Otimização dos Custos de uma Instalação de Recalque

ENG. BERNARDINO PINTO CARNEIRO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho é um caso de resultado marginal em uma pesquisa que visou ao estudo do transporte, por meio de tubos, de minério de ferro com água, a longas distâncias ou mineroduto.

Em 1962, o autor assinou com a Metais de Minas Gerais S/A. — METAMIG, contrato específico para a definição da viabilidade tecnológica e econômica para o sistema de transporte mencionado, objetivando a exportação do minério de ferro, em granulometria de pelotização, do Quadrilátero Ferrífero de Minas Gerais. Os resultados desta pesquisa pertencem à empresa referida e em termos parcial eles foram, em primeira mão, publicados na Revista Engenharia, Mineração e Metalurgia, números de abril e maio de 1964.

Significa com isto que estes estudos foram os primeiros a serem realizados no Brasil, de maneira objetiva e completa, indicando como conclusão a total viabilidade do sistema de transporte acima especificado.

Entretanto, o conservadorismo e o comodismo reinantes na época, os quais, na atualidade estão rapidamente sendo superados, colocaram o sistema de transporte citado sob reserva e mesmo em descrédito.

A pesquisa foi suportada na ocasião pela METAMIG e pelo Instituto de Pesquisas Radioativas da UFMG. Posteriormente, a história é longa e foge do objetivo do presente trabalho para ser contada.

Atualmente, no Brasil, está sendo construído o primeiro mineroduto para minério de ferro, exatamente dentro das conclusões da pesquisa referida, com 400 km de extensão, pertencente à SAMARCO, porém com "know-how" importado, o que obviamente poderia ser evitado ou limitado, visando ao interesse nacional.

Na pesquisa citada, procurou-se também encontrar um método que otimizasse as variáveis envolvidas no problema, em termos de uma pesquisa operacional. Os resultados deste trabalho adaptados para fluidos de uma fase, resultaram no estabelecimento da sistemática que a seguir apresentaremos, visando a otimizar os custos das instalações de recalque.

Para este fim, estas foram consideradas como um sistema composto dos tubos de recalque e da estação de bombeamento, com tubulações para extensos ou grandes recalques. O método, entretanto, aplica-se a qualquer caso. Ele é inédito e na sua concepção usou-se apenas princípios básicos de matemática, de mecânica dos fluidos e de engenharia econômica.

A solução do problema é conduzida através de um processo gráfico, de grande simplicidade, usando-se uma família de linhas retas a 135° com o eixo dos x que corresponde biunivocamente a outra família de retas verticais. A interseção das retas que se correspondem, nas duas famílias, é uma curva que corta o eixo dos x no ponto que é o ótimo procurado, evitando-se com este artifício a complexidade da solução de uma equação de 7.° grau, a que é conduzida à solução do problema.

O método já foi publicado na revista "Construção", da Equipe Editora S.A., números de novembro/65 e fevereiro de 1966 e aqui, a pedido, é novamente publicado e submetido à crítica do leitor.

Esperamos que ele lhe possa ser útil, de alguma forma, o que, se acontecer, nos daremos por recompensados.

Adotaremos na exposição do assunto, o roteiro definido a seguir:

SEÇÃO I — Otimização do Investimento em uma Instalação de Recalque.

SEÇÃO II — Otimização do custo de exploração anual de uma Instalação de Recalque.

SEÇÃO III — Opção entre o ótimo para o investimento ou o ótimo para o custo anual de exploração.

Em cada uma das primeiras Seções, daremos exemplos de aplicação. Os exemplos não correspondem a nenhum caso real, sendo hipotéticos e meramente visam a esclarecer a maneira de aplicar o método.

SEÇÃO I — OTIMIZAÇÃO DO INVESTIMENTO EM UMA INSTALAÇÃO DE RECALQUE

Entender-se-á, no presente trabalho, por investimento em uma instalação de recalque ao preço de construção do conjunto instalado tubos e bombas.

Este investimento pode ser expresso por uma função de preços

$$C = f\,(V, D) \qquad (1)$$

sendo

D o diâmetro do tubo

V a velocidade de escoamento

as variáveis que a definem.

Objetiva-se encontrar uma solução gráfica que conduza com facilidade aos valores dessas variáveis que tornem mínimo o preço de construção expresso por (1). A esses valores chamar-se-ão de ótimos e a metodologia seguida para obtê-los de otimização.

Atentemos agora para o fato de que uma instalação de recalque é projetada para uma vazão constante ou

$$Q = VS = \text{constante} \qquad (2)$$

sendo

Assim, conclui-se que a função (1) pode ser só dependente de D ou vice-versa só de V. Considerando então, a partir de (2), V = f (D) tem-se

e o valor de D que otimiza a função (3) será tal que

$$\frac{dC}{dD} = 0 \qquad (3)$$

e

$$\frac{d^2C}{dD^2} > 0 \qquad (3b)$$

A análise para otimização das variáveis da função (1) pode também ser empreendida com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange, que permitem o estabelecimento de uma nova função que já satisfará a restrição

$$Q = \text{constante}$$

Para o caso em discussão, a metodologia das equações (3) resolvem diretamente o problema, entretanto, por serem os multiplicadores de Lagrange de uso freqüente na técnica de otimização de variáveis, a título ilustrativo é interessante empregá-los. Tomando essa diretriz, iniciamos pela materialização, em um gráfico cartesiano, do esquema das funções de preços a serem estabelecidas.

Assim, seja na figura 1 dois eixos coordenados retangulares, marcando-se em abcissas os diâmetros dos tubos e em ordenadas os preços.

