

MÉTODO DE RESOLUÇÃO DOS ESCOAMENTOS EM REGIME TRANSITÓRIO

Prof. TUFI MAMED ASSY*

ABSTRACT

WATER HAMMER ANALYSIS

A new form for the characteristic equations has been used in solving transient flows. Based on this presentation, equations were developed to determine the unknown variables at intermediate sections and at the line end sections, the latter depending on the type of boundary conditions, such as constant level reservoir, simple junctions, complex junctions, and parallel centrifugal pump installations.

INTRODUÇÃO

Desde o advento do computador digital, em 1960, os métodos de cálculo numérico foram sendo aperfeiçoados para a solução mais precisa, porém expedita dos problemas de golpe de ariete em canalizações forçadas.

Neste artigo, emprega-se um método de cálculo numérico cujos fundamentos são as equações características, obtidas pelo método das características, mas convenientemente rearranjadas pela introdução de duas funções auxiliares Ω e π que simplificam os cálculos e reduzem o número de operações matemáticas (1), (2).

As equações características e demais equações resultantes são aqui redigidas na forma julgada apropriada para fins de computação por meio de computadores digitais.

O manuseio dessas equações é mostrado primeiramente para a pesquisa da solução nas seções internas de um conduto e depois para a obtenção de diversas condições de contorno que soem ocorrer em instalações de grande porte.

FUNDAMENTOS DO MÉTODO DAS CARACTERÍSTICAS

O escoamento em regime transitório nos condutos cilíndricos é regido por duas equações diferenciais de derivadas parciais, sendo que uma delas é válida em todos os pontos da curva plana de equação $dx/dt = +a_0$, e a outra é válida em todos os pontos da curva plana de equação $dx/dt = -a_0$, a saber (3):

$$\frac{dQ}{dt} + \alpha \frac{dH}{dt} + \frac{f|Q|}{2DS} Q = 0 \quad (I)$$

C^+

$$\frac{dx}{dt} = a_0 \quad (II)$$

$$\frac{dQ}{dt} - \alpha \frac{dH}{dt} + \frac{f|Q|}{2DS} Q = 0 \quad (III)$$

C^-

$$\frac{dx}{dt} = -a_0$$

onde $\alpha = Sg/a_0$.

* Professor Titular da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Engenheiro Consultor.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

As curvas representativas no plano (x, t) da Eq. (II) são segmentos de reta de coeficiente angular positivo dado por $(\Delta t/\Delta x) = 1/a_0$ onde Δt é o tempo necessário para a onda de celeridade a_0 percorrer o trecho do conduto de comprimento Δx no sentido positivo. A Eq. (I) é válida ao longo de cada um destes segmentos de reta. Seja A_1, B_2 um destes segmentos. Se $Q(a, A, t_1)$ e $H(a, A, t_1)$ são as variáveis reinantes no ponto A_1 (que representa a seção A do conduto a no instante $t_1 = \Delta t$) e $Q(a, B, t_2)$, $H(a, B, t_2)$ são as mesmas variáveis no ponto B_2 (que representa a seção B do conduto a no instante $t_2 = 2\Delta t$), a Eq. (I) pode ser convertida na seguinte relação entre as mencionadas variáveis:

$$C^+: \Omega(a, B, t_2) = \Omega(a, A, t_1) - i(a, A, t_1) \Delta t \quad (V)$$

onde

$$\Omega(a, B, t_2) = \alpha(a) H(a, B, t_2) + Q(a, B, t_2), \quad (VIa)$$

$$\Omega(a, A, t_1) = \alpha(a) H(a, A, t_1) + Q(a, A, t_1), \quad (VIb)$$

$$i(a, A, t_1) = \frac{f(a, A, t_1) |Q(a, A, t_1)|}{2D(a) S(a)} Q(a, A, t_1) \quad (VIc)$$

