$$\sigma_{c2} = - 0'238 p \quad \tau_{c2} = 5'128 p$$

Esforço elastico de comparação (form. 14)

$$R_c = 2 \times 2'445 p + \frac{5}{4} p = 6'140 p (x = a_1)$$

b) Esforços no aço (form. 13)

$$\sigma_f = - \frac{7291'4521 - x^2}{x^2} \times 25'782 p \quad \tau_f = \frac{7291'4521 + x^2}{x^2} \times 25'782 p$$

ou

$$\sigma_f = - p \left(\frac{187'988}{x^2} - 25'782 \right) \quad \tau_f = p \left(\frac{187'988}{x^2} + 25'782 \right)$$

Face interna ($x = a_2$)

$$\sigma_{f2} = 0'238 p \quad \tau_{f2} = 51'802 p$$

Face externa ($x = a_3$)

$$\sigma_{f3} = 0 \quad \tau_{f3} = 51'564 p$$

Esforço elastico de comparação (form. 15)

$$R_f = \frac{3 \times 7225 \times 5 \times 7291}{4 \times 7225} \times 25'782 p = 51'822 p$$

3. — Formulário numerico para o tubo vaslo.

$$Q_c = - \frac{n m a_2^2 (a_3^2 - a_2^2)}{D} \lambda E_c$$

$$Q_c = - \frac{10 \times 4 \times 7225 \times 66'4521}{126 \ 104 \ 766} \lambda E_c = - 0'1523 \lambda E_c$$

$$Q_f = \frac{n m a_2^2 (a_2^2 - a_1^2)}{D} \lambda E_c$$

$$Q_c = \frac{10 \times 4 \times 7225 \times 1600}{126 \ 104 \ 766} \lambda E_c = 3'6668 \lambda E_c$$

a) Esforços no concreto (form. 16)

$$\sigma_c = - 0'1523 \frac{x^2 - 5625}{x^2} \lambda E_c$$

$$\tau_c = - 0'1523 \frac{x^2 + 5625}{x^2} \lambda E_c$$

ou

$$\sigma_c = - \left(0'1523 - \frac{856'69}{x^2} \right) \lambda E_c$$

$$\tau_c = - \left(0'1523 + \frac{856'69}{x^2} \right) \lambda E_c$$

Face interna ($x = a_1$)

$$\sigma_{c1} = 0$$

$$\tau_{c1} = 0'3046 \lambda E_c$$

Face externa ($x = a_2$)

$$\sigma_{c2} = 0'0337 \lambda E_c$$

$$\tau_{c2} = - 0'2709 \lambda E_c$$

Esforço elastico de comparação (form. 18)

$$R_c = - 0'3046 \lambda E_c$$

$$(x = a_1)$$

b) Esforços no aço (form. 17)

$$\sigma_f = - 3'6668 \frac{7291'4521 - x^2}{x^2} \lambda E_c$$

$$\tau_f = 3'6668 \frac{7291'4521 + x^2}{x^2} \lambda E_c$$

ou

$$\sigma_f = - \left(\frac{26736'296}{x^2} - 3'6668 \right) \lambda E_c$$

$$\tau_f = \left(\frac{26736'296}{x^2} + 3'6668 \right) \lambda E_c$$

Face interna ($x = a_2$)

$$\sigma_{f2} = - 0'0337 \lambda E_c$$

$$\tau_{f2} = 7'3673 \lambda E_c$$

Face externa ($x = a_3$)

$$\sigma_{f3} = 0$$

$$\tau_{f3} = 7'336 \lambda E_c$$

Esforço elastico de comparação (form. 19)

$$R_f = 7'3703 \lambda E_c \quad (x = a_2)$$

4. — Formulário numerico para o tubo cheio

Sommando algebricamente os resultados anteriores achamos

a) Esforços no concreto

Face interna

$$\sigma_{c_1} = - p$$

$$\tau_{c_1} = 5'890p - 0'3046\lambda E_c$$

Face externa

$$\sigma_{c_2} = - 0'238p - 0'0337\lambda E_c$$

$$\tau_{c_2} = 5'128p - 0'2709\lambda E_c$$

Esforço elastico de comparação

$$R_c = 6'140p - 0'3046\lambda E_c$$

b) Esforços no aço

Face interna

$$\sigma_{r_2} = - 0'238p - 0'0337\lambda E_c$$

$$\tau_{r_2} = 51'802p + 7'3673\lambda E_c$$

Face externa

$$\sigma_{r_3} = 0$$

$$\tau_{r_3} = 51'564p + 7'3336\lambda E_c$$

Esforço elastico de comparação

$$R_r = 51'822p + 7'3703\lambda E_c$$

4. — Os documentos apresentados não fornecem o valor de λ , o que é muito de extranhar pois delle dependem todos os esforços. Admittimos, aliás de accordo com as especificações Franki, que, estando o tubo cheio sob a pressão de ensaio de 16 k/cm²., o esforço tangencial no aço é de 3.500 k/cm².