O gráfico é traçado para uma instalação de recalque, com os seguintes dados básicos:

— Altura geométrica de recalque = H
— Extensão da tubulação = L
— Vazão constante = Q

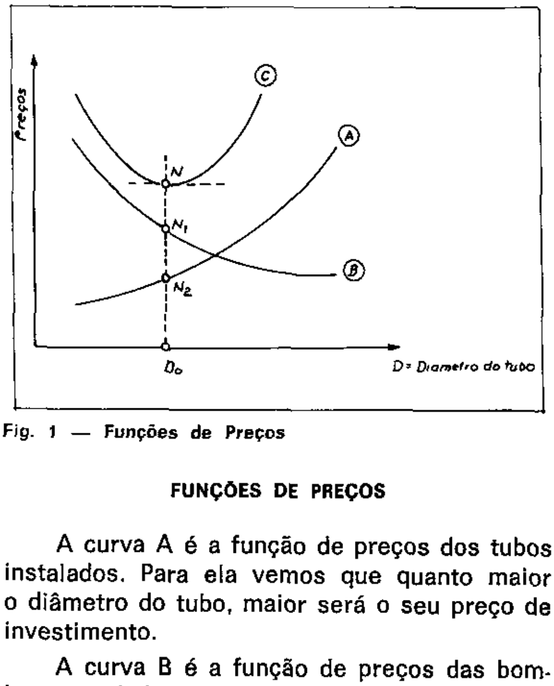

Fig. 1 — Funções de Preços

FUNÇÕES DE PREÇOS

A curva A é a função de preços dos tubos instalados. Para ela vemos que quanto maior o diâmetro do tubo, maior será o seu preço de investimento.

A curva B é a função de preços das bombas instaladas. Para ela vemos que quanto maior o diâmetro dos tubos menores os seus preços.

A soma das ordenadas da curva A com as correspondentes às da curva B, para cada valor do diâmetro D, nos fornece a função de preços da instalação de recalque, bombas e tubos. A curva C é essa função, que passa por um mínimo no ponto N, correspondente a um diâmetro Do, que será o valor ótimo da variável D procurado.

Em síntese, essa análise acima nos mostra que a variável a ser otimizada é somente uma D ou V, já que o conhecimento de uma delas define a outra pela equação de restrição (2).

Isto posto, o roteiro do estudo será o seguinte:

1.º — Determinação da função de preços A.
2.º — Determinação da função de preços B.
3.º — Determinação da função de preços C.
4.º — Estabelecimento da função de Lagrange F (D, V) e otimização das variáveis.
5.º — Solução gráfica.
6.º — Exemplo.

1 — DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE PREÇOS A

O tubo possuirá uma espessura estrutural te, dada pela seguinte expressão

$$te = \frac{pD}{2\sigma} \qquad (4)$$

sendo p a pressão média interna nos tubos na direção longitudinal, e σ a tensão admissível à tração do aço dos tubos.

Supõe-se que a influência da temperatura seja desprezível, justificado no fato de considerar-se os tubos enterrados.

Fazendo $\frac{p}{2\sigma} = R$, tem-se

$$te = RD \qquad \pi \qquad (5)$$

Além da espessura estrutural, ao tubo pode-se acrescer uma espessura para desgaste, que será dimensionada de acordo com as características físicas e químicas do líquido em escoamento, para um valor econômico da vida do tubo.

Esse estudo pode ser feito em laboratório com técnica baseada na aplicação de radioisótopos.

Essa espessura a chamaremos de "espessura de sacrifício" ts.

O peso total de aço dos tubos W será então

$$W = \pi\,(D + te + ts) \times$$
$$\times\,(te + ts) \times d \times L \qquad (6)$$

Chamando de d o peso específico do aço ou 7.850 kg/m^3.

A expressão (6) pode também ser escrita

$$W = L\,\pi\,D\,(te + ts) \times$$
$$+\,\pi\,L\,(te + ts)^2 d \qquad (7)$$

Considerando a segunda parcela do segundo membro, da expressão (7), π L (te + ts)^{2}d *muito pequena em relação à primeira, pode-se* abandoná-la.

Logo

$$W = \pi\,D\,(t_e + t_s)\,d\,L$$

Se 1 kg de aço do tubo fica assentado ao preço de Pt, a função A de preço dos tubos será

$$A = \pi\,DL\,d\,(te + ts)\ \ Pt$$

Tendo em vista (5) e fazendo

$$a_1 = \pi\,L\,d\,R\,Pt \qquad (9)$$
$$a_2 = \pi\,L\,d\,ts\,Pt \qquad (10)$$

tem-se finalmente

$$A = a_1\,D^2 + a_2\,D$$

que é a função de preços só dos tubos, representada na figura 1 pela curva A.

2 — DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE PREÇOS B

Inicialmente é fundamental estabelecer o total de energia consumida no recalque.

Seja Ho a altura geométrica de recalque que poderá ser positiva ou negativa. O sinal será definido pelo sentido de escoamento em relação ao desnível a ser vencido. Se o desnível representa uma energia a ser adicionada à bomba ele será positivo e no caso contrário ele será negativo.

Assim, se JL é a perda de carga do escoamento, a pressão manométrica de recalque será

$$H_m = JL + H_o \qquad (12)$$

A lei de Darcy — Weisbach nos fornece o valor da perda de carga total do escoamento

$$JL = f\,L\,\frac{1}{D}\,\frac{V^2}{2g} \qquad (13)$$

Sendo r o rendimento resultante do grupo motobomba e γ o peso específico do líquido em kg/m3, a potência consumida será

$$CV = \frac{Q\,Hm\,\gamma}{75\,r} \qquad (14)$$

$$\text{com } Q = 0{,}785\,VD^2 \qquad (15)$$

A expressão (14), tendo em vista (12), (13) e (15), nos permite obter

$$CV = B_1\,V^3\,D + B_2\,VD^2 \qquad (16)$$

sendo

$$B_1 = \gamma\,L\,f \times \frac{0{,}785}{150} \times \frac{1}{gr} \qquad (17)$$

$$B_2 = \frac{0{,}785}{75} \times \frac{1}{r} \times \gamma \quad H_o \qquad (18)$$

Se chamarmos de Pb o preço de 1 CV do grupo motobomba instalado, a função de preço B procurada será

$$B = b_1\,V^3\,D + b_1\,V\,D^2 \qquad (19)$$

com

$$b_1 = P_b\,B_1 \qquad (20)$$
$$b_2 = P_b\,B_2 \qquad (21)$$

A expressão (19) é representada na figura 1 pela curva B.

3 — DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO DE PREÇOS C

Tendo em vista as funções de preços (11) e (19), a função de preços C procurada será

$$C = A + B \qquad (22)$$

ou

$$C = a_1 D^2 + a_2 D + b_1 V^3 D + b_2 V D^2 \qquad (23)$$

que juntamente com a equação de condição $Q = c^{te}$, nos permitem escrever a equação de Lagrange F (V, D).