De modo análogo se conclui que as curvas características C^- são válidas no plano (x, t) , ao longo de segmentos de reta de coeficiente angular negativo $(\Delta t/\Delta x = -1/a_0)$. Ao longo da curva C_1, B_2 , por exemplo, a Eq. (III) se converte em

$$C^-: \pi(a, B, t_2) = \pi(a, C, t_1) + i(a, C, t_1) \Delta t \quad (VII)$$

onde

$$\pi(a, B, t_2) = \alpha(a) H(a, B, t_2) - Q(a, B, t_2), \quad (VIIIa)$$

$$\pi(a, C, t_1) = \alpha(a) H(a, C, t_1) - Q(a, C, t_1), \quad (VIIIb)$$

$$i(a, C, t_1) = \frac{f(a, C, t_1) |Q(a, C, t_1)|}{2D(a) S(a)} Q(a, C, t_1) \quad (VIIIc)$$

As Eqs. (V), (VI), (VII), (VIII) determinam, conjuntamente, as variáveis (Q, H) nas diversas seções do conduto em um dado instante t quando essas variáveis são conhecidas no instante anterior $t - \Delta t$. Com efeito, as Eqs. (VI) e (VIII) fornecem $\Omega(a, A, t_1)$, $i(a, A, t_1)$, $\pi(a, C, t_1)$ e $i(a, C, t_1)$. Com estes elementos as Eqs. (V) e (VII) fornecem $\Omega(a, B, t_2)$ e $\pi(a, B, t_2)$. Das Eqs. (VI) e (VIII) tiram-se, finalmente:

$$H(a, B, t_2) = \frac{\Omega(a, B, t_2) + \pi(a, B, t_2)}{2\alpha(a)} \quad (IX)$$

$$Q(a, B, t_2) = \frac{\Omega(a, B, t_2) - \pi(a, B, t_2)}{2} \quad (X)$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO

Em cada seção extrema do conduto, apenas uma das variáveis, Ω ou π , é conhecida em cada instante. Na seção de jusante é conhecida a função Ω e na seção de montante é conhecida a função π . Obtém-se a função incógnita, Ω ou π , a ser utilizada para a execução dos cálculos subseqüentes, fazendo intervir, conjuntamente, a função conhecida Ω ou π e as equações que regem o escoamento em regime permanente na estrutura à qual o conduto se acha conectado. Este procedimento é a seguir descrito para as diversas estruturas indicadas nas Figs. 2 a 7.

ESTRUTURA E1. A Fig. 2 mostra um reservatório a nível constante e sem perda de carga singular na conexão do reservatório com o conduto. Admitindo que o escoamento se realiza no sentido positivo, atribuído ao eixo dos x , a vazão é positiva e a função Ω é conhecida na seção extrema A do conduto a:

$$\Omega(a, A, t) = \alpha(a) H(a, A, t) + Q(a, A, t) = \alpha(a)z + Q(a, A, t) \quad (XI)$$

onde $H(a, A, t) = z$ é a cota geométrica da superfície livre do líquido no reservatório. A Eq. (XI) pode resolver-se em relação a $Q(a, A, t)$ já que Ω é conhecido e z é dado. A Eq. (IX) fornece o valor de π necessário para a execução dos cálculos subseqüentes:

$$\pi(a, A, t) = 2\alpha(a)z - \Omega(a, A, t) \quad (XII)$$

ESTRUTURA E2. É a mesma estrutura E1 com a diferença de que o sentido positivo atribuído ao eixo dos x e o sentido da vazão são inversos aos adotados anteriormente. Obtém-se

$$\Omega(a,A,t) = 2\alpha(a)z - \pi(a,A,t) \quad (XIII)$$

onde, agora, $\pi(a,A,t)$ é conhecido.

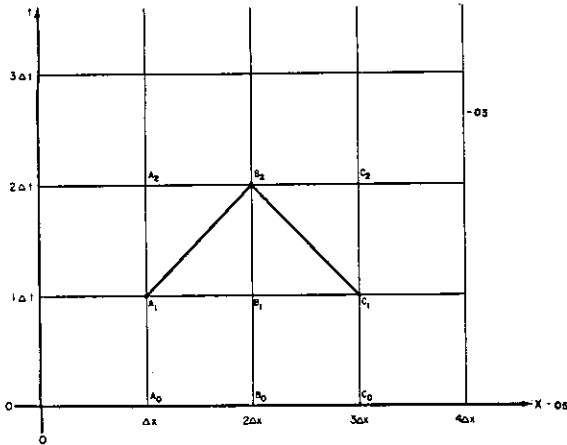


FIGURA 1. Diagrama no plano (x,t). O eixo do conduto de comprimento L e o eixo dos x de O a L.