Então, para $x = a_r$,

$$3500 = 51'802 \times 16 + 7'3673\lambda E_c$$

$$\lambda E_c = \frac{3500 - 829}{7'3673} = 363'0 \text{ K/cm.}^2$$

Suppondo-se $E_c = 210.000 \text{ k/cm.}^2$ e o coeff. de dilatação do aço igual $\alpha = \frac{1}{92700}$ teremos, para a temperatura correspondente ao

alongamento proporcional $\lambda = \frac{363}{210.000}$:

$$\lambda = \frac{363 \times 92700}{210.000} = 160^\circ C$$

Com esse valor supposto $\lambda E_c = 363$ calcularemos os esforços no tubo para os seguintes casos:

1.º vasio

2.º cheio sob a pressão de ensaio de 16 k/cm²

3.º cheio sob a pressão de serviço de 8 k/cm²

Os resultados obtidos encontram-se no quadro seguinte. Os esforços radiaes, por insignificantes, não foram tabulados.

Esforços tangenciaes e elasticos de comparação em k/cm².

CASOS	No concreto			No aço
	Face int. τ_{c1}	Face ext. τ_{c2}	E. elast. comp. R_c	$\tau_{r2} \cong R_r$
1.º	— 110 4	— 98'2	— 110'4	2670
2.º	— 16'0	— 16'2	— 12'0	3500
3.º	— 63'2	— 57'2	— 61'2	3085

II — Calculo summario

Dados $a = 75$, $d = 10$, $e = 0'39\text{cm.}$, $n = 10$

Applicaremos a formula (7) do Appendice.

$$\tau_c = \frac{pa - e\lambda E_r}{d + ne}$$

$$\tau_r = \frac{npa + d\lambda E_r}{d + ne}$$

Para $p = 16 \text{ k/cm.}^2$ devemos ter $\tau_r = 3500 \text{ k/cm.}^2$

$$3.500 = \frac{10 \times 15 \times 75 + 10\lambda E_r}{10 + 3'9}$$

Donde se tira $\lambda E_r = 3665$. . . $\lambda E_c = 366'5$

$$t = \frac{366'5 \times 92700}{210000} = 162^\circ C$$

1.º caso. Tubo vasio ($p = 0$)

$$\tau_c = - \frac{0.39 \times 3665}{13'9} = - 103 \text{ k/cm.}^2$$

$$\tau_r = \frac{10 \times 3665}{13'9} = 2630$$

2.º) caso. Tubo cheio, pressão de ensaio ($p = 16 \text{ k/cm.}^2$)

$$\tau_c = \frac{75 \times 16 - 0.39 \times 365}{13.9} = - 16.5 \text{ k/cm.}^2$$

$$\tau_f = 3500 \text{ k/cm.}^2$$

3.º) caso. Tubo cheio, pressão de serviço ($p = 8 \text{ k/cm.}^2$)

$$\tau_c = \frac{8 \times 75 - 0.39 \times 3665}{13.6} = - 59.6 \text{ k/cm.}^2$$

$$\tau_f = \frac{10 \times 8 \times 75 + 36650}{13.9} = 3065 \text{ k/cm.}^2$$

Como se vê, os resultados concordam perfeitamente bem com o calculo exacto.

Entretanto seria ousadia concluir que o calculo exacto é dispensavel uma vez que, por processo muito mais simples, se obtiveram resultados praticamente iguaes no caso particular em apreço. De facto si os resultados do calculo summario nos parecem sufficientemente exactos, esta opinião só se justifica depois de os havermos comparado com os obtidos pela theoria da elasticidade. O que parece razoavel é usar do calculo summario na determinação das dimensões e do alongamento previo, em vista das especificações dadas, seguindo-se-lhe, porém, a verificação obrigatoria pelas formulas exactas.

Já mostramos que esse trabalho é facilmente exequivel.

Nos calculos dos proponentes foi adoptado o valor 15 para o coefficiente n , relação entre os mod. de elast. do aço e do concreto. Entretanto é de rigor o valor 10, que mais se approxima da realidade, sempre que os esforços dependem das deformações. Apesar dessa irregularidade, os resultados obtidos não differem muito dos exactos.

O erro é de uns 10% em media.