4 — EQUAÇÃO DE LAGRANGE E OTIMIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS

A equação de condição será então

$$mQ - VD^2 = 0 \qquad (24)$$

$$\text{com } m = \frac{4}{\pi}$$

Logo há apenas uma condição ou restrição e portanto haverá somente um multiplicador de Lagrenge λ

Assim, tendo em vista (22), a função procurada será

$$F\ (V, D) = C + \lambda\ (mQ - VD^2) \qquad (25)$$

Para um máximo ou um mínimo deve-se ter

$$\frac{\partial F}{\partial D} = 0 \qquad (26)$$

$$\frac{\partial F}{\partial V} = 0 \qquad (27)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \qquad (28)$$

que serão 3 equações com 3 incógnitas, das quais se tira os valores de D, V e λ.

Posteriormente verifica-se se será satisfeita a condição de mínimo pelas derivadas segundas, da equação (25), em relação a cada *uma das variáveis a serem otimizadas.*

Para a condição de mínimo tem-se

$$\frac{\partial^2 F}{\partial D^2} > 0 \qquad (29)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial V^2} > 0 \qquad (30)$$

No nosso caso como a restrição é apenas uma e abrange as duas variáveis V e D, conforme equação (24), bastando obter uma para obter-se a outra, a aplicação do método redunda no método direto das equações (3), exposto no início.

As equações (26), (27) e (28) convenientemente combinadas, nos fornecerão o resultado

$$2a_2\ D + a_2 - 5b_1\ V^2 = 0 \qquad (31)$$

que também se obtém, conforme se afirmou, com o método direto.

Com efeito. A equação de preços C dada por (23), em função apenas de D, levando em conta a equação de condição (24) e que Q = constante, será

$$C = a_1\ D^2 + a_2\ D + b_1\ m^3\ \frac{Q^3}{D^5} + b_2\ mQ \qquad (32)$$

$$\text{Calcula-se } \frac{dC}{dD} = 2a_1\ D + a_2 - 5b_1\ m^3\ \frac{Q^3}{D^6} = 0 \qquad (33)$$

na qual substituindo mQ por seu valor dado em (21), nos conduz finalmente à *mesma* expressão (31)

A partir de (32) pode-se com mais facilidade verificar se se trata de um mínimo ou de um máximo.

Temos

$$\frac{d^2 C}{dD^2} = 2a_1 + \frac{30 b_1 m^3 Q^3}{D^7} \qquad (34)$$

Nesta expressão como todos os termos são positivos, tem-se em qualquer caso

$$\frac{d^2C}{dD^2} > 0 \qquad (35)$$

Logo, o valor de D calculado a partir da expressão (31) e equação de condição (24), formando ambas um sistema de duas equações a duas incógnitas, será um mínimo.

5 — SOLUÇÃO GRÁFICA

O sistema de equações dadas pelas expressões (31) e (24), ou

$$2\ a_1 D + a_2 - 5\ b_1\ V^3 = 0 \qquad (31)$$

$$mQ - VD^2 = 0 \qquad (24)$$

sendo Q = constante, nos permitem obter as soluções ótimas procuradas para D e V. Entretanto a solução algébrica desse sistema de equações não é prática, pois nos conduz a uma equação do 7.º grau em D.

Para vencer esta dificuldade idealizou-se uma solução gráfica, a qual com muita simplicidade e exatidão nos fornece o valor de D ótimo. Posteriormente, conhecido D acha-se o valor de V pela equação (24).

Vejamos a solução gráfica.

A expressão (31) também pode ser escrita

$$-D + \left(\frac{5b_1}{2a_1} V^3 - \frac{a_2}{2a_1}\right) = 0 \qquad (36)$$

a qual sendo feita igual a Y, torna

$$Y = -D + \left(\frac{5b_1}{2a_1} V^3 - \frac{a_2}{2a_1}\right) \qquad (37)$$

que para Y = O fornecerá D ótimo.

Esta expressão (37) representa para cada valor de V = constante uma família de retas paralelas de equação da forma

$$Y = aD + b \qquad (38)$$

com $a = -1$

$$b = \left(\frac{5b1}{2a1} V^2 - \frac{a2}{2a1}\right)$$

as quais podem ser traçadas, cada reta para um valor de V determinado, num gráfico cartesiano no qual em abcissas marca-se D e em ordenadas o valor de Y da equação (37).

Por outro lado da equação (24) escrevemos

$$D = \sqrt{\frac{m\,Q}{V}} \qquad (39)$$

que para cada um dos V = constante, adotado para a família de retas de equação (37), representará uma outra família de retas de equação da forma

$$D = \text{constante} \qquad (40)$$

As retas da família de equação (37), possuem um coeficiente angular de (—1), logo elas formarão com o eixo dos Y e dos D ângulos de 45°.

Já as retas da família de equação (39) serão paralelas ao eixo dos Y. Portanto o traçado gráfico de ambas as famílias das retas é de execução muito fácil.

Para cada valor de V haverá uma correspondência biunívoca entre as retas das duas famílias, figura 2.

O lugar geométrico das interseções das retas que se correspondem será uma curva que definirá no eixo dos D o valor D_0 ótimo procurado.

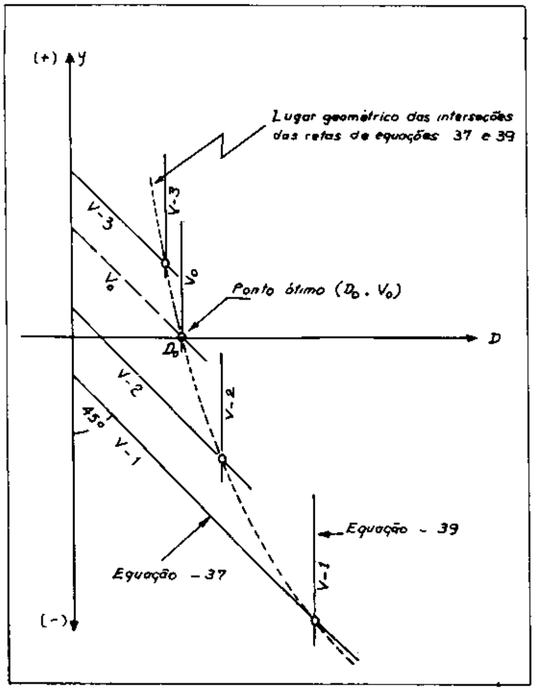

Fig. 2 — Representação gráfica das famílias de retas de equações 37 a 39 — lugar geométrico das interseções.