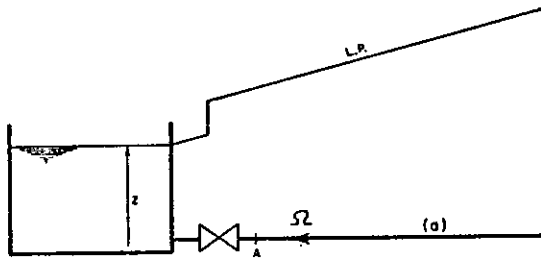


FIGURA 2. Reservatório a nível constante (ESTRUTURA E1).

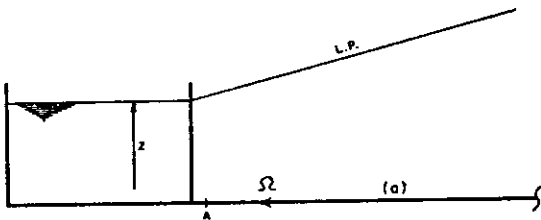


Figura 3. Reservatório a nível constante com perda de carga (ESTRUTURA E3)

ESTRUTURA E3. A Fig. 3 mostra um reservatório a nível constante e com perda de carga singular na conexão do reservatório com o conduto. Admitindo que o escoamento se realiza no sentido positivo do eixo dos x, obtém-se:

$$\Omega(a,A,t) = \alpha(a) H(a,A,t) + Q(a,A,t) \quad (XIV)$$

A perda de carga entre a seção A e o nível do reservatório é dada por:

$$H(a,A,t) - z = kQ^2(a,A,t) \quad (XV)$$

Eliminando $H(a,A,t)$ entre as Eqs. (XIV) e (XV) vem:

$$Q(a,A,t) = -\frac{1}{2k\alpha(a)} + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{k\alpha(a)}\right)^2 + \frac{4}{k} \left(\frac{\Omega(a,A,t)}{\alpha(a)} - z\right)} \quad (XVI)$$

e $Q(a,A,t) \geq 0$ se $\Omega(a,A,t)/\alpha(a) \geq z$.

Se o sentido do escoamento é inverso ao indicado obtém-se:

$$Q(a,A,t) = -\frac{1}{2k\alpha(a)} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\alpha(a)k}\right)^2 + \frac{4}{k} \left(z - \frac{\Omega(a,A,t)}{\alpha(a)}\right)} \quad (XVII)$$

e $Q(a,A,t) < 0$ se $z > \Omega(a,A,t)/\alpha(a)$.

Nestas condições, a carga em A é obtida de (VI):

$$H(a,A,t) = \frac{\Omega(a,A,t) - Q(a,A,t)}{\alpha(a)} \quad (XVIII)$$

e o valor de π necessário para execução dos cálculos subsequentes é obtido de (X):

$$\pi(a,A,t) = \Omega(a,A,t) - 2Q(a,A,t) \quad (XIX)$$

ESTRUTURA E4. A Fig. 4 representa um entroncamento Z, sem manobra de válvulas e sem proximidades de reservatórios. Admitindo que o escoamento se realiza no sentido positivo do eixo dos x, obtém-se:

$$\begin{aligned} \Omega(b,Z,t) &= \alpha(b) H(b,Z,t) + Q(b,Z,t) \\ \pi(c,Z,t) &= \alpha(c) H(c,Z,t) - Q(c,Z,t) \\ \Omega(d,Z,t) &= \alpha(d) H(d,Z,t) + Q(d,Z,t) \\ \Omega(a,Z,t) &= \alpha(a) H(a,Z,t) + Q(a,Z,t) \end{aligned} \quad (XX)$$

Somando membro a membro estas equações, convencionando positivas as vazões quando o sentido do escoamento é do conduto (ou do exterior) para o nó e tendo presente a equação da continuidade no nó, vem:

$$\begin{aligned} \Sigma(\Omega,\pi) &= H(Z,t)\Sigma\alpha - Q(Z,t) \\ \text{donde:} & \\ H(Z,t) &= \frac{\Sigma(\Omega,\pi) + Q(Z,t)}{\Sigma\alpha} \end{aligned} \quad (XXI)$$