Isto porque nesse ponto Y = O ou condição de mínimo do custo de construção. Também ao valor D no eixo dos D, corresponderá ainda ser ele a intercessão de duas reas particulares, respectivamente cada uma pertencendo às duas famílias citadas, ambas definidas por um e apenas um valor de $V = V_0$. Conhecido D_0, o valor de V_0 satisfará a equação de condição (39) ou vice-versa.

A análise que acabamos de empreender define o processo gráfico proposto para a otimização em pauta e é esquematizado na figura 2.

A seguir apresentamos um exemplo que ilustrará a maneira de aplicá-lo e a sua simplicidade.

6 — EXEMPLO

Seja uma instalação de recalque com 50 km de extensão vencendo uma diferença de nível geométrica positiva de 150 m para transportar 300 litros por segundo de água.

A pressão média ao longo da extensão de tubos pode ser considerada igual a 100 m. Para espessura de sacrifício ou de desgaste adota-se 3 mm.

Os tubos serão de aço com $\sigma = 1.500$ kg/cm2 e com juntas soldadas. A tubulação será enterrada e portanto nulo o efeito da temperatura. Os tubos custarão, instalados, Cr$ 14,00 por kg e os grupos motobombas instala-

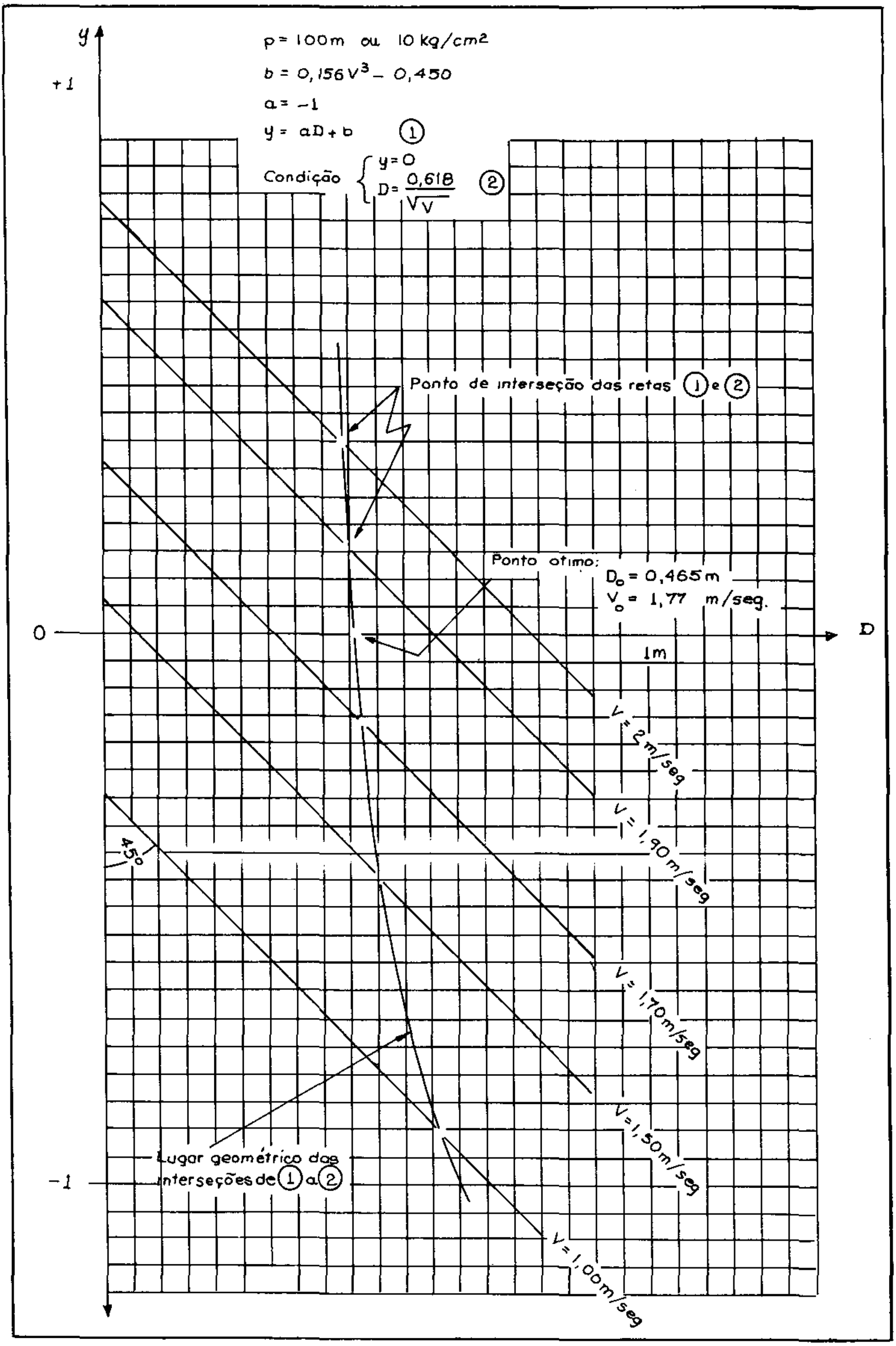

Gráfico — Para determinar o ponto ótimo de Construção de uma tubulação de recalque

dos custarão por CV Cr$ 3.360,00.

O rendimento do grupo motobomba será de 0,50.

Tomar para f, coeficiente da fórmula de Darcy-Weisbach, o valor de 0,020.

Pede-se o diâmetro do tubo que torne mínimo o custo de construção do conjunto tubos e bombas.

SOLUÇÃO

Os coeficientes da equação (37) podem ser calculados, conforme a seguir:

$$Pb = Cr\$\ 3.360{,}00 \text{ por CV}$$
$$Pt = Cr\$\ 14{,}00 \text{ por kg}$$
$$ts = 0{,}003 \text{ m}$$
$$p = 100 \text{ m} = 10 \text{ kg/cm}^2$$
$$\alpha = 1.500 \text{ kg/cm}^2$$
$$r = 0{,}50$$
$$m = \frac{4}{\pi}$$
$$f = 0{,}02$$
$$\gamma = 10^3 \text{ kg/m}^3$$
$$Ho = 150 \text{ m}$$
$$L = 50.000 \text{ m}$$
$$Q = 0{,}300 \text{ m}^3\text{/seg}$$
$$d — 7.850 \text{ kg/m}^3 \text{ (peso específico do aço)}$$

Logo, das fórmulas (9), (10), (20) e (21), temos

$$a_1 = \pi \times 10^3 \times 183{,}40$$
$$a_2 = \pi \times 10^3 \times 164{,}64$$
$$b_1 = \pi \times 10^3 \times 11{,}48$$
$$b_2 = \pi \times 10^3 \times 33{,}60$$

A partir desses valores básicos, obtemos os coeficientes que definem a equação (38):

$$\frac{5\ b1}{2\ a^1} = 0{,}156$$

$$\frac{a^2}{2a^1} = 0{,}450$$

Logo o valor de b da equação (38) será

$$b = 0{,}156\ V^3 — 0{,}450 \qquad (41)$$

ou seja, no gráfico cartesiano, o valor de Y para D = o.

Como o coeficiente angular dessas retas é de (—1), basta portanto conhecer o valor de b para poder-se traçá-las com facilidade.

As retas da outra família da equação (39) são também facilmente traçadas, pois são paralelas ao eixo dos Y possuindo, para o exemplo figurado, a seguinte expressão

$$D = \sqrt{\frac{mQ}{V}} = \sqrt{\frac{4 \times 0{,}3}{\pi \times V}}$$

ou

$$D = \frac{0{,}618}{\sqrt{V}} \qquad (42)$$

Pelas equações (41) e (42), para cada valor de V obtém-se os elementos que permitem traçar no gráfico as retas que se correspondem das duas famílias.

O lugar geométrico das interseções dessas retas, determinará graficamente no eixo dos D o valor ótimo do diâmetro, que resolve o problema.

Baseados nas equações (41) e (42) podemos organizar o quadro a seguir:

V m/seg		1,00	1,50	1,70	1,90	2,00
D	Eq. 42	0,618	0,504	0,473	0,448	0,436
b	Eq. 41	-0,294	0,073	0,315	0,620	0,798

Esse quadro de valores representado conforme traçado explicado da figura 2 nos fornece o gráfico anexo que define a solução ótima procurada. O gráfico diz mais do que palavras definindo os valores D. = 0,465 m e Vo = 1,77 m/seg, que minimizam o custo de construção.

7 — CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo gráfico que acabamos de apresentar é, como vimos, uma solução muito simples, que permite obter os valores das variáveis que tornam mínimo o custo de construção de uma instalação de recalque.

Entretanto, o custo de exploração anual da instalação de recalque é quase sempre o elemento principal, pois as economias anuais podem ser mais vantajosas do que um acréscimo no custo de construção.

Como o diâmetro do tubo que satisfaz a condição de ótimo do custo de exploração não coincide com o diâmetro que define o ótimo do custo de construção, haverá necessidade de se avaliar os valores dos pontos ótimos para os dois casos e analisar qual deles será o mais vantajoso sob o aspecto econômico.

Apesar de um modo geral o ótimo para o custo de exploração ser o valor mais vantajoso, não elimina a análise econômica sugerida.

Para a otimização do custo de exploração da instalação de recalque, pode-se estabelecer uma solução gráfica idêntica à usada para o custo de construção, na qual as equações de base são inteiramente semelhantes, apenas com os coeficientes diferentes.

A seguir, apresentaremos o processo gráfico para determinar os valores das variáveis que otimizam o custo de exploração.

SEÇÃO II — OTIMIZAÇÃO DO CUSTO DE EXPLORAÇÃO ANUAL DE UMA INSTALAÇÃO DE RECALQUE

Estudamos, na Seção I, a otimização do investimento de uma instalação de recalque e pretendemos agora demonstrar que um processo gráfico semelhante pode ser usado com a mesma simplicidade para otimizar o custo de exploração anual da instalação.

Usaremos os valores dos investimentos já calculados na Seção anterior, conforme funções de preços A, B e C (fig. 1), respectivamente dos tubos, bombas e investimento total, dadas pelas relações.

$$A = a_1 D^2 + a_2 D \qquad (11)$$

$$B = b_1 V^3 D + b_2 V D^2 \qquad (19)$$

$$C = a_1 D^2 + a_2 D + b_1 V^3 D + b_2 V D^2 \qquad (23)$$

Considerando que Q = constante e ainda $mQ — VD^2 = 0$, sendo m $\frac{4}{\pi}$, podemos escrever estas relações somente como função de D, isto é,

$$A = a_1 D^2 + a_2 D \qquad (11a)$$

$$B = b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5} b_2 mQ \qquad (19a)$$

$$C = a_1 D^2 + a_2 D + b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5} + b_2 mQ \qquad (23a)$$

O significado dos símbolos como também os números das equações já definidas na seção anterior continuam os mesmos.

Isto posto, é mister compreender o que se entenderá por custo de exploração anual. Este custo será definido pela soma.

$$E = F + K + U + S + W + G \qquad (43)$$

sendo

E = Custo de exploração anual
F = Fundo anual para a depreciação ou renovação da instalação
K = Fundo anual para taxas, seguros etc.
U = Fundo anual para manutenção e reparação da instalação
S = Salários pagos anuais
W = Custo anual da energia consumida na instalação
G = Bonificação e despesas indiretas

Pela equação (43) vemos que se está dando ao custo anual de exploração um caráter empresarial representado pela última parcela G, que serve para cobrir não só as despesas indiretas como também fornecer uma rentabilidade para o investimento. O valor desta parcela deverá ser estudado detalhadamente para cada caso específico, pois há serviços que são promovidos por empresas privadas, outros por empresas de economia mista e outros exclusivamente por órgãos públicos. Entretanto é nosso entendimento que nenhum serviço pode sobreviver economicamente se não houver nele uma rentabilidade por menor que seja. Assim é básica em qualquer caso a estrutura da equação (43).