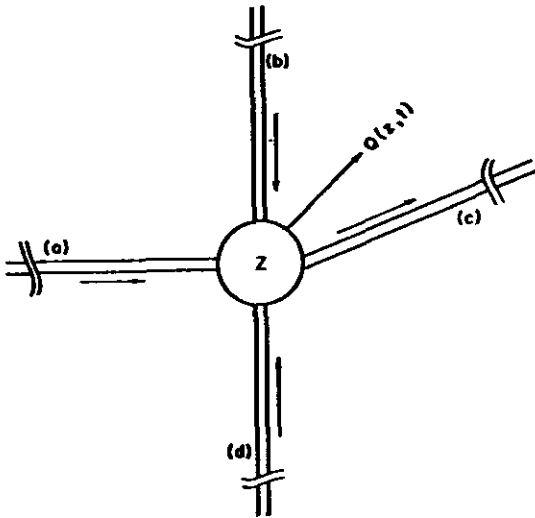


FIGURA 4. Entroncamento simples (ESTRUTURA E4).

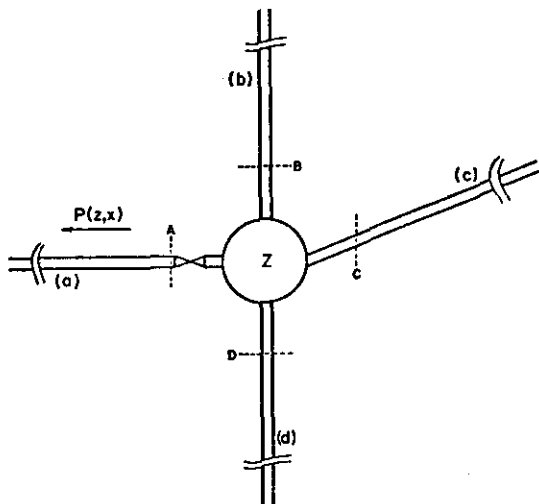


FIGURA 5. Entroncamento com manobra de válvula (ESTRUTURA E5).

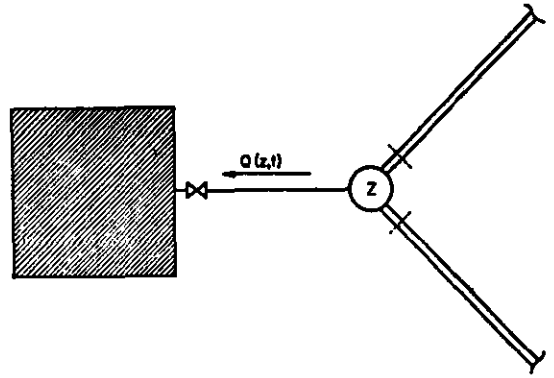


FIGURA 6. Reservatório a nível constante tipo E2 próximo a entroncamento (ESTRUTURA E6).

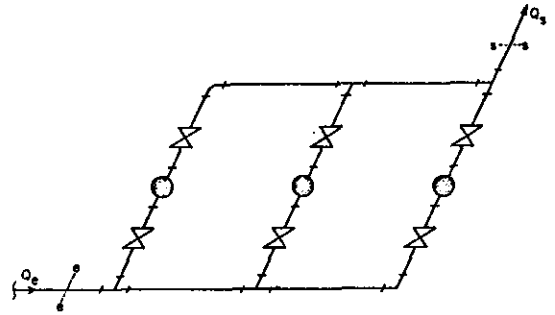


FIGURA 7. Instalação tipo de grupo moto-bomba em paralelo (ESTRUTURA E7).

Na Eq. (XXI) $Q(Z,t)$ é positivo quando o escoamento é dirigido do exterior para o nó e $H(Z,t) = H(a,Z,t) = H(b,Z,t) = H(c,Z,t) = H(d,Z,t)$.

Com a carga no nó calculada pela Eq. (XXI), calculam-se, agora, nas seções contíguas ao nó, as vazões pelas Eqs. (XX) e os valores de Ω e de π , necessários para os cálculos subseqüentes, pela Eq. (IX).

ESTRUTURA E5. A Fig. 5 mostra um entroncamento Z com manobra de válvula entre o nó e uma seção A contígua ao nó, porém, sem proximidades de reservatórios. Admitindo que a vazão em A é positiva porque o escoamento concorre ao nó Z, e orientando o eixo dos x positivo no sentido de A para Z tem-se da Eq. (XXI):

$$Q(Z,t) = Q(a,Z,t) = H(Z,t)\Sigma\alpha - \Sigma(\Omega,\pi) \quad (XXII)$$

Por outro lado, a descarga através da válvula obedece a uma lei do tipo:

$$Q(a,A,t) = C_d S_v \sqrt{2g(H(a,A,t) - H(Z,t))}$$

ou

$$Q(a,A,t) = n \sqrt{H(a,A,t) - H(Z,t)} \quad (XXIII)$$

onde

$$n(t) = C_d S_v \sqrt{2g}$$

Além disso, a vazão $Q(a, A, t)$ está relacionada à função $\Omega(a, A, t)$ por:

$$\Omega(a,A,t) = \alpha(a) H(a,A,t) + Q(a,A,t) \quad (XXIV)$$

Eliminando $H(a,A,t)$ e $H(Z,t)$ entre as Eqs. (XXII), (XXIII), (XXIV) resulta:

$$Q^2(a,A,t) + n^2 \left(\frac{1}{\alpha(a)} + \frac{1}{\Sigma \alpha} \right) Q(a,A,t) + n^2 \left(\frac{\Sigma(\Omega\pi)}{\Sigma \alpha} - \frac{\Omega(a,A,t)}{\alpha(a)} \right) = 0$$

Desta equação interessa a solução positiva

$$Q(a,A,t) = - \frac{n^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha(a)} + \frac{1}{\Sigma \alpha} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{n^4 \left(\frac{1}{\alpha(a)} + \frac{1}{\Sigma \alpha} \right)^2 + 4n^2 \left(\frac{\Omega(a,A,t)}{\alpha(a)} - \frac{\Sigma(\Omega\pi)}{\Sigma \alpha} \right)} \quad (XXV)$$

e $Q(a,A,t) \geq 0$ se

$$\Omega(a,A,t)/\alpha(a) \geq \Sigma(\Omega\pi)/\Sigma \alpha \quad (XXVI)$$

Se o escoamento resultar em sentido contrário ao admitido anteriormente, vem:

$$Q(a,A,t) = \frac{n^2}{2} \left(\frac{1}{\alpha(a)} + \frac{1}{\Sigma \alpha} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{n^4 \left(\frac{1}{\alpha(a)} + \frac{1}{\Sigma \alpha} \right)^2 + 4n^2 \left(\frac{\Sigma(\Omega\pi)}{\Sigma \alpha} - \frac{\Omega}{\alpha(a)} \right)} \quad (XXVII)$$

e $Q(a,A,t) < 0$ se

$$\frac{\Omega}{\alpha(a)} < \frac{\Sigma(\Omega\pi)}{\Sigma \alpha} \quad (XXVIII)$$

O procedimento é então o seguinte: comparar $\Omega/\alpha(a)$ com $\Sigma(\Omega\pi)/\Sigma \alpha$; usar a Eq. (XXV) se se verificar (XXVI) e usar a Eq. (XXVII) se se verificar (XXVIII). Desse modo, evita-se a possibilidade de se extrair a raiz quadrada de um número negativo. A carga $H(Z, t)$ é obtida de (XXI), donde, nas seções contíguas ao nó, as vazões, que se calculam por (XX), e os valores de π e de Ω que se calculam por (IX).

ESTRUTURA E6. A Fig. 6 mostra um entroncamento Z com perda de carga singular entre um nó e um reservatório que lhe é próximo. Admitindo que o escoamento se dá no sentido reservatório — nó Z, a vazão $Q(Z,t)$ é positiva e é tal que:

$$Q^2(Z,t) = \frac{1}{k} (z - H(Z,t)) = \frac{1}{k} \left(z - \frac{\Sigma(\Omega\pi) + Q(Z,t)}{\Sigma \alpha} \right)$$

A solução positiva desta equação é

$$Q(Z,t) = - \frac{1}{2} \frac{1}{k \Sigma \alpha} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{k \Sigma \alpha} \right)^2 + \frac{4}{k} \left(z - \frac{\Sigma(\Omega\pi)}{\Sigma \alpha} \right)}$$

e

$$Q(Z,t) \geq 0 \text{ se } z \geq \frac{\Sigma(\Omega\pi)}{\Sigma \alpha}$$

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Se o escoamento se dá em sentido contrário ao admitido anteriormente, i.é, no sentido nó — reservatório, resulta:

$$Q(Z,t) = \frac{1}{2} \frac{1}{k \Sigma \alpha} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{k \Sigma \alpha}\right)^2 + \frac{4}{k} \left(\frac{\Sigma (\Omega \pi)}{2\pi} - z\right)}$$

e então $Q(Z,t) < 0$ se

$$z \leq \Sigma (\Omega \pi) / 2\pi$$

Para a execução dos cálculos procede-se de acordo com o instruído para a estrutura tipo E5.