O roteiro do presente estudo será, então, a definição das funções F, K, U, S, W, G e da soma E.

Determinado E, pode-se finalmente otimizar as variáveis desta função e estabelecer o processo gráfico referido no início.

1 — FUNÇÃO F

Para o cálculo do fundo anual de renovação, usaremos o método americano do "Sinking Fund" com uma taxa anual i. Sendo n_a e n_b as vidas úteis ou econômicas respectivamente dos tubos e bombas, os coeficientes de renovação que, aplicados aos investimentos dados pelas equações (11) e (19) nos fornecem os fundos anuais, serão

$$fa = \frac{i}{(1+i)n_a - 1} \qquad (44)$$

$$fb = \frac{i}{(1+i)n_a — 1} \qquad (45)$$

Suporemos que as bombas possuam no final da vida econômica um valor residual nulo e que os tubos possuam um valor residual $\triangle$ dado pela expressão seguinte

$$\triangle = \pi D L t_e d P_t$$

que, em virtude de (5) e (9), será

$$\triangle = a_1 D^2 \qquad (46)$$

Este valor será recuperado só depois de decorridos n_a anos, portanto, atualizando-o ou referindo-o ao início do investimento, tem-se

$$\triangle' = a_1 D^2 \times \frac{1}{(1+i)n_a} \qquad (47)$$

Então o valor dos tubos a renovar será

$$A' = a^1 D^2 + a_2 D - \triangle'$$

ou

$$A' = a_{10} D^2 + a_2 D \qquad (48)$$

com

$$a_{10} = \frac{(1+i)\ n_a - 1}{(1+i)\ n_a} \times a_1 \qquad (49)$$

Vê-se que a expressão (48) é perfeitamente análoga à expressão (11), apenas o coeficiente a_1 é substituído pelo coeficiente a_{10} dado pela expressão (49).

Aplicando os coeficientes (44) e (45) às expressões (48) e (19a), obtemos respectivamente para os tubos e bombas os fundos anuais de renovação:

$$F_a = f_a (a_{10} D^2 + a_2 D) \qquad (50)$$

$$F_b = f_b (b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5} + b_2 mQ) \qquad (51)$$

Estas expressões somadas nos darão o valor F procurado ou

$$F = f_a (a_{10} D^2 + a_2 D) + f_b (b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5} + b_2 mQ) \qquad (52)$$

2 — FUNÇÃO K

Chamemos k uma percentagem que aplicada aos investimentos dos tubos e bombas nos fornece o fundo anual para cobrir as despesas com taxas, seguros etc. Aplicando esta percentagem aos valores das equações (48) e (19a), temos

$$K = k (a_{10} D^2 + a_2 D) + k (b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5} + b_2 mQ) \qquad (53)$$

que é a função K procurada.

O valor de k geralmente pode ser tomado idêntico para os tubos e bombas, isto é,

$$k = k_a = k_b$$

3 — FUNÇÃO U

A manutenção e reparação é geralmente relacionada com os investimentos durante toda a vida econômica por uma taxa U_o. Assim tem-se respectivamente para os tubos e bombas

$$U_a = \frac{U_{oa}}{n_a} \quad (54) \qquad e \quad U_b = \frac{U_{ob}}{n_b} \quad (55)$$

as taxas anuais para os fundos de manutenção e reparação.

Logo de (48) e (19) obtemos

$$U = U_a (a_{10} D^2 + a_2 D) + U_b (b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5} + b_2 mQ) \qquad (56)$$

o valor do fundo anual de manutenção e reparação desejado.

4 — FUNÇÃO S

Seja N, o número de empregados que trabalham na operação da instalação de recalque. Seja s, o salário médio anual de cada empregado, inclusive leis sociais, logo, o fundo anual, necessário para este título será a função

$$S = N.s \qquad (57)$$

5 — FUNÇÃO W

No artigo anterior (1) sobre o investimento, a energia necessária para o recalque é definida pela equação (16) que, colocada em função de D, será

$$(CV) = B_1\ m^3 \frac{Q^3}{D^5} + B_2\ mQ \qquad (16a)$$

tendo B_1 e B_2 respectivamente os mesmos significados dados pelas relações (17) e (18) já vistas na seção anterior.

Supondo 7.000 horas anuais de funcionamento da instalação, teremos o seguinte consumo anual de energia, em kw-horas,

$$(kw\text{-}horas) = 7.000 \times 0{,}736\ (B_1\ m^3 \frac{Q^3}{D^5} + B_2\ mQ) \qquad (58)$$

Chamando P_o o custo de 1 kw-hora, o gasto anual com energia para a instalação de recalque será

$$W = \omega (b_1 m^3 \frac{Q^2}{D^3} + b_2 mQ) \qquad (59)$$

que é obtida multiplicando e dividindo a equação (58) por P_b e posteriormente multiplicando por P_o, sendo portanto

$$\omega = 700 \times 0{,}736 \times \frac{P_o}{P_b} \qquad (60)$$

$$b_1 = P_b\ B_1$$
$$b_2 = P_b\ B_2$$

6 — FUNÇÃO G

O valor de G engloba as despesas anuais indiretas e uma quantia a título de renda do dinheiro investido. Esta última quantia poderá ser tomada no mínimo igual aos juros anuais sobre o investimento.