ESTRUTURA E7. A Fig. 7 mostra o arranjo de $n = 3$ grupos moto-bombas centrífugas operando em paralelo entre as duas seções de entrada e-e e de saída s-s. Uma interrupção brusca da energia para n_1 das n unidades que formam a instalação, enquanto que as n_2 restantes permanecem operando normalmente, faz com que surjam os transitórios cujas conseqüências precisam ser devidamente apuradas.

A redução em relação ao tempo, em cada instante, da velocidade angular do rotor de cada bomba é acompanhada, na canalização de recalque, de propagação de ondas de depressão para jusante e de ondas de compressão para montante. Essa redução é dada por:

$$2\pi \frac{dN}{dt} = - \frac{M}{I} \quad (XXIX)$$

A solução da Eq. (XXIX) requer o conhecimento das curvas características da bomba que são o momento M e a carga manométrica H_m em função da vazão Q e da freqüência N do movimento de rotação do rotor. As curvas características da bomba podem ser locadas usando variáveis adimensionais do tipo introduzidas por Kit-tredge (4). Analiticamente, cada arco elementar dessas curvas pode ser assimilado a segmentos de reta de equação.

$$\frac{h}{n^2} = a_0 + a_1 \frac{q}{n} \quad \frac{m}{n^2} = b_0 + b_1 \frac{q}{n} \quad (XXX)$$

ou por

$$\frac{h}{q^2} = a_0 + a_1 \frac{n}{q} \quad \frac{m}{q^2} = b_0 + b_1 \frac{n}{q} \quad (XXXI)$$

onde $h = H/H_n$, $m = M/M_n = N/N_n$ e $q = Q/Q_n$; H_n , M_n , N_n e Q_n representam respectivamente, a carga manométrica, o conjugado, a freqüência, e a vazão no ponto de máximo rendimento da bomba.

A Eq. (XXIX), tendo presente (XXX), se converte em:

$$\frac{dn}{dt} = - \frac{M_n}{I \omega_n} m(n,q) \quad (XXXII)$$

onde $m(n, q)$ é o adimensional dado por (XXX) ou por (XXXI).

Admitindo o sentido positivo do escoamento conforme estabelecido na Fig. 7 tem-se, nas seções e-e e s-s, respectivamente:

$$\Omega_e = \alpha_e H_e + Q_e \quad (XXXIII)$$

$$\pi_s = \alpha_s H_s - Q_s \quad (XXXIV)$$

Indicando com o índice 1 as variáveis que se referem aos grupos moto-bomba que sofrem variação de freqüência com o tempo e com o índice 2 as variáveis que se referem aos grupos moto-bomba que permanecem em operação normal, escrevem-se as equações da continuidade e de Bernoulli, para cada caso, como segue:

$$Q_e = Q_s = Q \quad (XXXV)$$

$$v_1 Q_1 + v_2 Q_2 = Q \quad (XXXVI)$$

$$H_e - H_s = -H_{m_1} + \frac{1}{2} |Q_1| Q_1 \quad (XXXVII)$$

$$H_e - H_s = -H_{m_2} + k_o |Q_2| Q_2 \quad (XXXVIII)$$

$$\text{onde } n = C_d S_v \sqrt{2g}$$

Das equações (XXX), (XXXIII) a (XXXV), (XXXVII) e (XXXVIII) resulta:

$$\frac{\Omega_e - Q_n q}{\alpha_e} - \frac{\pi_s + Q_n q}{\alpha_s} = - H_{n_1} h_1(n_1, q_1) + \left(\frac{Q_n}{n}\right)^2 |q_1| q_1 \quad (XXXIX)$$

$$\frac{\Omega e^{-Q n q}}{\alpha_e} - \frac{\pi s + Q n q}{\alpha_s} = -$$

$$- H_{n_2} h_2(q_2) + k_n Q_n^2 |q_2| q_2 \quad (XL)$$

onde h_1 e h_2 são dados por (XXX) ou por (XXXI).

As equações (XXXII), (XXXVI), (XXXIX), (XL) resolvem-se pelo método de Runge-Kutta de 2.^a ordem como segue: Se (\bar{n}_1, \bar{q}_1) representam valores conhecidos de (n_1, q_1) no início do intervalo de tempo seguinte Δt , um novo valor, porém aproximado, de n_1 pode ser obtido de (XXXII):

$$\bar{n}_1 = \bar{n} - \Delta t \frac{N_n}{lw_n} m_1(\bar{n}_1, \bar{q}_1) \quad (XLI)$$

Os correspondentes valores de $\bar{q}_1 = \bar{Q}_1/Q_n$, $\bar{q}_2 = \bar{Q}_2/Q_n$, $\bar{q} = \bar{Q}/Q_n$ acham-se por interação das Eqs. (XXXVI), (XXXIX), (XL) como segue: com (\bar{n}, \bar{q}) a (XXXIX) fornece um valor aproximado de Q e com este valor a (XL) fornece pelo método da biseção um valor aproximado de Q_2 . Com os valores assim obtidos para Q e Q_2 a (XXXVI) fornece um outro valor para Q_1 com o qual se repete o procedimento acima descrito, até a convergência. Com (\bar{n}_1, \bar{Q}_1) a (34) fornece um novo valor para n_1 . O valor médio deste último valor e daquele anteriormente encontrado (\bar{n}_1) representa o valor procurado de n_1 de maior aproximação. Os novos correspondentes valores de Q_1 , Q_2 e Q são reavaliados pelo processo iterativo acima descrito. Com os valores de n e das vazões assim determinadas os coeficientes das Eqs. (XXX) e (XXXI) são agora verificados. Se houver diferenças entre os adotados e os recalculados, novos valores são então assumidos e os processos de cálculo acima descritos são repetidos.

RESUMO

Uma nova forma das equações características foi utilizada para a solução dos escoamentos em regime transitório. Com base nesta nova apresentação, obtiveram-se as equações que determinam as variáveis incógnitas em cada seção interna e nas seções extremas de cada conduto, estas últimas decorrentes de diversos tipos de condições de contorno, como, por exemplo, reservatório a nível constante, entroncamento simples de conduto, entroncamentos complexos e instalação de bombas centrífugas em paralelo.

SIMBOLOGIA

- $Q(a,A,t)$ vazão na seção A de conduto a e no instante t.
 $H(a,A,t)$ carga piezométrica na seção A do conduto a e no instante t.
 a_o (a) celeridade de propagação da perturbação no conduto a.
 $S(a)$ área da seção transversal do conduto a.
 H_m carga manométrica.
 $f(a,A,t)$ coeficiente de perda de carga distribuída na seção A do conduto a no instante t.
 $D(a)$ diâmetro da seção do conduto a.
 t variável tempo.
 x, z variável abcissa e cota, respectivamente.
 k coeficiente de perda de carga singular.
 C_d coeficiente de descarga da válvula.
 S_v área da seção de abertura da válvula.
 I momento polar de inércia das peças girantes no interior da bomba.
 M momento das forças externas exercidas sobre o rotor da bomba.
 N freqüência do movimento de rotação do rotor da bomba.
 n índice que indica o valor da variável para a condição de máximo rendimento da bomba.
 n freqüência adimensional.

REFERÊNCIAS

- (1) Assy, T.M., Anderson, J.E. e Yudenitsh, A., **Controle do Golpe de Ariete na Elevatória Santa Inês do Sistema Juqueri**, Revista DAE, n.º 72, junho de 1969.
- (2) Mostkov, M.A. e Bashkirov, A.A., **Cálculo do Golpe de Ariete**, (Russo), Moscou, 1952.
- (3) Streeter, V.L. e Wylie, E.B., **Hydraulic Transients**, McGraw Hill Book Co.; New York, 1967.
- (4) Kittredge, C.P., **Hydraulic Transient in Centrifugal Pump Systems**, Trans. ASME, vol. 78, 1956.