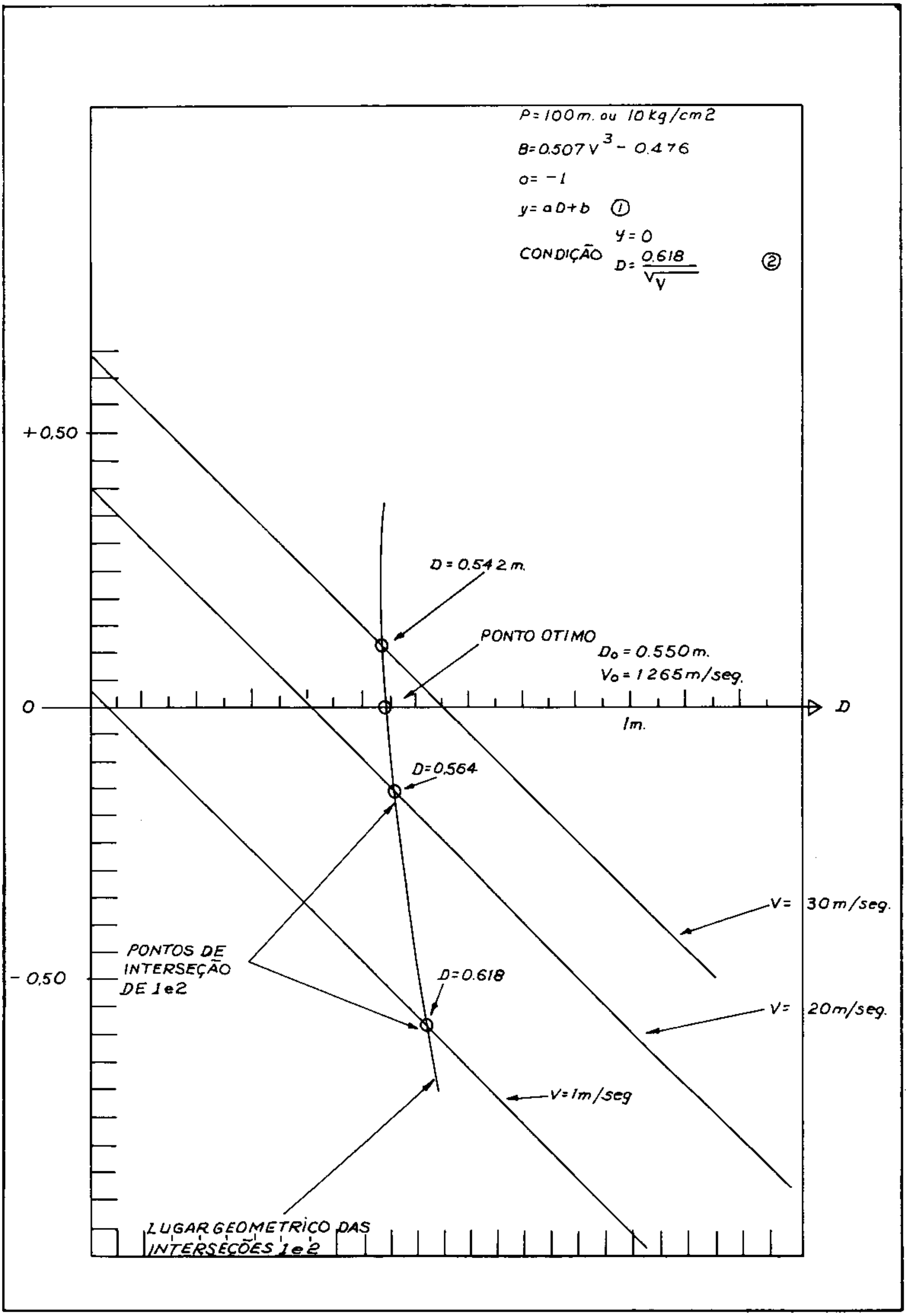

Gráfico — Para determinar o ponto ótimo do custo anual de exploração de uma instalação de recalque

Então sobre o investimento global, dado pela equação (23a), aplicando-se uma taxa g, que pode ser composta para representar as despesas indiretas e a rentabilidade, obtém-se a quantia anual G procurada.

Logo

$$G = gC$$

ou

$$G = g\,(a_{10}D^2 + a_2D) + g\,(b_1\, m^3 \frac{Q^3}{D_5} + $$

$$+ b_1\, mQ) \qquad (61)$$

7 — FUNÇÃO E DO CUSTO ANUAL GLOBAL DE EXPLORAÇÃO

A função E, será a soma definida pela equação (43), cujos valores das parcelas são dados pelas expressões (52), (53), (56), (57), (59) e (61).

Realizando esta adição encontra-se

$$E = (f_a + k + u_a + g)\,.\,(a_{10}\, D^2 + a_1\, D) +$$

$$+ (f_b + k + u_b + g + \omega)\,.\,(b_1\, m^3 \frac{Q^3}{D_5} +$$

$$+ b_2\, mQ) + N_s \qquad (62)$$

Fazendo

$$\alpha = (f_a + k + u_a + g) \qquad (63)$$

$$\beta = (f_b + k + u_b + \omega + g) \qquad (64)$$

Obtém-se

$$E = \alpha(a_{10}D^2 + a_2D) + \beta(b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5} +$$

$$+ b_2 mQ) + Ns \qquad (65)$$

que é a função do custo anual de exploração do empreendimento finalmente obtido.

8 — OTIMIZAÇÃO DA VARIÁVEIS DO CUSTO ANUAL DE EXPLORAÇÃO E.

Derivando a expressão (65) em relação a D, supondo (βs) independente de D, temos

$$\frac{dE}{dD} = \alpha(2a_{10}D + a_2) + \beta(-5b_1 m^3 \frac{Q^3}{D^5}) = 0 \qquad (66)$$

justificada porque para D = D_o valor ótimo, deve-se ter

$$\frac{dE}{dD} = o$$

Dividindo ambos os membros da expressão (66) por α, obtemos

$$2a_{10}\, D + a_2 - 5b_1 \frac{\beta}{\alpha} m^3 \frac{Q^3}{D^6} = o \qquad (67)$$

Façamos

$$b_{10} = b_1 \,.\, \frac{\beta}{\alpha} \qquad (68)$$

Logo, a expressão (67) torna-se

$$2a_{10}\, D + a_2 - 5b_{10}\, m^3 \frac{Q^3}{D^6} = o \qquad (69)$$

da qual se pode tirar o valor de D que otimiza a função E.

A solução direta da equação (69) não é prática porque nos conduz a uma equação do 7.º grau em D. Entretanto, observe-se que a equação (69) é perfeitamente semelhante à equação (33) da seção anterior, que otimiza o investimento. Logo, podemos utilizar, sem tirar nem pôr, um processo gráfico inteiramente semelhante ao imaginado para a solução da equação (33), apenas considerando os valores dos coeficientes da equação (69).

Assim a equação (69) escrita em função de V e D, sendo feita igual a y nos dá

$$y = -D + (\frac{5b_{10}}{2a_{10}} V^3 - \frac{a_2}{2a_{10}}) \qquad (70)$$

Esta equação (70) formando um sistema biunívoco de equações com a expressão

$$mQ - VD^2 = o \qquad (71)$$

marcadas ambas num sistema de coordenadas (y, D) cartesianas, nos fornecerá para y = o a solução ótima D = D_o procurada.

Como os detalhes da solução gráfica estão expostos na seção anterior, pedimos ao leitor voltar a ela.

Assim fica plenamente demonstrada a nossa afirmativa inicial, que um processo gráfico análogo ao utilizado para otimizar o investimento em uma instalação de recalque serve também para otimizar o seu custo anual de exploração.

9 — EXEMPLO

Seja a instalação de recalque do exemplo dado no artigo anterior, para a qual desejamos definir o valor de D que otimize o custo anual de exploração.

Para este fim adotar os seguintes dados básicos:

a) Taxa anual para o uso do "Sinking Fund" $i = 10\%$

b) Vida útil dos tubos $n_a = 30$ e das bombas $n_b = 30$ anos

c) Para as despesas com taxas, seguros etc. tomar a percentagem anual $k = 1\%$

d) Tomar para manutenção dos tubos e bombas $u_{oa} = 30\%$ e $u_{ob} = 90\%$, que correspondem respectivamente para tubos e bombas às taxas anuais $u_a = 1\%$ e $u_b = 3\%$.

e) Supor que as bombas sejam movidas por energia elétrica fornecida por uma Companhia de Eletricidade ao preço de Cr$ 0,420 por kw-hora.

f) Para cobrir as despesas indiretas e a rentabilidade sobre o capital investido tomar $g = 30\%$.

SOLUÇÃO

Do exemplo da seção anterior, temos os seguintes elementos:

$a_1 = \pi \times 10^3 \times 183{,}40$
$a_2 = \pi \times 10^3 \times 164{,}64$
$b_1 = \pi \times 10^3 \times 11{,}48$
$b_2 = \pi \times 10^3 \times 33{,}60$
P_h = Cr$ 3.360,00 por CV

Com estes elementos como dados adicionais, obtemos

a) Valor de a_{10}

$$a_{10} = \frac{(1+i)^{n_a} - 1}{(1+i)^{n_a}} \times a_1 = \pi \times 10^3 \times 172{,}891$$

b) Valores de fa e fb

$$fa = fb = \frac{0{,}10}{(1+0{,}10)^{30} - 1} = 0{,}0061$$

c) Valor de ω

$$\omega = 7000 \times 0{,}736 \times \frac{0{,}420}{3.360{,}00} = 0{,}645$$

d) Valor de α e β

Para α temos

$$\alpha = f_a + k + U_a + g = \\ = 0{,}0061 + 0{,}01 + 0{,}01 + 0{,}30 = 0{,}3261$$

Para β temos

$$\beta = f_b + k + U_b + \omega + g = \\ = 0{,}0061 + 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}645 + 0{,}30 = 0{,}9911$$

e) Valor de b_{10}

$$b_{10} = b_1 \times \frac{\beta}{\alpha} = \pi \times 10^3 \times 35{,}00$$

f) Família de retas a 45° no gráfico (y, D) cartesiano

Temos

$$y = aD + b \qquad (72)$$

com $a = -1$

$$b = \frac{5b_{10}}{2a_{10}} V^3 - \frac{a_1}{2a_{10}}$$

Logo o valor de b será

$$b = 0{,}507\,V^3 - 0{,}476 \qquad (73)$$

g) Família de retas paralelas ao eixo dos y ou D = constante. Da relação $mQ - VD^2 = 0$, para

$Q = 0{,}300\ m^2/seg$ e com $m = \frac{4}{\pi}$, tira-se

$$D = \frac{0.618}{\sqrt{V}} \qquad (74)$$

h) Traçado no gráfico (y, D) das famílias de retas e otimização.

As equações (72) e (74) podem com facilidade serem traçadas em coordenadas cartesianas (y, D) biunivicamente para cada valor de V, definindo assim o lugar geométrico das suas interseções a curva que cortará o eixo dos D num ponto $D = D_o$ ótimo procurado.

O quadro a seguir define os valores básicos para os traçados destas retas para cada valor da velocidade V de escoamento.

Vm/seg	Arbitrada	1,00	1,20	1,25	1,30
D	Eq. 74	0,618	0,564	0,552	0,542
b	Eq. 73	0,031	0,400	0,514	0,638

Este quadro de valores é então representado conforme traçado da figura 2 da Seção I. Anexo o gráfico aqui citado conforme fig. 4. O ponto ótimo do custo anual de exploração será então para $D_o = 0{,}550$ m e $V_o = 1{,}265$ m/seg.

SEÇÃO III — OPÇÃO ENTRE O ÓTIMO PARA O INVESTIMENTO OU O ÓTIMO PARA A EXPLORAÇÃO

Para os pontos ótimos obtidos para cada caso, calcula-se os valores das funções de preços C e E respectivamente pelas expressões (23) e (65).

Então, calculando-se os investimentos Ci e Ce respectivamente para os diâmetros do ótimo de investimento e do ótimo do custo anual de exploração, pode-se obter o acréscimo de investimento.

$$\triangle I = Ce - Ci$$

Este acréscimo de investimento definirá anualmente uma economia do custo de exploração $\triangle E$, defiinda pela relação

$$\triangle E = Ei - Ee$$

sendo Ei o custo anual de exploração para o diâmetro ótimo do investimento e Ee o custo anual de exploração para o diâmetro ótimo deste custo anual.

Assim o investimento maior para o diâmetro maior do ótimo do custo anual de exploração promove uma economia anual $\triangle E$ durante toda a vida econômica do empreendimento. Esta economia anual pode ser encarada como uma renda do acréscimo de investimento $\triangle I$. O valor desta rentabilidade deve ser tal que justifique o acréscimo $\triangle I$ do custo de construção.

Portanto, para um valor que não compense desta renda anual pode-se optar para o diâmetro ótimo do investimento ou, ao contrário, se esta renda compensar deve se optar para o diâmetro ótimo do custo anual de exploração.

Assim, a relação

$$\frac{\triangle E}{\triangle I} \geq \text{rentabilidade mínima anual}$$

é que definirá a decisão a ser tomada.